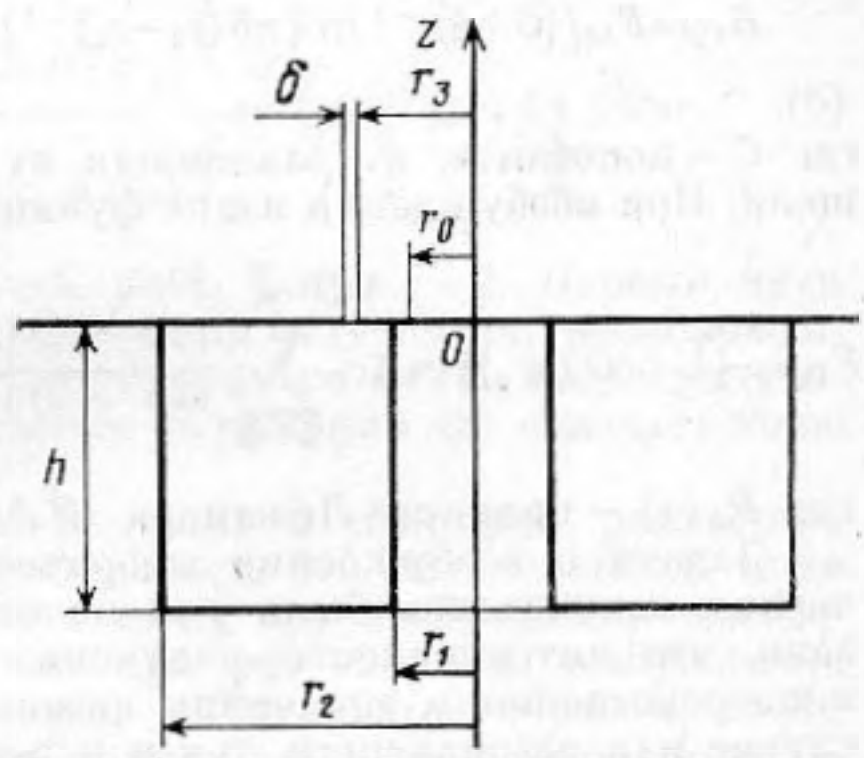
УДК 534.232

АНАЛИЗ ПОЛЯ ИЗЛУЧАТЕЛЯ, НАГРУЖЕННОГО НА ПОЛЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Иванов В. П.

В рамках линейной постановки исследуем задачу увеличения интенсивности поля излучения излучателя малых волновых размеров с помощью резонатора Гельмгольца. На примере возбуждения полого цилиндрического резонатора, связанного узкой кольцевой щелью с полупространством, ограниченным абсолютно жесткой плоскостью, выясним, как нужно возбуждать поле вне или внутри резонатора, чтобы интенсивность излучения была максимальна.

В трехмерном полупространстве $z<0$ расположим полый цилиндр с абсолютно жесткими стенками внутреннего радиуса r_1, наружного радиуса r_2 и высоты h, который примкнут к абсолютно жесткой плоскости $z=0$. Внутренность цилиндра связана с верхним полупространством узкой кольцевой щелью $S: r_3 \leqslant r \leqslant r_3+\delta$, $r_1<r_3<r_2-\delta$, прорезанной в плоскости $z=0$ (фигура). Исследуем поле излучения излучателя, нагруженного на два типа полых цилиндрических резонаторов, наиболее приемлемых с точки зрения реализации: узкого протяженного полого цилиндрического резонатора при значении параметров $kr_2<1$, $kh\simeq\pi$, $k=\omega/c$ – волновое число и широкого короткого резонатора, когда $kr_2>1$, $kh<1$. Поле возбуждается колебаниями гибкой мембраны, расположенной вне резонатора или на его внутренних стенках.



Рассмотрим сначала случай, когда излучатель расположен вне резонатора и представляет собой круглую мембрану S_0 радиуса $r_0 \leqslant r_1$ с центром в начале координат, расположенную в плоскости $z=0$. Предполагается, что $kr_0 \ll 1$. Будем возбуждать симметричное поле, т. е. распределение нормальной скорости на мембране определим по формуле $\partial U_{j1}/\partial n|_{S_0}=f_0=A \sin k(r_0-r)$, $j=1, 2$, где U_{11} – потенциал поля скоростей в случае возбуждения узкого протяженного резонатора, U_{21} – потенциал поля для случая широкого короткого резонатора. Эти потенциалы внутри полого цилиндра и в полупространстве $z>0$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)U_{j1}=0$, краевому условию $\partial U_{j1}/\partial n=0$ на жестких стенках, условию погашаемости Малюжинца на бесконечности и условию Майкснера на острых кромках. Из формулы Грина следует, что потенциал U_{j1} в полупространстве $z>0$ определяется выражением

$$U_{j1}=\int\limits_{S_0} f_0 G_1\, ds+\int\limits_{S} \partial U_{j1}/\partial n\, G_1 ds, \quad j=1, 2, \tag{1}$$

где G_1 – функция Грина для полупространства $z>0$ с абсолютно жесткой границей, $\partial U_{j1}/\partial n$ – нормальная скорость поля излучения в горловине резонатора, $\partial/\partial n$ – производная по внутренней к области определения нормали. Функция $\partial U_{j1}/\partial n$, заданная на щели S, определяется из интегрального уравнения, которое выводится из требования непрерывности U_{j1} и $\partial U_{j1}/\partial n$ на щели S:

$$\int\limits_{S} (G_1+G_2)\,\partial U_{j1}/\partial z\, ds=-\int\limits_{S_0} f_0 G_1\, ds, \tag{2}$$

где G_2 – функция Грина внутренности полого жесткого цилиндра.

При возбуждении резонатора излучающей мембраной, расположенной на внутренней стенке резонатора, потенциалы поля скоростей U_{1q}, $q=2, 3$, в случае узкого протяженного резонатора и U_{22} в случае широкого короткого резонатора удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца внутри резонатора и в полупространстве $z>0$, условию $\partial U_{jq}/\partial n=0$ на жестких стенках, условию погашаемости на бесконечности, условию Майкснера на острых кромках, а также следующим условиям: $\partial U_{12}/\partial n|_{S_{12}}=A$, где S_{12} – нижняя торцевая поверхность полого цилиндра, на волновые размеры которого наложено условие $kr_2 \ll 1$; $\partial U_{13}/\partial n|_{S_{13}}=A$, где S_{13} – внутренняя цилиндрическая поверхность резонатора радиуса r_1, причем $kr_1 \ll 1$; $\partial U_{22}/\partial n|_{S_{22}}=A$, где $S_{22}=S_{13}$ – цилиндрическая поверхность радиуса r_1, A – постоянная амплитуда колебаний соответствующей поверхности. Поле излучения в полупространстве $z>0$ при возбуждении резонатора изнутри определяется выражением

$$U_{jq}=\int\limits_{S} \partial U_{jq}/\partial n G_1\, ds, \quad \begin{array}{ll} \text{при} & j=1, \quad q=2, 3; \\ \text{при} & j=2, \quad q=2. \end{array} \tag{3}$$

В случае возбуждения резонатора изнутри функция $\partial U_{jq}/\partial n$, заданная на щели S, является решением следующего интегрального уравнения:

$$\int\limits_{S} (G_1+G_2)\,\partial U_{jq}/\partial z\, ds = \int\limits_{S_{jq}} AG_2\, ds, \tag{4}$$

которое отличается от интегрального уравнения (2) характером поведения правой части. Функции G_1 и G_2 легко построить из фундаментального решения уравнения Гельмгольца $(4\pi R)^{-1}\exp(ikR)$: первую – методом отражений, вторую – методом разделения переменных. Исходя из условия Майкснера, будем искать приближенное решение интегральных уравнений (2), (4) в виде $\partial U_{jq}/\partial n = B_{jq}[(r-r_3)(r_3+\delta-r)]^{-1/2}$.

Оценим величину амплитуды B_{jq} нормальной скорости в горловине резонатора для указанных выше пяти случаев возбуждения поля.

В случае возбуждения узкого протяженного резонатора извне и изнутри амплитуда нормальной скорости B_{1q} при дополнительном условии, что $\varkappa = r_1(r_2-r_1)^{-1}$ – целое число, с точностью до $O(\delta r_3^{-1})$ при $\delta r_3^{-1}\to 0$ равна

$$B_{1q} = F_{1q}/\{C+4\varkappa^{-1}\ln[\pi\delta(r_2-r_1)^{-1}]+\ln(2\delta r_3^{-1})-2\pi r_3\cos kh[k(r_2^2-r_1^2)\sin kh]^{-1}\} \tag{5}$$

где C – константа, не зависящая от резонансных параметров задачи и размеров щели. При возбуждении извне функция F_{11} вычисляется по формуле

$$F_{11} = [1+O(kr_0)]\, i\pi A r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)(2n+{}^3/_2)}{(2n+2)(2n+3)} P_{2n}^2(0)\left(\frac{r_0}{r_3}\right)^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{2n+\frac{1}{2}}(kr_3)\, j_{2n+\frac{3}{2}}(kr_0),$$

где $P_n(x)$ – полином Лежандра, $H_n^1(x)$, $j_n(x)$ – функция Ханкеля и Бесселя.

Задача о возбуждении сферического резонатора Гельмгольца внешним сферическим излучателем была решена импедансным методом в [1]. В этой работе показано, что интенсивность излучения максимальна, когда излучатель располагается непосредственно у горловины резонатора. Анализ формулы (5) показывает, что в случае как резонансного, так и нерезонансного возбуждения извне модуль амплитуды нормальной скорости колебаний на щели как функция F_{11} максимален, когда $r_0=r_1\to r_3$, т. е. когда мембрана примыкает к горловине резонатора (при этом на горловине должна сохраниться острая кромка). Если волновое число k лежит вдали от резонансного значения полого резонатора, то излучение из горловины мало, поскольку в этом случае амплитуда нормальной скорости B_{11} обратно пропорциональна большой по модулю величине $|\ln(2\delta r_3^{-1})+4\varkappa^{-1}\ln[\pi\delta(r_2-r_1)^{-1}]|$. В случае резонансного возбуждения продольных мод колебаний эту величину можно скомпенсировать слагаемым, пропорциональным $(\sin kh)^{-1}$ при $kh\to\pi$, положив

$$4\varkappa^{-1}\ln[\pi\delta(r_2-r_1)^{-1}]+\ln(2\delta r_3^{-1})-2\pi r_3\cos kh[k(r_2^2-r_1^2)\sin kh]^{-1}=0. \tag{6}$$

При этом знаменатель выражения (5) по порядку будет равен $O(kr_3)$ при $kr_3\to 0$, а амплитуда B_{11} при $kr_0\ll 1$, $r_3\simeq r_0$ будет равна $O(1)$ при $kr_3\to 0$, $\delta r_3^{-1}\to 0$.

Рассмотрим случай, когда излучатель расположен внутри резонатора на нижней торцевой стенке. В этом случае функция F_{12} пропорциональна величине $F_{12}=Ar_0(kr_0\sin kh)^{-1}$ при $kh\to\pi$, причем параметр kh определяется из условия (6), а амплитуда B_{12} по порядку равна при $kr_3\to 0$

$$B_{12}=O[(kr_3)^{-1}]O[(kr_0)^{-1}]\times$$
$$\times[k(r_2^2-r_1^2)(2\pi r_3)^{-1}|4\varkappa^{-1}\ln[\pi\delta(r_2-r_1)^{-1}]+\ln(2\delta r_3^{-1})|].$$

Пусть в узком резонаторе возбуждение поля осуществляется колебаниями цилиндрической стенки радиуса r_1. В этом случае функция F_{13} равна $F_{13}=Ar_0O(1)$ при $kr_1\to 0$, $r_1\simeq r_0$, а амплитуда B_{13} оценивается выражением $B_{13}=O[(kr_3)^{-1}]$ при $kr_3\to 0$.

Рассмотрим возбуждение широкого короткого резонатора. При возбуждении поля излучающей мембраной радиуса r_0, расположенной вне резонатора, амплитуда B_{21} нормальной скорости в горловине с точностью до $O[kr_3^{-1}, \delta h^{-1}]$ при δr_3^{-1}, $\delta h^{-1}\to 0$ равна

$$B_{21}=F_{21}\Big/\left[C_1+2h^{-1}\ln(\pi\delta h^{-1})+(\pi r_3)^{-1}\ln(2\delta r_3^{-1})+\sum_{n=0}^{\infty}E_n(r_3,r_3)\right], \tag{7}$$

где C_1 – константа, не зависящая от резонансных параметров и размеров щели,

$$E_n(r,\rho)=i[j_0(\beta_n r)j_0(\beta_n\rho)H_0^{(1)\prime}(\beta_n r_2)H_0^{(1)\prime}(\beta_n r_1)-$$
$$-j_0'(\beta_n r_1)j_0(\beta_n\rho)H_0^{(1)}(\beta_n r)H_0^{(1)\prime}(\beta_n r_2)+$$
$$+j_0'(\beta_n r_1)j_0'(\beta_n r_2)H_0^{(1)}(\beta_n r)H_0^{(1)}(\beta_n\rho)-$$
$$-j_0(\beta_n r)j_0'(\beta_n r_1)H_0^{(1)\prime}(\beta_n r_2)H_0^{(1)}(\beta_n\rho)]D_n^{-1},$$

$$D_n=j_0'(\beta_n r_2)N_0'(\beta_n r_1)-j_0'(\beta_n r_1)N_0'(\beta_n r_2),$$

$$\beta_n=[k^2-(\pi nh^{-1})^2]^{1/2}.$$

$N_0(x)$ – функция Неймана. В случае нерезонансного возбуждения амплитуда B_{21} мала, так как велики по модулю слагаемые $\ln(\pi\delta h^{-1})$ и $\ln(2\delta r_3^{-1})$, стоящие в знаменателе выражения (7). При резонансном возбуждении радиальных мод колебаний извне, когда $D_0 \to 0$, а kr_3 не мало, знаменатель выражения (7) по порядку равен $O(1)$, амплитуда $B_{21} = O(kr_0)$ при $kr_0 \to 0$, поскольку нельзя сделать малой мнимую часть знаменателя, отвечающую ближней неволновой части поля излучения резонатора. Если kr_3 мало, то знаменатель выражения (7) при компенсации логарифмов резонансным слагаемым по порядку равен $O[(kr_3)^{-1}]$, амплитуда нормальной скорости $B_{21} \to 0(1)$ при $kr_0 \to 0$, $r_3 \simeq r_0$.

Рассмотрим случай, когда излучатель находится внутри широкого резонатора и представляет собой внутреннюю стенку цилиндра радиуса r_1, колеблющуюся с амплитудой A. В этом случае амплитуда нормальной скорости в горловине резонатора равна

$$B_{22} = Ar_1 O[(kr_1)^{-1}] O[(kr_3)^{-1}] \,|2r_3 h^{-1} \times \ln(\pi\delta h^{-1}) + \pi^{-1} \ln(2\delta r_3^{-1})| \quad \text{при} \quad kr_3 \to 0.$$

Старший член асимптотики поля излучения излучателя, нагруженного на резонатор Гельмгольца, в полупространстве $z>0$ при малых δr_3^{-1}, kr_3 согласно формулам (1), (3) имеет вид

$$U_{jq} = -\frac{i\pi A r_0 \delta_{1q} H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(kr)}{4(kr)^{\frac{1}{2}}} (kr_0)^{\frac{1}{2}} j_{\frac{3}{2}}(kr_0) - \frac{3i\pi^2 (kr_3)^{\frac{1}{2}} B_{jq}}{8(kr)^{\frac{1}{2}}} H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(kr)\, j_{\frac{1}{2}}(kr_3), \qquad (8)$$

$\delta_{11}=1$, $\delta_{1q}=0$ при $q \neq 1$, $j=1, 2$, $q=1, 2, 3$ при $j=1$, $q=1, 2$ при $j=2$. Первый член правовой части выражения (8) отвечает полю излучения излучателя, расположенного вне резонатора. Это слагаемое следует положить равным нулю, когда излучатель расположен внутри резонатора. Второе слагаемое выражения (8) отвечает полю излучения из горловины резонатора.

Приведенные оценки амплитуды нормальной скорости в горловине резонатора для разных схем возбуждения и формула (8) показывают, что интенсивность поля для случая резонансного возбуждения существенно выше при возбуждении излучателем, расположенным внутри резонатора. Далее при резонансном возбуждении излучатель внутри резонатора должен располагаться специальным образом, чтобы эффективно использовать не только резонанс колебаний объема, но и резонанс колебаний поверхности излучателя. Так для узкого протяженного резонатора излучатель малых волновых размеров должен располагаться на нижнем торце при $kh \to \pi$, для широкого короткого резонатора – на внутренней боковой поверхности цилиндра при $D_0 \to 0$.

В случае нерезонансного возбуждения схема возбуждения при расположении излучателя вне резонатора эффективнее второй схемы, когда излучатель расположен внутри резонатора, так как поле излучения из горловины резонатора мало по сравнению с полем излучателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976.

Отдел теоретических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24.IV.1987

УДК 53.085.5

ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ АКУСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Конюхов Б. А., Конюхова И. Д., Хилько А. И.

В настоящей работе рассмотрены результаты оценки пространственного распределения интенсивности шумового источника на основе измерения пространственно-временнóй корреляционной функции принимаемого акустического излучения в слоисто-неоднородной среде. Для решения поставленной задачи использован метод моментов [1], позволяющий на базе дискретной модели излучения свести исходное интегральное уравнение для корреляционной функции к системе линейных (алгебраических) уравнений вида $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} I_j = \gamma_i$, где I_j – неизвестная интенсивность j-го точечного источника, γ_i – значение пространственно-временной корреляционной функции сигнала, соответствующее i-му измерению, a_{ij} – матрица значений пространственно-временной корреляционной функции сигнала от точечного j-го источника, соответствующих i-му измерению. Матрицу системы линейных уравнений для неоднородной среды обычно определяют из экспериментальных данных по измерению пространственно-временной функции от пробных источников, помещаемых во все узлы дискретной модели. В практически интересном случае слоисто-неоднород-