АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 4

УДК 534.24

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В АКУСТИКЕ НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Богушевич А. Я., Красненко Н. П.

В приближении геометрической акустики рассматривается доплеровский сдвиг частоты звуковых колебаний, воспринимаемых приемником, находящимся в неоднородной движущейся среде. Показано, что при движении среды относительно наблюдателя обнаруживается поперечный эффект Доплера.

Известно, что эффект Доплера в акустике имеет принципиальные отличия от аналогичного явления для электромагнитных волн [1, 2]. Причиной этих отличий является существование в акустике абсолютной системы отсчета, связанной со средой распространения звуковых волн, относительно которой можно в отдельности рассматривать движение источника и приемника звука. При этом в акустике для случая неподвижного приемника и случая неподвижного источника получаются различные формулы для эффекта Доплера [1–6].

Движение реальных сред, в которых могут распространяться звуковые волны, очень часто не является однородным. Например, в атмосфере скорость ветра зависит как от пространственных координат, так и от времени. В этом случае не существует системы координат, неподвижной относительно всей области среды, влияющей на распространение звука. Возможна также ситуация, когда источник и приемник звука полностью увлекаются средой при ее движении и, следовательно, по отношению к ней являются неподвижными, и тем не менее вследствие их относительного движения наблюдается эффект Доплера. Поэтому представляет интерес рассмотреть эффект Доплера для случая распространения звука в неоднородной движущейся среде. При этом удобнее использовать систему координат, связанную с приемником, и таким образом считать его неподвижным.

Рассмотрим точечный источник звука, который движется относительно приемника с постоянной дозвуковой скоростью $\mathbf{v}$. Пусть он излучает гармонические колебания, длина волны которых мала по сравнению с характерными размерами неоднородностей среды, а их текущая фаза в движущейся системе координат K', связанной с ним, описывается функцией от времени $\Phi_и(t')=\omega_и t'+\Phi_0$. Положение источника звука в неподвижной системе координат K, центр которой совмещен с приемником, будем характеризовать переменным радиусом-вектором $\mathbf{R}(t)$.

Воспользуемся условием равенства фаз одной и той же волны в системах координат K и K' [2, с. 652]:

$$\Phi(\mathbf{r},\ t)=\Phi'(\mathbf{r}',\ t'), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}$, t и $\mathbf{r}'$, t' – координаты и время одного и того же события в системах K и K' соответственно, связанные в акустике между собой формулами преобразования Галилея. Очевидно, что волновое возмущение с некоторым значением фазы, образовавшееся в момент времени $t_и'$ в точке излучения звука, по причине конечности скорости его распространения достигнет точки $\mathbf{r}'$ за интервал времени $\tau'=t'-t_и'\neq 0$. Поэтому $\Phi'(\mathbf{r}',\ t')=$ $=\Phi_и(t'-\tau')$ и, следовательно, используя выражение для $\Phi_и(t')$, можно записать

$$\Phi'(\mathbf{r}',\ t')=\Phi_и(t')-\omega_и\tau'. \tag{2}$$

В то же время при преобразовании Галилея $t=t'$ и $\tau'=\tau$, где $\tau=t-t_и$. Вследствие этого из (1) и (2) следует:

$$\Phi(\mathbf{r}, t)=\Phi_и(t)-\omega_и\tau \tag{3}$$

Обозначим через $\Psi[\mathbf{R}(t_и), \mathbf{r}]$ эйконал звука, распространяющегося от точки излучения $\mathbf{R}(t_и)=\mathbf{R}(t-\tau)$ к точке $\mathbf{r}$. В приближении геометрической акустики $\tau=\Psi[\mathbf{R}(t_и), \mathbf{r}]/c_0$ и, следовательно, (3) преобразуется к виду

$$\Phi(\mathbf{r}, t)=\Phi_и(t)-k_и\Psi[\mathbf{R}(t_и), \mathbf{r}], \tag{4}$$

где $k_и=\omega_и/c_0$, $c_0=c(0)$, c — скорость звука в среде.

Частоту звуковых колебаний, регистрируемых приемником, определим из соотношения

$$f_п=(2\pi)^{-1}\partial\Phi(0, t)/\partial t. \tag{5}$$

Условия применимости (5) рассмотрены в [6] и в данной работе учтены при постановке задачи.

Подставляя (4) в (5) и полагая $\mathbf{r}=0$, получим:

$$f_п=f_и\{1-c_0^{-1}\partial\Psi[\mathbf{R}(t_и), 0]/\partial t\}, \tag{6}$$

где $f_и=\omega_и/(2\pi)$ — частота звуковых колебаний в системе координат K'.

Формула (6) содержит производную сложной функции $\partial\Psi(t_и)/\partial t=$ $=(\partial\Psi(t_и)/\partial t_и)/(\partial t/\partial t_и)$. Используя равенство $t=t_и+\tau=t_и+\Psi[\mathbf{R}(t_и), 0]/c_0$ для вычисления $\partial t/\partial t_и$, имеем

$$\partial\Psi(t_и)/\partial t=\Psi_t/(1+\Psi_t/c_0), \tag{7}$$

где индекс t обозначает дифференцирование по переменной $t_и$.

В результате после подстановки (7) в (6) получаем

$$f_п=f_и/(1+\Psi_t/c_0). \tag{8}$$

Значение эйконала, входящего в (8), в акустике неоднородной движущейся среды описывается выражением [7]:

$$\Psi[\mathbf{R}(t_и), 0]=\int\limits_{L[\mathbf{R}(t_и), 0]}\mu(\mathbf{r})\cos\eta(\mathbf{r})\,|d\mathbf{r}|, \tag{9}$$

где интегрирование проводится вдоль лучевой траектории $L[\mathbf{R}(t_и), 0]$ распространения звука из точки $\mathbf{R}(t_и)$ в точку 0, $\mu(\mathbf{r})=c_0/[c(\mathbf{r})+\mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot$ $\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})]$ — показатель преломления среды для звуковых волн, $\mathbf{V}$ — скорость движения среды, η — угол между нормалью к фазовому фронту волны $\mathbf{n}$ и единичным вектором $\mathbf{e}$, направленным по касательной к лучу.

Преобразуем (9) к виду, удобному для дифференцирования по переменной $t_и$. Пусть s — переменная длина дуги вдоль луча от 0 до текущей точки $\mathbf{r}$, а $S(t_и)$ — длина всего луча от 0 до $\mathbf{R}(t_и)$. При наличии поперечной к $\mathbf{e}(\mathbf{R})$ составляющей скорости $\mathbf{v}$ каждому моменту времени $t_и$ соответствует новая лучевая траектория $L(t_и)$, отличающаяся от предыдущей не только по ее длине $S(t_и)$, но и по координатам (x, y, z) ее точек с фиксированными значениями переменной s. Фактически это означает поворот траектории луча во времени относительно 0. Поэтому для точек на $L[\mathbf{R}(t_и), 0]$ приходим к двухпараметрическому представлению $\mathbf{r}(s, t_и)=\{x(s, t_и), y(s, t_и), z(s, t_и);\ 0\leqslant s\leqslant S(t_и)\}$, и, следовательно, (9) можно преобразовать к виду [8, с. 188–218]

$$\Psi[\mathbf{R}(t_и), 0]=\int\limits_0^{S(t_и)}\mu[\mathbf{r}(s, t_и)]\cos\eta[\mathbf{r}(s, t_и)]\,ds. \tag{10}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию в (10). Фазовая и групповая скорости звука в системе координат K равны соответственно $\mathbf{U}_ф=(c+$ $+\mathbf{Vn})\mathbf{n}$ и $\mathbf{U}_г=c\mathbf{n}+\mathbf{V}$, где $\mathbf{U}_г/U_г=\mathbf{e}$ [6]. Не трудно заметить, что $\cos\eta=$ $=U_ф/U_г$ (см. фиг.). Таким образом, $\mu\cos\eta=c_0/U_г$.

Вычисляя из (10) величину Ψ_t и подставляя ее в (8), с учетом последнего равенства получим

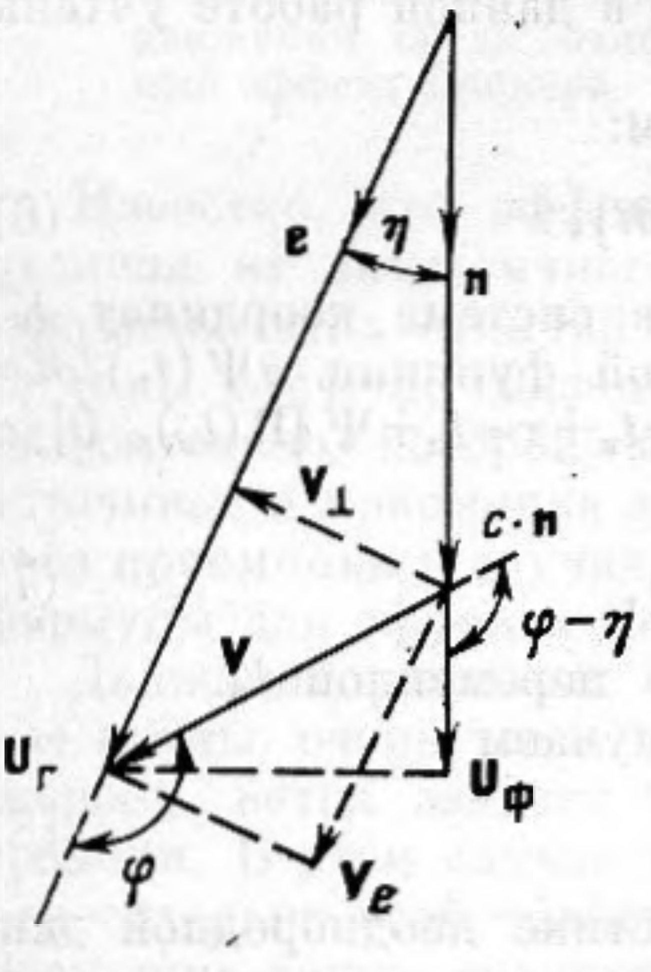
$$f_{п}=f_{и}/[1+S_t/U_{г}(\mathbf{R})+I], \qquad (11)$$

где

$$I=\int_{0}^{S(t_{и})}\frac{\partial U_{г}^{-1}[\mathbf{r}(s,t_{и})]}{\partial t_{и}}\,ds.$$

Переменная s отсчитывается в (10) навстречу направлению распространения звука $\mathbf{e}$. Поэтому, если $\mathbf{v}_e=[\mathbf{v}\mathbf{e}(\mathbf{R})]\,\mathbf{e}(\mathbf{R})$ — продольная относительно луча в точке компонента $\mathbf{v}$, то в (11) $S_t=-v_e$.

При $I=0$ формула (11) описывает продольный эффект Доплера, являющийся результатом изменения во времени длины трассы распространения звука S от источника до приемника. Известно [1], что этот эффект обуславливается продольной относительно направления распространения волны компонентой $\mathbf{v}$, равной $\mathbf{v}_e$. Однако в случае распространения звука в неоднородной движущейся среде величина I, как правило, не принимает нулевое значение. Во-первых, в такой среде возможно изменение во времени величин c и $\mathbf{V}$ и, следовательно, групповой скорости звука $U_{г}$, дифференцируемой в I. Во-вторых, ориентация нормали к фронту звуковой волны $\mathbf{n}$ зависит от направления ее распространения $\mathbf{e}$. При этом поворот луча за счет поперечной по отношению к нему компоненты $\mathbf{v}$, равной $\mathbf{v}_\perp=\mathbf{e}(\mathbf{R})\times(\mathbf{v}\times\mathbf{e}(\mathbf{R}))$, приводит даже при фиксированных значениях c и $\mathbf{V}$ к изменению во времени величины $U_{г}=\sqrt{c^2+2c\mathbf{V}\mathbf{n}+V^2}$. Обе причины, согласно (11) обуславливают отличие $f_{п}$ от $f_{и}$ при $S=\mathrm{const}$. При этом сдвиг частоты $\Delta f=f_{п}-f_{и}$ за счет изменения во времени параметров среды (c и $\mathbf{V}$) происходит независимо от значения относительной скорости движения источника и приемника $\mathbf{v}$, в том числе при $\mathbf{v}=0$. В то же время сдвиг частоты вследствие второго фактора определяется угловой скоростью поворота луча во времени и, следовательно, значением $\mathbf{v}_\perp$. Как известно [1, 2], изменение частоты, наблюдаемое при распространении волн перпендикулярно к направлению относительного движения источника и приемника и определяемое по величине скоростью этого движения, называется поперечным эффектом Доплера.



Геометрия фазовой $\mathbf{U}_{ф}$ и групповой $\mathbf{U}_{г}$ скоростей звука в движущейся среде относительно нормали к фронту волны $\mathbf{n}$

В стратифицированной (слоистой) среде, являющейся частным случаем неоднородной движущейся среды и используемой обычно в качестве модели атмосферы и океана, средние значения c и $\mathbf{V}$ зависят только от вертикальной координаты z. В этом важном для практики случае выражение для параметра I в (11) преобразуется к виду

$$I=\int_{0}^{z_{и}}\frac{\partial U_{г}^{-1}(z,t_{и})}{\partial t_{и}}\left|\frac{\partial s(z)}{\partial z}\right|dz, \qquad (12)$$

где $z_{и}$ — вертикальная координата источника звука, $|\partial s(z)/\partial z|=e_z^{-1}$ — якобиан преобразования, равный секансу угла между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{z}$, $e_z=(\mathbf{e}\mathbf{z})/z$ — проекция $\mathbf{e}$ на направление оси $\mathbf{z}$.

Для указанной модели среды $\mathbf{U}_{г}(z,t_{и})=c(z)\mathbf{n}(z,t_{и})+\mathbf{V}(z)$ и, следовательно, справедливы соотношения $\partial\mathbf{U}_{г}/\partial t_{и}=c\partial\mathbf{n}/\partial t_{и}$ и $\partial U_{г}/\partial t_{и}=(c/U_{г})\cdot(\mathbf{V}\partial\mathbf{n}/\partial t_{и})$. Поэтому

$$\partial U_{г}/\partial t_{и}=(\mathbf{V}\partial\mathbf{U}_{г}/\partial t_{и})/U_{г}. \qquad (13)$$

В то же время, используя представление $\mathbf{U}_г=U_г\mathbf{e}$, можно записать

$$\partial\mathbf{U}_г/\partial t_и=\mathbf{e}\partial U_г/\partial t_и+U_г\partial\mathbf{e}/\partial t_и. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\frac{\partial U_г}{\partial t_и}=\frac{U_г}{U_г-V_e}\left(\mathbf{V}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t_и}\right), \qquad (15)$$

где $U_г-V_e=c\cos\eta$, $\cos\eta=U_ф/U_г$ (см. фиг.).

Вследствие того что $\partial U_г^{-1}/qt_и=-U_г^{-2}\partial U_г/\partial t_и$, из (15) следует

$$\partial U_г^{-1}/\partial t_и=-(\mathbf{V}\partial\mathbf{e}/\partial t_и)/(cU_ф). \qquad (16)$$

В итоге, подставляя (16) в (12) и учитывая (11), получаем формулу для описания эффекта Доплера в стратифицированной движущейся среде:

$$f_п=f_и\Big/\left\{1-\frac{\mathbf{ve}(z_и)}{U_г(z_и)}-\int\limits_0^{z_и}\frac{(\mathbf{V}(z)\,\partial\mathbf{e}(z,t_и)/\partial t_и}{e_z(z)\,c(z)\,U_ф(z)}dz\right\}. \qquad (17)$$

Для того чтобы по этой формуле оценить точное значение частоты $f_п$, необходимо использовать закон преломления $\mathbf{e}(z)$ в движущейся среде [9].

В океане и нижнем слое атмосферы $|c(z)-c_0|/c_0\ll1$ и $M=|\mathbf{V}|/c_0\ll1$. Используя эти неравенства, упростим выражение для I. Поскольку значение I примерно в $M^{-1}\gg1$ раз меньше второго слагаемого в знаменателе (17), то при вычислении I будем пренебрегать влиянием рефракции на направление вектора $\mathbf{e}(z)$ и считать $\mathbf{e}=-\mathbf{R}/R$. В этом случае $\partial\mathbf{e}/\partial t_и=-\mathbf{v}_\perp/R$, $z_и/e_z=R$ и формула (17) с точностью до членов третьего порядка малости по v/c_0 и V/c_0 принимает вид

$$f_и\approx f_п/[1-\mathbf{ve}(z_и)/U_г(z_и)+\overline{(\mathbf{v}_\perp\mathbf{V})}/c_0^2], \qquad (18)$$

где $\overline{(\mathbf{v}_\perp\mathbf{V})}=\dfrac{1}{z_и}\displaystyle\int\limits_0^{z_и}(\mathbf{v}_\perp\mathbf{V}(z))\,dz$ — среднее значение величины $\mathbf{v}_\perp\mathbf{V}(z)$ в слое $0\div z_и$. Отметим, что в атмосфере значение параметра M примерно на два порядка больше, чем в океане. Поэтому в соответствии с (18) влияние поперечного эффекта Доплера в атмосфере существенно выше.

Эффект Доплера в неоднородной движущейся среде ранее рассматривался в [10]. Однако при этом были допущены принципиальные ошибки. В частности, в [10] длина луча S и, следовательно, эйконал Ψ зависят от координат источника не в момент излучения им звука $t_и$, а в момент приема t. Это приводит к исчезновению известной нелинейности доплеровской формулы относительно v/c. Кроме того, в [10] игнорируется поворот луча во времени при наличии поперечной к нему составляющей $\mathbf{v}$. Вследствие этого ошибочно считается, что I может принимать значение, не равное нулю, только за счет изменения во времени параметров среды. Не трудно заметить, что погрешность оценивания $f_п$ в этом случае сравнима по величине с дополнительным сдвигом частоты, обусловленным влиянием среды.

Рассмотрим как преобразуется (17) при распространении звука в однородной среде (c=const и $\mathbf{V}$=const) и сравним получаемый результат с известными для этого случая формулами. Пусть $\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}$ — скорости движения источника и приемника соответственно относительно среды. Очевидно, что $\mathbf{u}=-\mathbf{V}$ и $\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$. Учитывая равенство $\partial\mathbf{e}/\partial t_и=-\mathbf{v}_\perp/R$, точное для однородной среды, из (17) имеем

$$f_п=f_и\Big/\left[1-\frac{u_e-w_e}{\sqrt{c^2-2c\mathbf{un}+u^2}}+\frac{(\mathbf{u}_\perp-\mathbf{w}_\perp)\,\mathbf{u}}{c\,(c-\mathbf{un})}\right].$$

Поскольку $(\mathbf{u}_\perp-\mathbf{w}_\perp)\mathbf{u}=(\mathbf{u}-\mathbf{w})\mathbf{u}_\perp$, то предыдущую формулу можно записать иначе:

$$f_\text{п}=f_\text{и}\bigg/\left[1-\frac{\mathbf{u}-\mathbf{w}}{c-\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}\left(\mathbf{e}\cos\eta+\frac{\mathbf{u}_\perp}{c}\right)\right], \tag{19}$$

где $\cos\eta=(c-\mathbf{un})/\sqrt{c^2-2c\mathbf{un}+u^2}$. Вектор $\mathbf{e}$, характеризующий направление распространения звука, здесь, так же как и в (17), относится к системе координат K, движущейся совместно с приемником.

Запишем (19) в системе координат K'', неподвижной относительно среды. Пусть угол между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{e}$ равен φ. В этом случае $\mathbf{un}=u\cos(\varphi-\eta)=$ $=u_e\cos\eta+u_\perp\sin\eta$ (см. фиг.). Учитывая, что $\sin\eta=u_\perp/c$, получаем соотношение $\mathbf{n}=\mathbf{e}\cos\eta+\mathbf{u}_\perp/c$ и, следовательно, из (19) имеем

$$f_\text{п}=f_\text{и}\bigg/\left[1-\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{w})\,\mathbf{n}}{c-\mathbf{un}}\right]=f_\text{и}\cdot\frac{1-\mathbf{un}/c}{1-\mathbf{wn}/c}. \tag{20}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что в системе координат K'', в которой направление распространения звука $\mathbf{e}''$ совпадает с нормалью к фронту волны $\mathbf{n}$, поперечный эффект Доплера не обнаруживается.

Выражение (20) полностью совпадает с аналогичной формулой из [2, 3]. В то же время в [1, 5] вместо величины $\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}$ используется проекция $\boldsymbol{\omega}$ на направление $\mathbf{e}$, вдоль которого наблюдается источник в момент приема звуковых волн. Поскольку при движении источника существует угловое различие между направлениями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$, то в [1, 5] допускается ошибка, составляющая величину второго порядка малости по ω/c. Эквивалентная запись формулы (20), в которой используется проекция $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{e}$, получена в [6].

В заключение подчеркнем, что, согласно [1, 2], поперечный эффект Доплера имеет место только для электромагнитных волн как одно из следствий специальной теории относительности. В то же время результаты данной работы показывают, что в акустике для наблюдателя, относительно которого среда движется, поперечный эффект Доплера также существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландсберг Г. С.* Оптика. Изд. 5-е, испр. и доп. М.: Наука, 1976. 926 с.
2. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Оптика. Изд. 2-е, испр. М.: Наука, 1985. 751 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, 1986. 733 с.
4. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
5. Ультразвук. / Под ред. Голямина И. П. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 400 с.
6. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981. 206 с.
7. *Осташев В. Е.* Теория распространения звука в неоднородной движущейся среде // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 4. С. 358–373.
8. *Кудрявцев Л. А.* Курс математического анализа. Т. II. М.: Высшая школа, 1981. 584 с.
9. *Осташев В. Е.* Закон преломления звукового луча в стратифицированной движущейся атмосфере // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 225–229.
10. *Georges T. H., Clifford S. F.* Acoustic Sounding in a Refracting Atmosphere // J. Acoust Soc. Amer. 1972. V. 52. № 4. P. 1397–1405.

Институт оптики атмосферы
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.III.1987