

УДК 534.1

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

Жарий О. Ю.

Рассматриваются волны в упругой полуплоскости при условии периодического вдоль границы распределения перемещений и напряжений. Анализируется вклад гармонической волны Рэлея в нестационарное волновое поле, генерируемое под действием начальных условий или поверхностных нагрузок. Формулируются условия, при которых волна Рэлея не возбуждается.

В работе [1] изучены нестационарные колебания полуплоскости, находящейся при $t < 0$ в условиях статической деформации под действием периодических вдоль координаты границы напряжений, а при $t = 0$ освобождающейся от нагрузок. Показано, что с течением времени вблизи границы формируется стоячая волна Рэлея, которая захватывает значительную часть первоначально запасенной упругой энергии. Остальная энергия уносится от границы распространяющимися волнами, амплитуды которых вблизи поверхности быстро убывают со временем.

Для установления общих закономерностей формирования волн Рэлея при нестационарных движениях представляет интерес расширить постановку указанной задачи и рассмотреть волновое поле, генерируемое произвольным распределением начальных перемещений и скоростей — в общем случае не являющимся, как в работе [1], результатом статического нагружения с поверхности. В задаче нагружения полуплоскости внезапно приложенными на границе усилиями эти закономерности будут иными вследствие непрерывного подвода энергии от источника. Вклад волн Рэлея в нестационарное движение для данных двух случаев и изучается в данной работе, являющейся продолжением [1].

Рассмотрим волны в упругой полуплоскости $z \geq 0$, движение которой описывается векторным уравнением Ламе [2]:

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

(обозначения здесь и далее те же, что в [1]), генерируемые под действием периодических по x начальных условий

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x, z), \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, z), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{u}_0 = iu_{x0}(z) \sin \alpha x + ku_{z0}(z) \cos \alpha x, \quad \mathbf{v}_0 = iv_{x0}(z) \sin \alpha x + kv_{z0}(z) \cos \alpha x.$$

Граница полуплоскости свободна от напряжений

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь u_{x0}, \dots, v_{z0} — заданные функции, удовлетворяющие некоторым условиям (см. ниже).

В соответствии с видом начальных условий решение задачи (1)–(3) должно иметь вид

$$\mathbf{u} = iu_x(z, t) \sin \alpha x + ku_z(z, t) \cos \alpha x. \quad (4)$$

Применяя к уравнению (1) комплексное преобразование Фурье по времени [1], с учетом начальных условий получаем в области изображений

систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (c_1^2 \alpha^2 - \omega^2) u_x^F - c_2^2 \frac{d^2 u_x^F}{dz^2} + (c_1^2 - c_2^2) \alpha \frac{du_z^F}{dz} &= U, \\ -(c_1^2 - c_2^2) \alpha \frac{du_x^F}{dz} + (c_2^2 \alpha^2 - \omega^2) u_z^F - c_1^2 \frac{d^2 u_z^F}{dz^2} &= W, \end{aligned} \quad (5)$$

решение которой должно удовлетворять следующим из (3) граничным условиям:

$$\left[\left(1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \alpha u_x^F + \frac{du_z^F}{dz} \right]_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{du_x^F}{dz} - \alpha u_z^F \right)_{z=0} = 0. \quad (6)$$

В правых частях (5) обозначено $U(z, \omega) = v_{x0}(z) - i\omega u_{x0}(z)$, $W(z, \omega) = v_{z0}(z) - i\omega u_{z0}(z)$. Для получения согласующегося с физическим смыслом задачи ограниченного при $z > 0$ решения необходимы дополнительные условия:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_x^F = \lim_{z \rightarrow \infty} u_z^F = 0. \quad (7)$$

Решение краевой задачи (5)–(7), полученное по методу вариации произвольных постоянных [3], имеет вид

$$\begin{aligned} u_x^F(z, \omega) &= \frac{1}{2\gamma_1 \omega^2} \left[\alpha \int_0^z e^{-\gamma_1(z-\xi)} (\alpha U - \gamma_1 W) d\xi - \gamma_1 \int_0^z e^{-\gamma_2(z-\xi)} (\gamma_2 U - \alpha W) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \int_z^\infty e^{\gamma_1(z-\xi)} (\alpha U + \gamma_1 W) d\xi - \gamma_1 \int_z^\infty e^{\gamma_2(z-\xi)} (\gamma_2 U + \alpha W) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \alpha e^{-\gamma_1 z} I_1 - \gamma_1 e^{-\gamma_2 z} I_2 \right] - \frac{\alpha}{\gamma_1 \omega^2 \Delta} [(\alpha^2 + \gamma_2^2) e^{-\gamma_1 z} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 z}] [(\alpha^2 + \gamma_2^2) I_1 - 2\alpha \gamma_1 I_2], \\ u_z^F(z, \omega) &= \frac{1}{2\gamma_2 \omega^2} \left[\gamma_2 \int_0^z e^{-\gamma_1(z-\xi)} (\alpha U - \gamma_1 W) d\xi - \alpha \int_0^z e^{-\gamma_2(z-\xi)} (\gamma_2 U - \alpha W) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2 \int_z^\infty e^{\gamma_1(z-\xi)} (\alpha U + \gamma_1 W) d\xi + \alpha \int_z^\infty e^{\gamma_2(z-\xi)} (\gamma_2 U + \alpha W) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 e^{-\gamma_1 z} I_1 - \alpha e^{-\gamma_2 z} I_2 \right] - \frac{1}{\omega^2 \Delta} [(\alpha^2 + \gamma_2^2) e^{-\gamma_1 z} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_2 z}] [(\alpha^2 + \gamma_2^2) I_1 - 2\alpha \gamma_1 I_2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено:

$$\gamma_1 = \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma_2 = \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right)^{1/2}, \quad \Delta = (\alpha^2 + \gamma_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2, \quad (9)$$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\gamma_1 \xi} [\alpha U(\xi, \omega) + \gamma_1 W(\xi, \omega)] d\xi,$$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-\gamma_2 \xi} [\gamma_2 U(\xi, \omega) + \alpha W(\xi, \omega)] d\xi.$$

Из требования ограниченности упругой энергии в полуполосе $0 < x < 2\pi/\alpha$, $z > 0$ следует, что функции $u_{x0}(z), \dots, v_{z0}(z)$ должны быть интегрируемы с квадратом в интервале $0 < z < \infty$. Легко видеть, что это условие вместе с требованиями $\text{Re } \gamma_{1,2} \geq 0$ [1] обеспечивает сходимость всех интегралов в (8).

Обращение преобразования Фурье от выражений (8) осуществляется точно так же, как и в [1], и приводит к выражению для вектора перемещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{PS} + \mathbf{u}^R, \quad (10)$$

где \mathbf{u}^{PS} — объемные волны, представляемые интегралами по петлям, обходящим разрез в комплексной ω -плоскости и убывающие со временем как $(\alpha c_2 t)^{-3/2}$. Через \mathbf{u}^R обозначена сумма вычетов в полюсах $\omega = \pm \alpha c_R$, вклад в которую дают те члены в (8), которые содержат в знаменателе определитель Рэлея Δ . Гармоническая рэлеевская составляющая волнового поля имеет простой вид

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{R} [(\mathbf{R}, \mathbf{u}_0) \cos \alpha c_R t + (\mathbf{R}, \mathbf{v}_0) \sin \alpha c_R t / \alpha c_R], \quad (11)$$

где (\mathbf{a}, \mathbf{b}) обозначает интеграл по площади полуполосы от скалярного произведения векторов

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^{2\pi/\alpha} dx \int_0^\infty (a_x b_x + a_z b_z) dz, \quad (12)$$

а \mathbf{R} — вектор перемещений в стоячей волне Рэлея:

$$\mathbf{R} = (2\pi l_1 N)^{-1/2} \alpha \{ i [(1+l_2^2) e^{-l_1 \alpha z} - 2l_1 l_2 e^{-l_2 \alpha z}] \sin \alpha x + \\ + k l_1 [(1+l_2^2) e^{-l_1 dz} - 2e^{-l_2 dz}] \cos \alpha x \},$$

$$l_1 = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right)^{1/2}, \quad l_2 = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right)^{1/2}, \quad N = \frac{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1^2 l_2^2 - 2l_1 l_2 (1+l_2^2)}{l_1 l_2}, \quad (13)$$

нормированный таким образом, что $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$.

Амплитуда волны Рэлея (11) определяется двумя интегральными характеристиками полей начальных перемещений и скоростей — их проекциями $(\mathbf{R}, \mathbf{u}_0)$ и $(\mathbf{R}, \mathbf{v}_0)$ на единичный вектор \mathbf{R} . Соотношение этих проекций определяет фазу волны. Необходимым и достаточным условием обращения \mathbf{u}^R в нуль является ортогональность как перемещений, так и скоростей в начальный момент времени с перемещениями в волне Рэлея:

$$(\mathbf{R}, \mathbf{u}_0) = 0, \quad (\mathbf{R}, \mathbf{v}_0) = 0. \quad (14)$$

Таким образом, при выполнении условий (14) волна Рэлея не возбуждается и вся энергия нестационарного движения уносится от границы полуплоскости объемными волнами. Пример такой ситуации обсуждался в работе [1]. В ней указывалось, что стоячую волну Рэлея можно рассматривать как краевую моду колебаний полуплоскости, соответствующую частоте краевого резонанса $\omega = \alpha c_R$. Анализ физического содержания соотношений (14) позволяет сделать вывод о том, что и для других полубесконечных волноводов краевая мода не возбуждается, если поля начальных перемещений и скоростей ортогональны в объеме волновода с вектором перемещений краевой моды. В противном случае вклад краевой моды при нестационарном возбуждении будет определяться формулой (11) с заменой αc_R на частоту краевого резонанса, а \mathbf{R} — на нормированный вектор перемещений в краевой моде.

Рассмотрим теперь нестационарные волны в полуплоскости, возбуждаемой внезапно приложенными на границе нормальными напряжениями:

$$\sigma_z|_{z=0} = \sigma_0 f(t) \cos \alpha x, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0 \quad (15)$$

при нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

В области изображений решение уравнения движения (1) для данных условий имеет вид

$$\mathbf{u}^F = -\frac{\sigma_0 f^F(\omega)}{\mu \Delta} \{i\alpha [(\alpha^2 + \gamma_2^2) e^{-\gamma_1 z} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 z}] \sin \alpha x + \\ + k\gamma_1 [(\alpha^2 + \gamma_2^2) e^{-\gamma_1 z} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_2 z}] \cos \alpha x\}, \quad (17)$$

$$f^F(\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье дает для вектора перемещений \mathbf{u} представление типа (10), причем \mathbf{u}^{PS} обладает теми же свойствами, что и в предыдущей задаче. Сумма вычетов в полюсах $\omega = \pm \alpha c_R$

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{R} \frac{\sigma_0 c_R}{\mu \alpha} \left(\frac{\pi l_1}{2N} \right)^{1/2} \int_0^t f(\tau) \sin \alpha c_R (t - \tau) d\tau \quad (18)$$

на этот раз не удовлетворяет сама по себе уравнению движения и не является волной Рэлея, поскольку определяемая интегральным сомножителем зависимость от времени в общем случае негармоническая. Однако если возбуждение ограничено во времени ($f(t) \equiv 0, t > t_0$), при $t > t_0$ правая часть (18) становится гармонической функцией времени и представляет собой стоячую волну Рэлея:

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{R} \frac{\sigma_0 c_R}{\mu \alpha} \left(\frac{\pi l_1}{2N} \right)^{1/2} \left[\sin \alpha c_R t \int_0^{t_0} f(\tau) \cos \alpha c_R \tau d\tau - \right. \\ \left. - \cos \alpha c_R t \int_0^{t_0} f(\tau) \sin \alpha c_R \tau d\tau \right]. \quad (19)$$

Физически это означает, что рэлеевская волна не может сформироваться при ненулевых напряжениях на границе, поскольку в ней эти напряжения всегда нулевые. Невозможность выделения в явном виде волны Рэлея во время действия нагрузки связана с невозможностью разделения приращения упругой энергии полуплоскости, подводимой от источника, на энергии объемных и поверхностных волн. Такое разделение происходит лишь асимптотически, при бесконечном увеличении времени после прекращения действия источника благодаря специфическим свойствам волны Рэлея как краевой моды колебаний полуплоскости. Очевидно, для некоторых законов изменения во времени поверхностной нагрузки $f(t)$ волна Рэлея не возбуждается. Это происходит тогда, когда оба интеграла в (19) обращаются в нуль.

Рассмотрим полученные результаты с точки зрения общей теории разложений нестационарных волновых полей по собственным формам колебаний [4]. Этот метод решения начально-краевых задач строго обоснован для ограниченных упругих тел, но посредством предельного перехода [5] может быть распространен и на тела с уходящими на бесконечность границами.

Легко видеть, что найденные выше решения для периодически деформированной полуплоскости удовлетворяют условиям $u_x = 0, \tau_{xz} = 0$ на прямых $x = 2n\pi/\alpha$ (n — целое) и поэтому непосредственно переносятся на полуполосу $0 < x < 2\pi/\alpha, z > 0$ с гладко заземленными боковыми поверхностями. Спектр собственных частот такой полуполосы состоит из непрерывной части $\omega > \alpha c_2$ и дискретной точки $\omega = \alpha c_R$. В соответствии с этим решения нестационарных задач представляются суммой интегралов по ω в пределах $\alpha c_2 < \omega < \infty$ (объемные волны) и отдельного слагаемого — вклада полюса Рэлея [1]. Эти же результаты могут быть получены из решения задачи нестационарных колебаний прямоугольника $0 < x < 2\pi/\alpha, 0 < z < L$ по методу [4, 5] предельным переходом $L \rightarrow \infty$. Одна-

ко по методу разложений по собственным формам вклад в волновое поле дискретной точки спектра — гармонической краевой моды — может быть вычислен и непосредственно по данным начальным и граничным условиям. Результат, разумеется, совпадает с (11) или (18). Именно на основании теории разложений по собственным формам сразу определяется вклад краевой моды в более сложных задачах — для полуполосы и полупцилиндра со свободными поверхностями. Отметим, что несмотря на ряд достоинств метода [4, 5] асимптотические оценки перемещений в объемных волнах более просто получаются с использованием метода контурного интегрирования.

Сказанное выше позволяет сделать следующий практически важный вывод. При нестационарном возбуждении идеально упругого полубесконечного волновода в общем случае не вся подведенная энергия может быть преобразована в распространяющиеся волны. В зависимости от вида возбуждения та или иная ее часть расходуется на формирование краевой моды данного волновода, если она существует. В отсутствие у волновода резонанса на нераспространяющихся модах при любом способе возбуждения вся энергия источника переходит в объемные волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарий О. Ю. О захвате энергии нестационарного движения полуплоскости стационарной волной Рэля // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 639—644.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
4. Pao Y.-H. Elastic waves in solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 4. P. 1152—1164.
5. Weaver R. L., Pao Y.-H. Axisymmetric elastic waves excited by a point source in a plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 4. P. 821—836.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию 6.X.1987