

УДК 534.22

АКУСТИКА ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ПАРА

Нагоряков В. Е., Покусав Б. Г., Прибатурин Н. А., Шрейбер И. Р.

Представлен дисперсионный анализ модельного уравнения, предложенного в работе [1] для описания распространения волн в жидкости с пузырьками пара. Показано, что фазовые переходы первого рода существенно влияют на дисперсию акустических волн на низких частотах, меньших резонансной частоты пузырька.

Рассмотрим парожидкостную среду при следующих предположениях: во время прохождения волны граница раздела пар — жидкость находится в термодинамическом равновесии и выполняется условие Клапейрона — Клаузиуса:  $dp/dT=L\rho_2/T_0$ ,  $p$  — давление,  $T_s$  — температура насыщения,  $T_0=T_s(p_0)$ ; жидкость является термостатом и сохраняет на достаточном расстоянии от поверхности пузырька начальную температуру  $T_0$ ; интенсивность возникающего фазового перехода определяется лишь теплопроводностью жидкости; пар внутри пузырька ведет себя адиабатически, рассматриваемая смесь удовлетворяет всем уравнениям и соотношениям гомогенной пузырьковой смеси. Согласно работе [1], уравнение для распространения акустических волн в парожидкостной среде при таких допущениях имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_3^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2\beta \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{3\gamma p_0}{R_0 \rho_2 L} \frac{\partial q_1}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь  $c_3 = (\gamma p_0 / \rho_1 \varphi_0)^{1/2}$  — «замороженная» скорость звука в такой среде,  $\beta = R_0^2 / 6\varphi_0$  — коэффициент дисперсии,  $q_1$  — тепловой поток на границе пузырек — жидкость в сторону жидкости,  $\rho$  — плотность,  $L$  — скрытая теплота парообразования,  $R$  — радиус пузырька,  $\varphi$  — паросодержание,  $\gamma$  — показатель адиабаты для пара, индекс 1 относится к жидкости, 2 — к пару. Существенным моментом в построении эволюционного уравнения является определение потока тепла  $q_1$  в уравнении (1). В принятой модели [1] он определяется интегралом Дюамеля

$$q_1 = -\lambda_1 \int_0^t \frac{\partial}{\partial t'} [T_s(t) - T_0] \frac{dt'}{\sqrt{\pi a_1 (t-t')}}. \tag{2}$$

Выражение (2) следует из решения уравнения теплопроводности около пузырька с произвольным значением температуры в качестве начального условия. При исследовании гармонических колебаний паровых пузырьков, в частности при выводе дисперсионных соотношений в работе [2], используется другое выражение для теплового потока  $q_1$ , характерное для задач без начальных условий:

$$q_1 = \Delta T_m \omega^{1/2} \lambda_1 a_1^{-1/2} \exp [i(\omega t + \pi/4)]. \tag{3}$$

Для возмущения вида  $\Delta T = \Delta T_m \exp [i(kx - \omega t)]$  между выражениями (2) и (3) нетрудно установить связь:  $q_1 = \rho_1 c_{p_1} (a_1/\pi)^{1/2} i\omega [C(t) + iS(t)] \Delta T_m \exp \times [i(kx - \omega t)]$ , где  $C(t)$  и  $S(t)$  интегралы Френеля:

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos \omega t'}{\sqrt{t'}} dt', \quad S(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega t'}{\sqrt{t'}} dt'.$$

При  $t \rightarrow 0$  для фиксированной частоты  $\omega$   $C(t) \sim S(t) \rightarrow 0$  и при  $t \rightarrow \infty$

$C(t) = S(t) = (\pi/2\omega)^{1/2}$ . Таким образом, решение (2) переходит в решение (3) при  $t \rightarrow \infty$ . Решение (3) справедливо спустя некоторое время, а для распространения волн, как правило, интересны начальные моменты и поэтому в эволюционных уравнениях предпочтительно брать решение в виде (2), а не (3). Анализ дисперсионных соотношений имеет важное значение для изучения механических свойств среды и особенностей распространения волны. Практическое приложение этих результатов имеет место в диагностике парожидкостных потоков, основанных на акустических методах измерения паросодержания.

Изучение акустических свойств жидкости с пузырьками пара будем проводить на основе уравнения (1). Представим возмущение давления в виде гармонической волны  $\Delta p = \Delta p_m \exp [i(kx - \omega t)]$ . Тепловой поток  $q_1$ , входящий в уравнение (1), запишем с учетом уравнения Клапейрона — Клаузиуса в виде

$$q_1 = (\rho_1 c_{p1} T_0 / \rho_2 L) (a_1 \omega / 2)^{1/2} (i-1) \Delta p_m \exp [i(kx - \omega t)]. \quad (4)$$

Подставляя соотношение (4) в уравнение (1), найдем дисперсионное соотношение для акустических волн, распространяющихся в жидкости с пузырьками пара:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_3^2} \left[ \frac{1 + m/\sqrt{2\omega\tau_1} + im/\sqrt{2\omega\tau_1}}{1 - 2\beta\omega^2/c_3^2} \right]. \quad (5)$$

Здесь  $m = 3\gamma p_0 \rho_1 c_{p1} T_0 / \rho_2^2 L^2$ ,  $\tau_1 = R_0^2 / a_1$ .

Вещественная часть волнового числа связана с фазовой скоростью волны  $c_f = \omega / \text{Re} [k(\omega)]$ :

$$c_f = c_3 \sqrt{2} \left\{ \left( 1 - \frac{2\beta\omega^2}{c_3^2} \right) \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{2\omega\tau_1}} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{\omega\tau_1}} + \frac{m^2}{\omega\tau_1} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (6)$$

Остановимся на анализе дисперсионного соотношения (5). Исключим из рассмотрения инерционные свойства присоединенной массы паровых пузырьков. Это соответствует случаю  $\beta = 0$  и приближению, принятому в работе [2]. На фиг. 1 приведено сравнение дисперсионной кривой  $c_f = c_f(\omega)$ , численно рассчитанной Ардроном [2], исходя из общих уравнений движения гомогенной парожидкостной смеси, и аналитической зависимости (6) ( $\beta = 0$ ) при одинаковом паросодержании. Эти кривые практически совпадают. Таким образом, эволюционное уравнение (1) с тепловым потоком (3) можно использовать для анализа акустики парожидкостной среды.

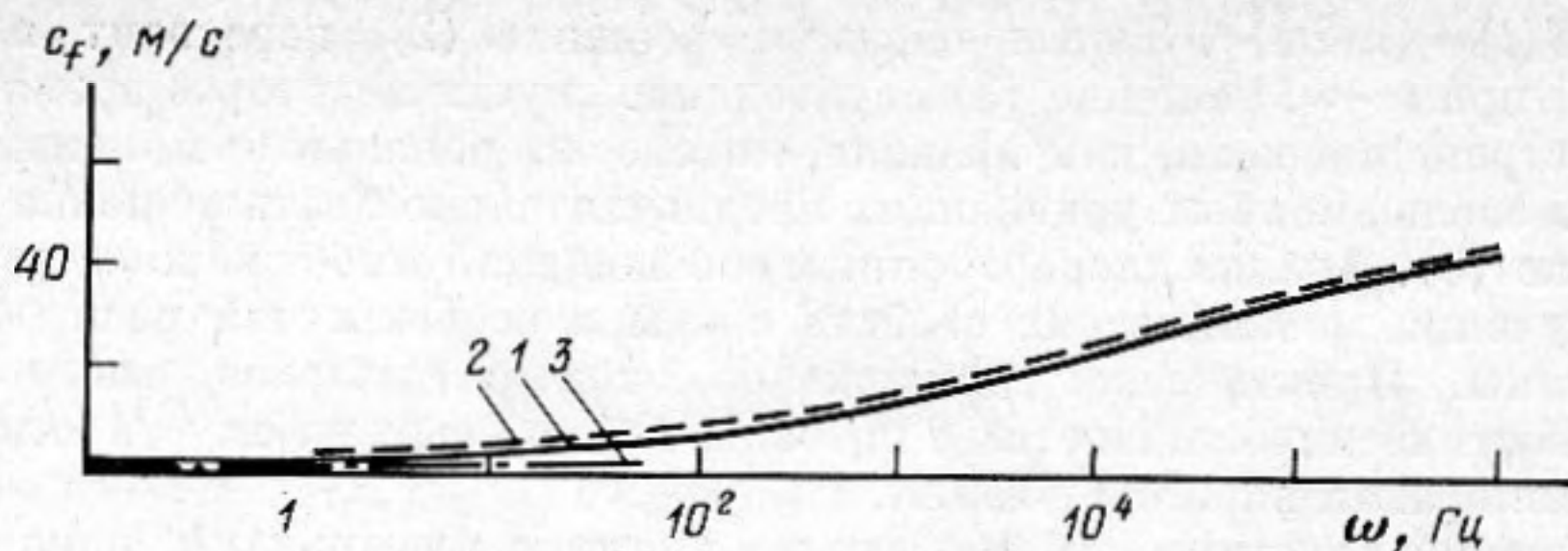
Из соотношения (5) нетрудно определить коэффициент поглощения волны  $\alpha = \text{Im} [k(\omega)]$ . Пренебрегая инерцией присоединенной массы пузырьков, получим

$$\alpha = \frac{m\sqrt{\omega}}{2c_3\sqrt{\tau_1}} \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{2\omega\tau_1}} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{\omega\tau_1}} + \frac{m^2}{\omega\tau_1} \right)^{1/2} \right]^{-1/2}. \quad (7)$$

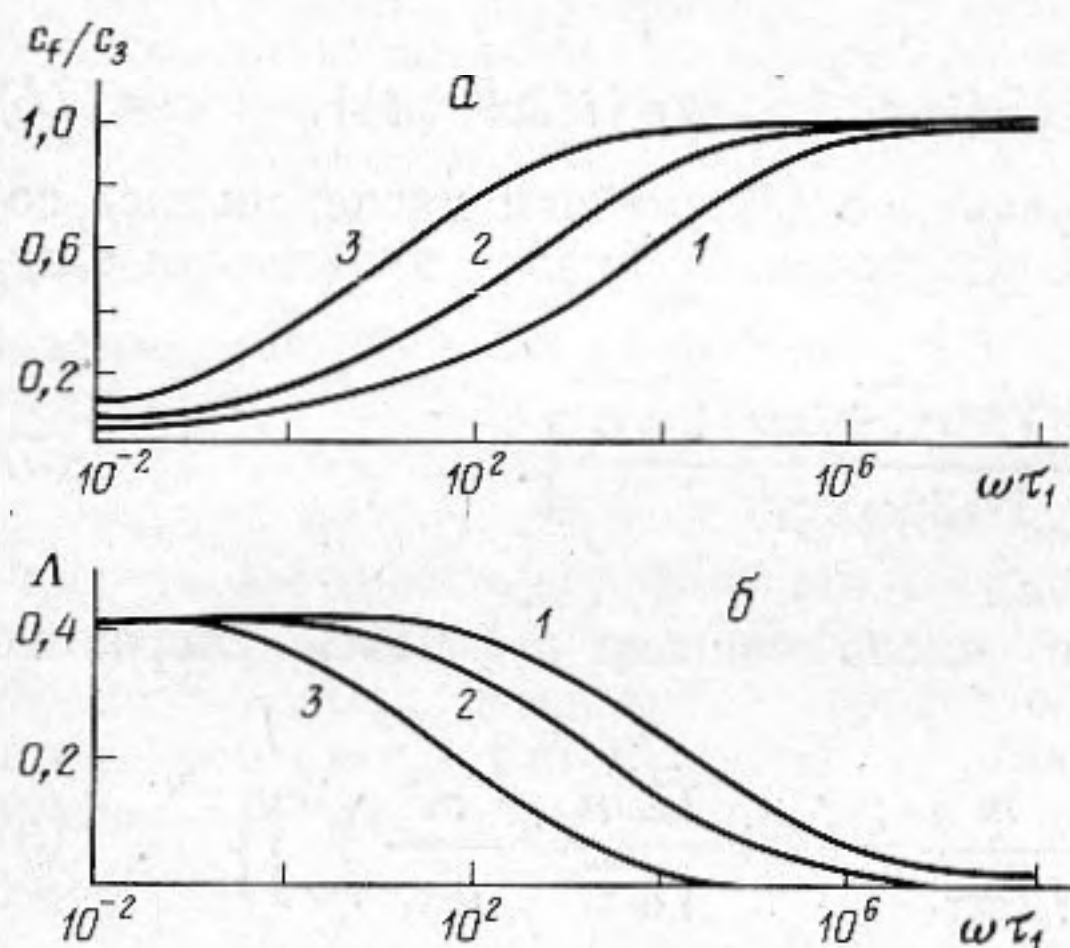
Выражение для логарифмического декремента затухания волны  $\Lambda = 2\pi\alpha c_f / \omega$  запишется в виде

$$\Lambda = \frac{\pi m}{\sqrt{\omega\tau_1}/2} \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{2\omega\tau_1}} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{\omega\tau_1}} + \frac{m^2}{\omega\tau_1} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (8)$$

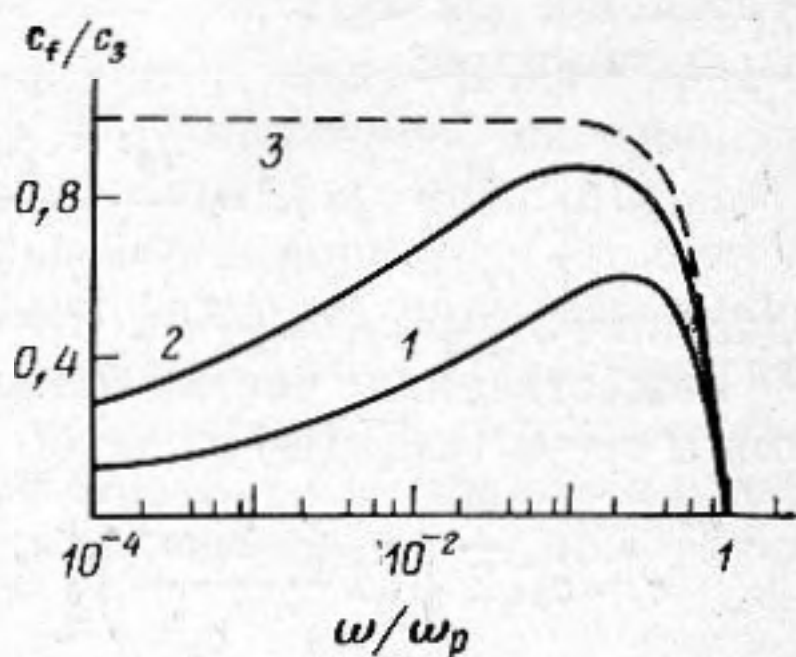
Анализ соотношений (6) — (8) показывает, что на величину фазовой скорости и поглощения волны большое влияние помимо структуры среды и ее температуропроводности оказывает термическое сопротивление жидкости. С уменьшением  $m$  значения  $\alpha$  и  $\Lambda$  уменьшаются, а  $c_f$  возрастает. При  $m = 0$ ,  $c_f = c_3$ ,  $\alpha = \Lambda = 0$ . На фиг. 2 приведены результаты расчета зависимостей (6) ( $\beta = 0$ ) и (8). При  $m \sim 10$  скорость протекания процесса межфазного теплообмена настолько мала, что для частот больших 10 Гц отклонение фазовой скорости волны от высокочастотного предела  $c_3$  не более 15%. Напротив, повышение  $m$  приводит к сильной низкочастотной диспер-



Фиг. 1. Сравнение дисперсионного соотношения (6) ( $\beta=0$ ) — 1 с численным расчетом [2] — 2. Пароводяная среда,  $p_0=10^5$  Па,  $T_0=373$  К,  $R_0=0,25$  мм,  $\varphi_0=0,01$ , 3 — расчет по формуле (16)



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Фазовая скорость — а и декремент затухания — б акустических волн в среде с фазовым переходом жидкость — пар. Вода: 1 —  $p_0=10^5$  Па,  $m=320$ ; 2 —  $p_0=5 \cdot 10^5$  Па,  $m=96$ ; 3 —  $p_0=80 \cdot 10^5$  Па;  $m=18$

Фиг. 3. Дисперсия скорости звука в пузырьковой парожидкостной среде. Вода: 1 —  $p_0=10^5$  Па, 2 —  $p_0=5 \cdot 10^5$  Па; 3 — газожидкостная среда ( $m=0$ )

сии скорости звука и поглощению волны. Так, скорость распространения волны с частотой  $10^3$  Гц в кипящем жидком натрии ( $p_0=1,5 \cdot 10^5$  Па,  $R_0=10^{-3}$  м,  $m=269$ ,  $\tau_1=0,02$  с)  $c_f=0,2 c_3$ , при этом ее декремент затухания составляет значительную величину  $\Lambda=0,4$ .

Учет инерционных свойств паровых включений и возникающей в результате этого дисперсии приводит, так же как и для суспензии газовых пузырьков в жидкости, к появлению резонансной особенности. При  $\omega=\omega_p=c_3/\sqrt{2\beta}$  возбудить акустическую волну в смеси невозможно. На фиг. 3 приведены дисперсионные кривые, отвечающие соотношению (6) при  $\beta \neq 0$ , пунктиром показана соответствующая зависимость для среды без фазового перехода. Вблизи резонансной частоты  $\omega_p$  поведение кривых совпадает, а существенное различие, которое усиливается с ростом  $m$ , наблюдается при  $\omega < \omega_p$ .

При выводе уравнения модели [1] не учитывалась сжимаемость жидкости. Поэтому уравнение (1) справедливо, во-первых, для волн, характерные частоты которых меньше  $\omega_p$ , и, во-вторых, для тех состояний парожидкостной среды, когда  $c_3 \ll c_1$  ( $c_1$  — скорость звука в чистой жидкости).

Обобщение модели [1] на случай сжимаемой жидкой фазы выполнить несложно, воспользовавшись методикой работы [3]. Сжимаемость жидкости учитывается при переходе от уравнений для объема газа в смеси  $V$  к плотности смеси  $\rho$  по формуле

$$p\varphi_0 \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1-\varphi_0)^2}{c_1^2} \Delta p - \Delta \rho. \quad (9)$$

Уравнения Рэлея для объема газа в смеси [1]

$$\Delta p = \Delta p_2 - \frac{\rho_1 R_0^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\Delta V}{V_0} \right)$$

преобразуется с учетом равенства (9) к виду

$$\Delta p_2 = \Delta p + \frac{R_0^2}{3\varphi_0} \left( \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \quad (10)$$

а уравнение энергии для пузырька пара

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{(\gamma p_2)}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{3\gamma p_2}{R\rho_2 L} q_1,$$

записывается с учетом соотношения (10) следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2\beta \left( \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} \right) + \frac{c_3^2}{c_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + c_3^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{3\gamma p_0}{R\rho_2 L} q_1. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) совместно с уравнением движения для смеси  $\partial^2 p / \partial x^2 = \partial^2 \rho / \partial t^2$ , следующим из линейных уравнений гомогенной модели пузырьковой суспензии [1], сводятся к виду

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2\beta\kappa}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = - \frac{3\gamma p_0 \kappa}{R_0 \rho_2 L} \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\kappa = (1 + c_3^2 / c_1^2)^{-1}, \quad c_0^2 = \kappa c_3^2.$$

Уравнение типа (12) при  $q_1 = 0$  впервые было получено в работе [3] для исследования распространения волн с крутыми фронтами в жидкости с пузырьками газа.

Учет акустических потерь при колебании паровых пузырьков, вклад которых в общее затухание увеличивается с ростом начального давления, в рамках развитого подхода сделать несложно. В этом случае в уравнение (12) добавится дополнительное слагаемое

$$\frac{2\eta_{эф}\kappa}{c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right). \quad (13)$$

Здесь  $\eta_{эф} = \eta_R + \eta_v$  — эффективная вязкость смеси,  $\eta_R = \gamma R_0 c_0^2 / 2c_1$ ,  $\eta_v = 2\nu_1 / 3\varphi_0$ ,  $\nu_1$  — вязкость жидкости.

Подставляя тепловой поток  $q_1$  в виде (4) в уравнение (12), найдем дисперсионное соотношение, отвечающее этому уравнению с учетом слагаемого (13):

$$k^2 = \omega^2 \left[ \frac{1}{c_1^2} + \frac{1 + b_F \sqrt{\omega_p / \omega} + i b_\eta \sqrt{\omega_p / \omega}}{c_3^2 (1 - \omega^2 / \omega_p^2 - i b_\eta \omega / \omega_p)} \right]. \quad (14)$$

Здесь  $b_F = m / R_0 \sqrt{2\omega_p / a_1}$ ,  $b_\eta = 4\nu_1 / \omega_p R_0^2 + R_0 \omega_p / c_1$ .

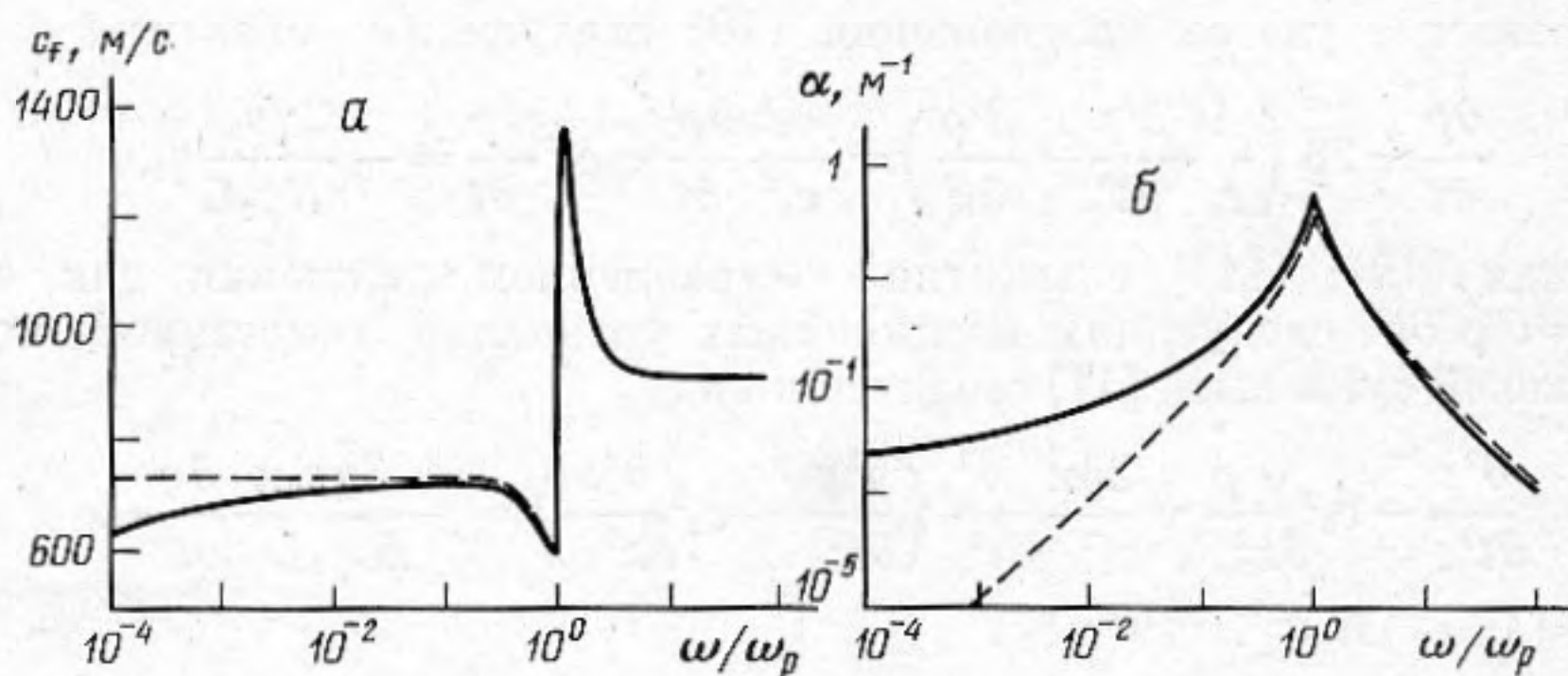
На фиг. 4, а представлен график функции  $c_f = c_f(\omega)$ , а на фиг. 4, б — зависимость  $\alpha = \alpha(\omega)$ , следующие из закона дисперсии (14). Пунктиром показаны соответствующие зависимости для «холодной» пузырьковой смеси ( $m = 0$ ). Из анализа результатов расчета следует, что фазовый переход жидкость — пар не влияет на скорость распространения звука резонансных частот, однако его затухание существенно зависит от интенсивности этого перехода. При  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $c_f \rightarrow c_1$ , как и предсказывает теория рассеивания [4]. В области резонанса разница коэффициентов затухания волны с учетом фазового перехода и без него невелика по сравнению с дорезонансной областью. Этот результат позволяет указать на принципиальную возможность использования резонансных методов диагностики газовых пузырьков для парожидкостных потоков.

Обратимся к низкочастотной асимптотике дисперсионной кривой  $c_f = c_f(\omega)$ . При  $\omega \rightarrow 0$   $c_f \rightarrow 0$ . Это обстоятельство является следствием определенного дефекта моделей [1, 2]. Дело в том, что приближения, заложен-

ные в этих моделях, справедливы в случае, когда характерная длина тепловой волны  $\delta_T = 2\pi(2a_1/\omega)^{1/2}$  много меньше расстояний между пузырьками  $l_R$ . В случае равномерного кубического распределения пузырьков в объеме жидкости  $l_R = 2R_0[(\pi/6\varphi_0)^{1/3} - 1]$ . Оценка частот волн, для которых справедлив подход [1], приводит к неравенству:  $f_n > 4\pi a_1/R_0^2[(\pi/6\varphi_0)^{1/3} - 1]$ .

Распространение волн в приближении, когда длина акустической и тепловой волн одного порядка и условие гомогенности выполняется, рассмотрено в работе [5]. В этом случае тепловой поток  $q_1$  рассчитывается в квазистационарном приближении:  $q_1 = \lambda_1 \Delta T/R_0$ , а эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_e^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} + \frac{R_0^2}{3\varphi_0} \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (15)$$



Фиг. 4. Дисперсионные зависимости с учетом сжимаемости жидкости и инерционных эффектов. Вода:  $p_0 = 86 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 573$  К,  $\varphi_0 = 0,01$ ,  $R_0 = 1$  мм

Здесь  $c_e = L\mu p_0/V\rho_1 T_0 (c_p T_0)^{1/2}$  — скорость звука, определяемая согласно равновесному подходу [6]. Дисперсионное соотношение для волн, следующее из уравнения (15), записывается в виде

$$k^2 = \omega^2 / (c_e^2 + (R_0^2/3\varphi_0)\omega^2 - ia_1\omega).$$

Откуда находим фазовую скорость

$$c_f = c_e + \frac{R_0^2}{3\varphi_0 c_e} \omega^2 - \frac{3a_1^2}{8c_e^3} \omega^2 \quad (16)$$

и коэффициент затухания:  $\alpha = a_1 \omega^2 / 2c_e^2$ . Зависимость  $c_f = c_f(\omega)$  (16) приведена на фиг. 1. В асимптотическом случае при  $\omega \rightarrow 0$   $c_f$  стремится к равновесной скорости звука  $c_e$ .

В заключение отметим, что рассмотренные два приближения распространения акустических волн [1, 5] соответствуют при отсутствии инерционных эффектов и сжимаемости жидкости моделям, рассмотренным в работе [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Модель распространения возмущений в парожидкостной смеси. — ТВТ, 1979, т. 17, № 4, с. 798–803.
2. Ardron K. H., Duffey R. V. Acoustic wave propagation in a flowing liquid-vapour mixtures. Int. — J. Multiphase Flow, 1978, v. 4, № 3, p. 303–322.
3. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Двухволновая модель распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. — ПМТФ, 1979, № 6, с. 119–126.
4. Trammell G. T. Sound Waves in Water Containing Vapor Bubbles. — J. Appl. Phys., 1962, v. 33, № 5, p. 1662–1670.
5. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси. — В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, Ин-т теплофиз. СО АН СССР, 1974, с. 161–166.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
7. Богуславский Ю. Я. О поглощении и дисперсии звуковых волн в двухфазной среде. — Акуст. журн., 1978, т. 24, № 1, с. 46–52.

Институт теплофизики  
Сибирского отделения  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
27.IV.1983