АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 6

УДК 534.222

КВАЗИПЛОСКИЙ ПУЧОК НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ

Потапов А. И., Солдатов И. Н.

Выведены двумерные уравнения продольных колебаний пластины с учетом геометрической и физической нелинейностей. В случае распространения слаборасходящегося пучка эти уравнения сводятся к уравнению Кадомцева – Петвиашвили. Показано, что в пластинах могут распространяться двумерные солитоны.

В акустодиагностике для определения напряжений в пластине часто используются нормальные волны Лэмба [1]. При этом пренебрегается нелинейным самовоздействием волны и ее дифракционной расходимостью. В рамках трехмерной нелинейной теории упругости рассмотрение этих вопросов очень сложно. Однако в области безразмерных частот $\omega h c_t^{-1}<2$ (ω – циклическая частота, h – полутолщина пластины, c_t – скорость сдвиговой волны), широко используемой на практике, возможно применение приближенного подхода, базирующегося на так называемых «технических» теориях симметричных колебаний пластин. В этом случае система уравнений теории упругости заменяется более простой гиперболо-параболической системой, зависящей от двух переменных. В ряде случаев возможно ее дальнейшее упрощение, основанное на квазиоптическом приближении теории нелинейных волн. Ранее в работе [2] исследовались одномерные солитоны при распространении продольной волны в бесконечном стержне. В настоящей работе показано, что в пластине при распространении продольных волн с узким угловым спектром возможно образование двумерных солитонов, описываемых уравнением Кадомцева – Петвиашвили [3, 4].

Рассмотрим бесконечную нелинейную пластину толщиной $2h$ без начальных деформаций, поверхности которой свободны от нагрузок. При симметричных по толщине колебаниях пластины и невысоких частотах перемещения хорошо аппроксимируются следующим образом: $u_1(x,y,z,t)=u(x,y,t)$, $u_2(x,y,z,t)=v(x,y,t)$, $u_3(x,y,z,t)=zw(x,y,t)$, где перемещения $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ в средней плоскости вдоль осей x и y, соответственно. Компоненты тензора деформаций ε_{ij} имеют вид $\varepsilon_{11}=u_x+{}^1/_2(u_x^2+v_x^2+z^2w_x^2)$, $\varepsilon_{13}={}^1/_2z^2w_x+{}^1/_2zww_x$, $\varepsilon_{12}={}^1/_2(u_y+v_x+u_xu_y+v_xv_y+z^2w_xw_y)$, $\varepsilon_{33}=kw+{}^1/_2w^2$, $\varepsilon_{22}=v_y+{}^1/_2(u_y^2+v_y^2+z^2w_y^2)$, $\varepsilon_{23}={}^1/_2zw_y+{}^1/_2zww_y$, где $k=\pi^2/12$ – поправочный коэффициент, который выбирается таким образом, чтобы частота первой моды по толщине была правильной несмотря на приближенное распределение перемещений [5]. Для вывода уравнений движения воспользуемся вариационным принципом [6, 7], в силу которого искомые уравнения получаются из условия экстремума функционала:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_{\Omega}\int_{-h}^{h}\left[U-\frac{1}{2}\rho(\dot u^2+\dot v^2+\dot w^2z^2)\right]dx\,dy\,dz.$$

Здесь Ω – область интегрирования по переменным x, y; U – внутренняя энергия единицы объема, которая задается в виде функции компонент тензора деформаций [8] $U=\dfrac{\lambda}{2}(\varepsilon_{jj})^2+\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}+\dfrac{\nu_1}{6}(\varepsilon_{jj})^3+\nu_2\varepsilon_{nn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}+\dfrac{4}{3}\nu_3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jn}\varepsilon_{ni}$. После ряда простых выкладок получим уравнения для смещений u и w:

$$\rho\ddot{u}=(\lambda+2\mu)u_{xx}+(\lambda+\mu)v_{xy}+\mu u_{yy}+\lambda k w_x+(3\lambda+6\mu+\nu_1+6\nu_2+$$
$$+8\nu_3)u_x u_{xx}+(\lambda+\mu)\left[v_x v_{xx}+\frac{2h^2}{3}w_x w_{xx}+\frac{\partial}{\partial x}(u_y^2)\right]+$$
$$+\lambda\left[2v_y v_{xy}+\frac{2h^2}{3}w_y w_{xy}+\frac{\partial}{\partial x}(v_y u_x)+\frac{2h^2}{3}w_x w_{xx}+\right.$$
$$\left.+ww_x+k\frac{\partial}{\partial x}(u_x w)+ku_{yy}w\right]+\mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(v_x v_y+\frac{h^2}{3}w_x w_y+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u_x v_x\right)+\frac{\partial}{\partial x}(u_y v_x)+2u_x u_{yy}\right]+(\nu_1+2\nu_2)\frac{\partial}{\partial x}\left[u_x(v_y+kw)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(v_y^2+kw^2)\right]+\left(\frac{\nu_2}{2}+\nu_3\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y^2+v_x^2+\frac{h^2}{3}w_x^2+\frac{h^2}{3}w_y^2\right)+\right. \tag{1}$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial y}[u_y(u_x+v_y+kw)]\right\}+(2\nu_2+2\nu_3)\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u_y v_x)+\frac{\partial}{\partial y}\times\right.$$
$$\left.\times[v_x(u_x+v_y+kw)]\right\}+\nu_1\frac{\partial}{\partial x}(kv_y w)-2\nu_3 k\frac{\partial}{\partial y}(v_x w),$$

$$\frac{h^2}{3}\rho\ddot{w}=-\lambda k(u_x+v_y)-(\lambda+2\mu)\left(k^2 w+\frac{3}{2}kw^2\right)+\mu\frac{h^2}{3}(w_{xx}+w_{yy})+$$
$$+(\lambda+2\mu)\frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(w_x u_y)\right]+\lambda\frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x v_y)+\frac{\partial}{\partial y}(w_y u_x)\right]+ \tag{2}$$
$$+\mu\frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_y u_y+w_y v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(w_x u_y+w_x v_x)+2\frac{\partial}{\partial x}(ww_x)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial y}(ww_y)-w_x^2-w_y^2\right]-\frac{\lambda}{2}\left[k\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2+\frac{h^2}{3}w_x^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h^2}{3}w_y^2\right)+2wu_x+2wv_y\right]+\left(\frac{\nu_1}{2}+3\nu_2+4\nu_3\right)k^2w^2-(\nu_1+2\nu_2)\times$$
$$\times\left[k^2 w(u_x+v_y)+\frac{k}{2}(u_x^2+v_y^2)\right]+\left(\frac{\nu_2}{2}+\nu_3\right)\frac{h^2}{3}\left\{2\frac{\partial}{\partial x}[w_x(u_x+v_y+kw)]+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial y}[w_y(u_x+v_y+kw)]-\frac{3k}{h^2}(u_y^2+v_x^2)-kw_x^2-kw_y^2-2\nu_2 k u_y v_x-\nu_1 u_x v_y.\right.$$

Уравнение для v получается из уравнения (1) заменой u на v, v на u и x на y, y на x. Уравнения (1) и (2) без нелинейных членов представляют хорошо известные уравнения уточненной теории продольных колебаний тонких пластин [5], являющиеся трехмодовой аппроксимацией симметричных волновых движений в слое.

Рассмотрим далее частный вид волновых движений, описываемых уравнениями (1)–(2), а именно рассмотрим распространение пучка продольных волн. Будем предполагать его ограниченным, слаборасходящимся и близким к плоской волне. Ясно, что для квазиплоского пучка величины перемещений будут разной степени малости. Исходя из этого, ищем решение задачи в виде следующих асимптотических разложений по малому параметру $\varepsilon=A|\nu_1+6\nu_2-8\nu_3+3\lambda+6\mu|/(\lambda+2\mu)l$ (A – амплитуда колебаний, l – длина волны)

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\ldots,\quad v=\sqrt{\varepsilon}v_1+\varepsilon^{3/2}v_2+\ldots,\quad w=w_0+\varepsilon w_1+\ldots \tag{3}$$

Перейдем к новым независимым переменным, отражающим разные масштабы изменения параметров пучка вдоль осей x и y:

$$\xi=x-ct,\quad \eta=\sqrt{\varepsilon}y,\quad \psi=\varepsilon x. \tag{4}$$

Выбор переменных (4) связан с тем физическим фактом, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционирует в продольном (x) и поперечном (y) направлениях из-за нелинейности, дифракционной расходимости и дисперсии. Уравнения (1)–(2) содержат два малых параметра: ε, характеризующий нелинейность волнового процесса, и $\sigma=h^2(\lambda+\mu)/3l^2(\lambda+2\mu)$, определяющий дисперсию, вызванную движениями нормальными к срединной плоскости пластины. Здесь величина σ оценена из связи между нормальным перемещением w и перемещениями u и v в модели обобщенного плоского напряженного состояния [5]. Рассмотрим случай, когда эти параметры одного порядка и эффекты нелинейности и дисперсии могут компенсировать друг друга. Подставим (3) в (1)–(2) и в нулевом приближении по ε получим

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi}=(\lambda+2\mu)u_{0\xi\xi}+\lambda k w_{0\xi}, \quad \lambda(u_{0\xi}+kw_0)+2\mu k w_0=0. \tag{5а}$$

Отсюда находим связь между продольной и нормальной деформациями

$$w_0=-\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)k}u_{0\xi}, \tag{5б}$$

которая аналогична поправке Лява в теории продольных колебаний стержней [5]. Подставим (5б) в (5а) и получим, как следствие, выражение для скорости продольной волны в пластине: $c=\sqrt{\left(\lambda+2\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)\Big/\rho}$. Дальнейшее приравнивание к нулю членов со степенями ε и $\varepsilon^{1/2}$ дает систему трех уравнений:

$$2(\lambda+2\mu)u_{0\xi\chi}+(\lambda+\mu)v_{1\xi\eta}+\mu u_{0\eta\eta}+\lambda k w_{0\chi}+$$
$$+(3\lambda+6\mu+\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)\varepsilon^{-1}u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\lambda k w_{1\xi}-\rho c^2 u_{1\xi\xi}+(\lambda+2\mu)u_{1\xi\xi}=0, \tag{6}$$

$$\rho c^2 v_{1\xi\xi}=(\lambda+\mu)u_{0\xi\eta}+\mu v_{1\xi\xi}+\lambda k w_{0\eta}, \tag{7}$$

$$^1/_3\rho c^2 h^2\varepsilon^{-1}w_{0\xi\xi}=-\lambda k(u_{0\chi}+v_{1\eta})+{}^1/_3\mu h^2\varepsilon^{-1}w_{0\xi\xi}-$$
$$-{}^1/_2[\lambda+2\mu+k^2(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)]\varepsilon^{-1}kw_0^2-(\nu_1+2\nu_2)\varepsilon^{-1}(k^2u_{0\xi}w_0+$$
$$+{}^1/_2ku_{0\xi}^2)-{}^1/_2\lambda\varepsilon^{-1}(ku_{0\xi}^2+2w_0u_{0\xi})-\lambda k(u_{1\xi}+kw_1)-2\mu k^2w_1. \tag{8}$$

Воспользовавшись соотношениями (5б), из уравнения (7) после интегрирования по ξ получим связь между сдвиговыми деформациями в пучке $v_{1\xi}=u_{0\eta}$. Подставим последнее соотношение и (5б) в уравнение (8), которое затем дифференцируем по ξ:

$$\lambda k u_{1\xi}+k^2(\lambda+2\mu)w_{1\xi}=-{}^1/_3\lambda h^2(\rho c^2-\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}u_{0\xi\xi\xi\xi}-$$
$$-\lambda k u_{0\xi\chi}-\lambda k u_{0\eta\eta}-[\lambda k^2(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)+\lambda^2+2\lambda\mu-$$
$$-(\lambda+k\nu_1+2k\nu_2)(\lambda-2\mu)](\lambda+2\mu)^{-1}\varepsilon^{-1}u_{0\xi}u_{0\xi\xi}. \tag{9}$$

Заметим, что последние три слагаемых уравнения (6) равны левой части уравнения (9), умноженной на $\lambda/(\lambda+2\mu)k$. Приравнивая соответствующие слагаемые в (6) и (9) и вводя обозначение $u_{0\xi}=\psi$, придем к уравнению Кадомцева – Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\chi+\alpha\psi\psi_\xi-\beta\psi_{\xi\xi\xi})=-\gamma\psi_{\eta\eta}, \tag{10}$$

где

$$\alpha=\{(3\lambda+6\mu+\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)-\lambda[\lambda k^2(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)+\lambda^2+$$
$$+2\lambda\mu-(\lambda+\nu_1k+2k\nu_2)(\lambda-2\mu)](\lambda+2\mu)^{-2}k^{-1}\}/\varepsilon\rho a;$$
$$\beta={}^1/_3\lambda h^2(c^2-c_t^2)/c_l^2\varepsilon\rho k a; \quad \gamma=c^2/a; \quad a=c_l^2+c^2;$$
$$c_l^2=(\lambda+2\mu)/\rho; \quad c_t^2=\mu/\rho; \quad c^2=c_l^2-\lambda^2/(\lambda+2\mu)\rho.$$

Для волновых движений в пластине $0<\gamma<0{,}5$, $\beta>0$, следовательно, уравнение (10) допускает частные решения в виде локализованных двумерных образований – алгебраических солитонов [3, 4]. Полярность этих солитонов определяется знаком коэффициента нелинейности α. Для таких материалов как медь, вольфрам, некоторые виды сталей $\alpha<0$ [8, 9], и солитоны имеют положительную полярность; а для оргстекла, плавленого кварца $\alpha>0$, и солитоны имеют противоположную полярность. Заметим, что второе слагаемое у коэффициентов α и c^2 связано с толщинными колебаниями пластины. Если пренебречь этими движениями, то придем к случаю распространения пучка в безграничной нелинейно-упругой недиссипативной среде:

$$\frac{\partial}{\partial_\xi}\left[\psi_\tau+\left(\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{\nu_1+6\nu_2+8\nu_3}{2(\lambda+2\mu)\varepsilon}\right)\psi\psi_\xi\right]=-\frac{1}{2}\psi_{\eta\eta}. \qquad (11)$$

Из сравнения формул (10) и (11) видно, что в случае пластинки влияние граничных условий сказывается не только на том, что в уравнении (10) появляется член $\psi_{\xi\xi\xi}$, ответственный за дисперсию, но и на величину коэффициентов нелинейности и дифракционной расходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976.
2. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные упругие волны в стержнях.– ПММ, 1977, вып. 3, т. 41, с. 531–537.
3. *Петвиашвили В. И.* Неодномерные солитоны.– В кн.: Нелинейные волны / Под ред. Гапонова-Грехова А. В. М.: Наука, 1979, с. 5–19.
4. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. Новикова С. П. М.: Наука, 1980.
5. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.– В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973.
6. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы.– ПММ, 1968, вып. 5, т. 32, с. 771–785.
7. *Бердичевский В. Л.* К динамической теории тонких упругих пластин.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6, с. 99–109.
8. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
9. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
20.V.1983