

УДК 534.222

**ТЕОРИЯ ТЕПЛОЙ САМОФОКУСИРОВКИ С УЧЕТОМ
ФОРМИРОВАНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН И АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ**

Карabutov A. A., Руденко O. B., Сапожников O. A.

Сформулирована упрощенная система уравнений, связывающая три движения жидкости: быструю (акустическую) моду и две медленные моды — гидродинамическую и температурную. Система пригодна для описания самовоздействия существенно негармонических волн конечной амплитуды. Рассмотрены некоторые примеры, иллюстрирующие возможность выписанной системы: процесс установления медленных мод, установившийся режим при распространении звукового пучка в трубе и особенности фокусировки волн конечной амплитуды.

К настоящему времени опубликовано более двадцати работ по самофокусировке звука, большинство из них — теоретические. Имеются статьи обзорного характера [1]. Во многих работах явление анализируется в условиях, приближающих его к известному оптическому аналогу — эффекту самофокусировки света. На наш взгляд, представляет интерес анализ этого явления также и в специфических условиях, которые не могут быть реализованы (или не типичны) для световых волн. Так, в работе [2] наблюдалось тепловое действие на фоне развитых гидродинамических потоков — акустического ветра и термоконвекции. Принципиально новые особенности должны проявиться при самофокусировке существенно негармонических волн пилообразной формы, обычно наблюдаемых в нелинейно акустических экспериментах. У этого явления вообще нет оптического аналога; не развит и математический аппарат для его теоретического анализа.

Цель данной работы — формулировка упрощенной системы уравнений, связывающей три движения: быструю (акустическую) моду и две медленные — гидродинамическую и температурную. В основу системы должно быть положено уравнение Хохлова — Заболотской — Кузнецова, которое учитывает как линейное, так и нелинейное поглощение и пригодно для описания как гармонических, так и пилообразных волн:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\tilde{M}}{c_0} \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p', \quad (1)$$

где (x, r) — цилиндрические координаты, ось x совпадает с осью пучка, p' — акустическое давление, $\tau = t - x/c_0$ — время в сопровождающей системе координат, ρ_0 и c_0 — невозмущенные плотность и скорость звука, ε — нелинейный параметр, $b = \xi + 4\eta/3$, η и ξ — сдвиговая и объемная вязкости, $\Delta_{\perp} = r^{-1} \partial/\partial r (r \partial/\partial r)$ лапласиан по поперечной координате. Уравнение (1) содержит дополнительный член $(\tilde{M}/c_0) \partial p'/\partial \tau$, описывающий влияние неоднородных в пространстве нагрева и течения на процесс распространения звука:

$$\tilde{M} = U_x/c_0 + \delta T', \quad (2)$$

где $U = (U_x, U_z)$ — скорость гидродинамического потока, $\delta = (\partial c/\partial T)_p/c_0$ — температурный коэффициент скорости звука c , T' — приращение медленной температуры среды. Для описания возникающих потоков нужно использовать уравнения для акустического ветра, полученные в работе [3], а для описания температуры — неоднородное уравнение теплопровод-

НОСТИ:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_{\perp} U_x + F - \beta g T', \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_x \frac{\partial T'}{\partial x} + U_r \frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p} \Delta_{\perp} T' + \frac{c_0}{c_p} F, \quad (5)$$

здесь квазидавление Буссинеска P_0 не зависит от поперечной координаты, $\beta = -(\partial \rho / \partial T)_p / \rho_0$ — температурный коэффициент объемного расширения, g — ускорение силы тяжести, κ — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость среды. Величина

$$F = \frac{b}{c_0^5 \rho_0^3} \overline{\left(\frac{\partial p'}{\partial \tau} \right)^2}, \quad (6)$$

где черта означает усреднение по периоду волны, описывает происходящие при поглощении звука передачу количества движения среде (см. (3)) и тепловыделение (см. (5)). Выражение (6) пригодно как для квазигармонических, так и для пилообразных волн [4]. Заметим, что в сильновязких жидкостях, когда акустическое число Рейнольдса невелико и можно считать волну гармонической, система (1) — (6) сводится к обычным постановкам задачи [1].

Система (1) — (6) описывает взаимодействие всех трех мод (p' , U и T') друг с другом и совместно с начальными и граничными условиями является замкнутой. Уравнения (1) — (6) нелинейные, и решить их аналитически не удастся. Кроме того, в зависимости от входящих в уравнения параметров граничных и начальных условий может быть реализовано множество ситуаций. Без эксперимента, выделяющего одну из них, анализировать систему (1) — (6), вообще говоря, не имеет смысла. С целью иллюстрации возможностей выписанной системы рассмотрим три достаточно типичные задачи, связанные либо с ранее развитыми теориями, либо с проведенными экспериментами: процесс установления медленных мод, установившийся режим, особенности фокусировки волн конечной амплитуды.

Рассмотрим сначала тепловую самофокусировку звука (ТСФЗ) в вязкой жидкости, когда ударные фронты в волне не образуются и нелинейное затухание несущественно. В этом случае уравнение для звука (1) может быть упрощено методом, описанным в [5] применительно к самофокусировке света. Представим акустическое давление как $p' = A \exp(ik\psi - i\omega\tau) / 2 + \text{к.с.}$, где ω — частота звука, $k = \omega / c_0$ — волновое число, A и ψ — амплитуда и фаза волны. Из (1) следует

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \alpha A + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{2} A \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = -\frac{U_x}{c_0} - \delta T' + \frac{\Delta_{\perp} A}{2k^2 A}, \quad (8)$$

где $\alpha = b\omega^2 / 2c_0^3 \rho_0$ — коэффициент поглощения звука. Для дальнейшего упрощения используем безабберационное приближение $\psi(x, r, t) = \psi_0(x, t) + r^2 \beta_0(x, t) / 2$, где ψ_0 — однородный поперек пучка фазовый сдвиг, β_0 — кривизна волнового фронта. Для гауссовского пучка, как известно [5], решение представимо в виде $A = A_0 \exp(-\alpha x - r^2 / f^2 r_0^2) / f$, $\beta_0 = f^{-1} \partial f / \partial x$, где r_0 — исходный радиус пучка, $f(x, t)$ — текущий базразмерный радиус. Разложим величины в (7), (8), а также U и T' в (2) — (4) вблизи оси в ряд по степеням r (параксиальное приближение): $U_x = U_0 - r^2 U_2 + \dots$, аналогично для F и T' ; $U_r = r U_1 + \dots$. Ограничиваясь выписанными чле-

нами, получим:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{U_2}{c_0} + 2\delta T_2 + \frac{1}{x_\lambda^2 f^4}, \quad (9)$$

$$F_0 = \alpha \left(\frac{A_0}{\rho_0 c_0} \right)^2 \frac{\exp(-2\alpha x)}{f^2}, \quad (10)$$

$$F_2 = F_0 / (r_0 f)^2, \quad (11)$$

$$\hat{L}U_0 = F_0 - \beta g T_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} - 4 \frac{\eta}{\rho_0} U_2, \quad (12)$$

$$\hat{L}U_2 = F_2 - \beta g T_2, \quad (13)$$

$$\hat{L}T_0 = \frac{c_0}{c_p} F_0, \quad (14)$$

$$\hat{L}T_2 = \frac{c_0}{c_p} F_2 + T_2 \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_2 \frac{\partial T_0}{\partial x}. \quad (15)$$

Здесь $x_\lambda = kr_0^2/2$ — дифракционная длина, $\hat{L} = \partial/\partial t + U_0 \partial/\partial x$. Функция ψ_0 описывается уравнением $\partial\psi_0/\partial x = -U_0/c_0 - \delta T_0 - r_0^2/x_\lambda^2 f^2$. Однако ψ_0 в системе (9) — (15) не входит, поэтому однородный фазовый сдвиг в рассматриваемой задаче о ТСФЗ можно не учитывать. Уравнение (9) определяет поведение ширины звукового пучка при распространении волны; первое слагаемое в правой части характеризует дефокусирующее влияние гидродинамических потоков, второе слагаемое описывает тепловую линзу, приводящую при $\delta < 0$ к самофокусировке, третье слагаемое связано с дифракционной расходимостью. Отметим, что изменение ширины пучка определяется функциями T_2 , U_2 , а однородные части полей температуры (T_0) и скорости потока (U_0) меняют лишь ψ_0 . Уравнения (10) — (15) описывают обратное влияние фокусируемого пучка на медленные моды T' и U .

Рассмотрим следующую ситуацию. Звук излучается в неограниченное полупространство $x > 0$, причем в течение рассматриваемого промежутка времени можно пренебречь изменением ширины пучка ($f=1$), теплопроводностью ($\kappa=0$) и вязким торможением потока ($\eta=0$). Поскольку вдали от пучка среда невозмущена, то в (12) можно положить $\partial P_0/\partial x = 0$ [3]. Интересуемся поведением скорости потока U_0 и температуры T_0 на оси пучка после начала излучения. Аппроксимируем экспоненту в формуле (10) более удобной для анализа кусочно-линейной функцией: пусть $F_0 = (\alpha A_0^2/\rho_0^2 c_0^2)(1-2\alpha x)$ при $0 \leq x \leq (2\alpha)^{-1}$, и $F_0 = 0$ вне этого участка. Перейдем к безразмерным переменным $x' = 2\alpha x$, $t' = 2^{1/2} \alpha c_0 M t$, $U_0' = (2^{1/2}/c_0 M) U_0$, $T_0' = (2^{1/2} c_p/c_0^2 M) T_0$, где $M = A/c_0^2 \rho_0$ — акустическое число Маха на излучателе. Решение определяется единственным безразмерным параметром $G = \beta g / (2^{1/2} c_p \alpha M)$, характеризующим тормозящее действие архимедовой силы на поток. Приходим к следующей задаче:

$$\partial U_0' / \partial t' + U_0' \partial U_0' / \partial x' = 1 - x' - G T_0', \quad (16)$$

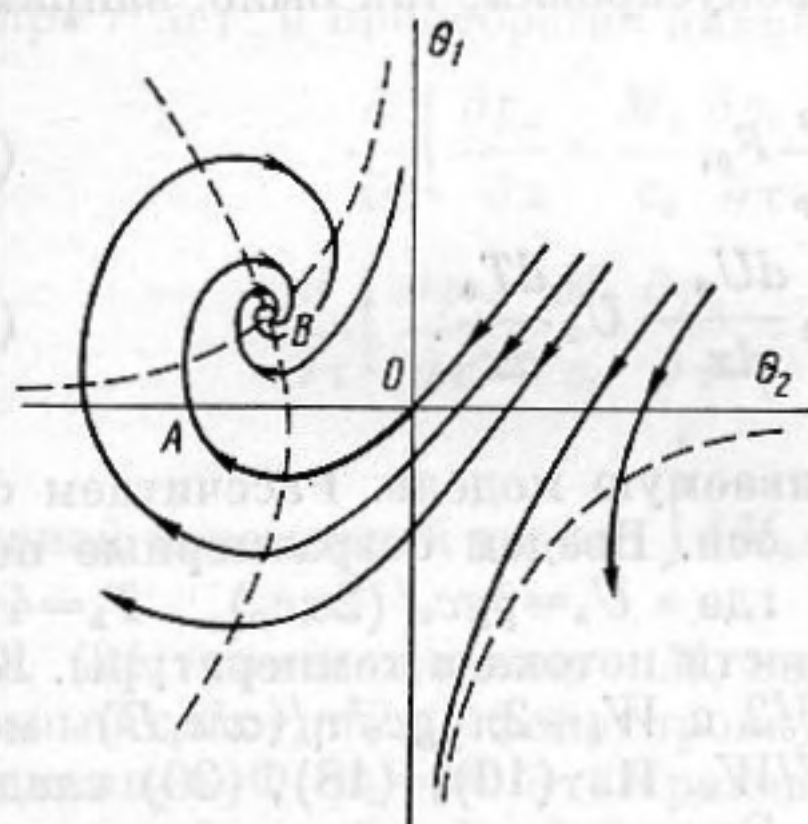
$$\partial T_0' / \partial t' + U_0' \partial T_0' / \partial x' = 1 - x', \quad (17)$$

$$U_0'(x', t'=0) = T_0'(x', t'=0) = U_0'(x=0, t') = T_0'(x'=0, t') = 0.$$

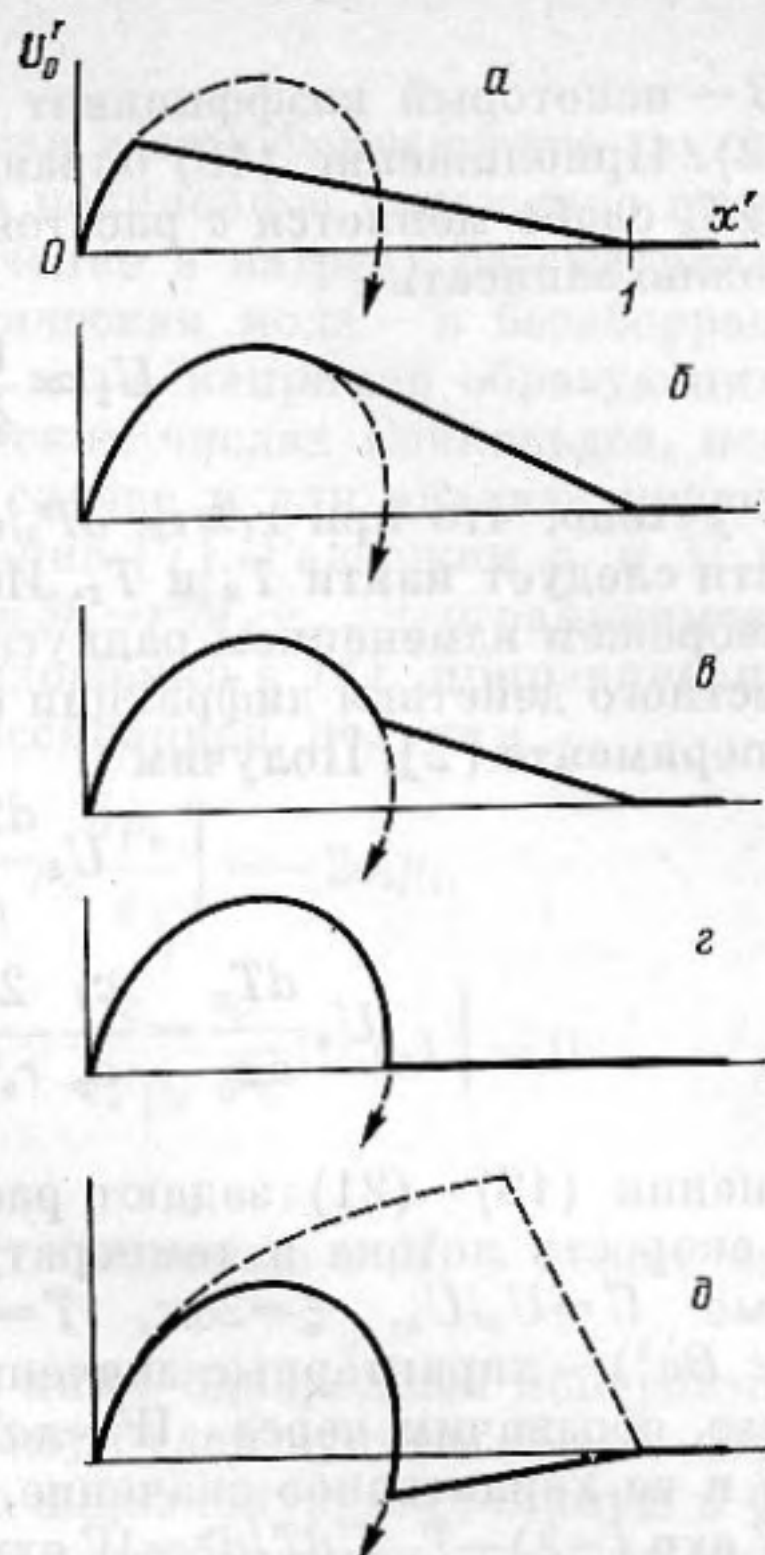
При $x' > 1$ в правых частях (16), (17) вместо $1-x'$ нужно писать нули. Уравнения для характеристик этой задачи линейны, поэтому траектории изображающих точек в фазовом пространстве (U_0', T_0', x) находятся в явном виде. Выражения для них громоздки и здесь не приводятся. Но профиль скорости и температуры на основных участках можно описать проще, как отрезки прямых с изменяющимся наклоном: $U_0' = \theta_1(x'-1)$, $T_0' = \theta_2(x'-1)$. Тангенсы углов наклона θ_1 и θ_2 находятся из уравнений $d\theta_1/dt' + \theta_1^2 = -1 - G\theta_2$, $d\theta_2/dt' + \theta_1\theta_2 = -1$. На фиг. 1 приведена фазовая плоскость переменных (θ_1, θ_2) . Выделена кривая, соответствующая начальным условиям задачи. Единственная особая точка — фокус B , его координаты находятся из соотношений $d\theta_1/dt' = d\theta_2/dt' = 0$. При любом значе-

Фиг. 1. Фазовая плоскость переменных (θ_1, θ_2) . Стрелки указывают направление движения фазовых точек. Штриховые кривые — изоклины $d\theta_1/d\theta_2=0$

Фиг. 2. Зависимость скорости течения на оси пучка U_0' от расстояния до излучателя x' в последовательные моменты времени $(a-d)$. Штриховая линия со стрелкой — проекция на плоскость траектории соответствующей изображающей точки фазового пространства (U_0', T_0', x') ; ∂ — (штриховая линия) — профиль скорости течения при $G=0$



Фиг. 1



Фиг. 2

нии числа G начальный рост наклона профиля скорости потока U_0' сменяется с течением времени спадом и через некоторое время t_0 величина θ_1 вновь обращается в ноль (точка A), т. е. U_0 становится равной нулю на прямолинейном участке профиля. Число G определяет скорость протекания этого процесса, в предельных случаях $G \gg 1$ и $G \ll 1$ время t_0 составляет $t_0 \sim 2c_p / (\beta g c_0)$ и $t_0 \sim 3 / (2^{1/2} \alpha c_0 M)$ соответственно. На фиг. 2 построен профиль скорости потока в различные моменты времени. Видно, что при $t > t_0$ появляется область с обратным (в сторону излучателя) потоком. Таким образом, при $t = t_0$ на оси пучка архимедова сила компенсирует силу акустического ветра, а при $t > t_0$ даже превосходит ее; это и наблюдалось в эксперименте [2]. На фиг. 2, ∂ для сравнения приведен профиль скорости потока при горизонтальной ориентации пучка $G=0$. Видно, что в этом случае скорость заметно больше, поэтому наиболее благоприятна для ТСФЗ вертикальная направленность пучка [2].

Обратимся к другой задаче. Пусть пучок распространяется в цилиндрической трубе, радиусы пучка и трубы равны соответственно r_0 и r_1 и гидродинамическое число Рейнольдса мало за счет тормозящего действия стенок трубы. При таких условиях в отсутствие влияния термоконвекции ($g=0$), при постоянстве интенсивности звука и ширины пучка ($F_0, r_0 = \text{const}$) возникающий акустический ветер был проанализирован Эккартом [6]. В области одномерного течения ($U_r=0$) им получено аналитическое решение задачи. Из него, в частности, следует, что для пучка с гауссовским поперечным профилем при $r_1 \gg r_0$ скорость на оси $U_0 = [\ln(2r_1^2 / (r_0^2 + C - 2))] \rho_0 r_0^2 F_0 / 8\eta$, здесь $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. В нашей задаче в качестве объемной силы выступает комбинация $F_0 - \beta g T_0$, причем она зависит от расстояния. Поэтому построить точное решение не удастся. Основываясь на решении Эккарта, примем приближение: допустим, что скорость жидкости на оси U_0 пропорциональна действующей локальной силе $F_0 - \beta g T_0$:

$$U_0 \approx B \frac{\rho_0 r_0^2}{8\eta} (F_0 - \beta g T_0), \quad (18)$$

где B — некоторый коэффициент (в экартовском случае $B = \ln(2r_1^2/r_0^2) + C - 2$). Приближение (18) оправдано для сильновязких жидкостей, когда $F_0 - \beta g T_0$ слабо меняется с расстоянием. Как видно из (12), при этом также можно записать

$$U_2 \approx \frac{\rho_0}{4\eta} (F_0 - \beta g T_0), \quad (19)$$

здесь учтено, что при $r_1 \gg r_0$ $\partial P_0 / \partial x \approx 0$. Для полного описания приосевой области следует найти T_0 и T_2 . Исходим из уравнений (11), (14) и (15). Пренебрежем изменением радиуса пучка ($f=1$), что предполагает малость совместного действия дифракции и самофокусировки; так было, например, в эксперименте [2]. Получим

$$U_0 \frac{dT_0}{dx} = \frac{c_0}{c_p} F_0, \quad (20)$$

$$U_0 \frac{dT_2}{dx} = \frac{c_0}{c_p} \frac{2}{r_0^2} F_0 + T_2 \frac{dU_0}{dx} - U_2 \frac{dT_0}{dx}. \quad (21)$$

Уравнения (18) — (21) задают рассматриваемую модель. Рассчитаем сначала скорость потока и температуру на оси. Введем безразмерные переменные $\bar{U} = U_0 / U_h$, $\xi = 2\alpha x$, $\bar{T} = T_0 / T_h$, где $U_h = \beta g c_0 / (2\alpha c_p)$, $T_h = 4\eta c_0 / (\alpha \rho_0 c_p B a^2)$ — характерные значения скорости потока и температуры. Кроме того, обозначим через $W = \pi a^2 c_0^3 \rho_0 M^2 / 2$ и $W_h = 2\pi \beta g c_0^2 \eta / (\alpha^2 c_p B)$ мощность и ее характерное значение, $\bar{W} = W / W_h$. Из (10), (18), (20) следует $\bar{U} = \bar{W} \exp(-\xi) - \bar{T}$, $\bar{U} d\bar{T} / d\xi = \bar{W} \exp(-\xi)$. Эти уравнения описывают скорость и температуру на оси пучка. Вблизи излучателя температура близка к температуре периферийной части среды, так как на смену нагревающимся слоям жидкости с краев приходят ненагретые слои. Поэтому можно считать $\bar{T}(0) = 0$, соответствующее решение уравнений имеет вид

$$\bar{U} - \ln \left| \frac{1 + \bar{U}}{1 + \bar{W}} \right| = \bar{W} e^{-\xi}, \quad \bar{T} = \bar{W} e^{-\xi} - \bar{U}. \quad (22)$$

Согласно (22), скорость на оси пучка \bar{U} с удалением от излучателя уменьшается и при $\xi = \xi_h = \ln[\bar{W} / \ln(1 + \bar{W})]$ обращается в нуль. Таким образом, из-за противодействия акустического ветра и термоконвекции существует точка застоя с координатой $x_h = 2\alpha \xi_h$. Наличие точки, где скорость течения равна нулю, а также полученный характер зависимости ее координаты x_h от мощности W подтвердился в эксперименте [2]. Температура среды на оси, как видно из (22), при $x = x_h$ достигает своего максимума $\bar{T}_{\max} = -\ln(1 + \bar{W})$. Скорость максимальна при $x \rightarrow 0$: $\bar{U}_{\max} = \bar{W}$. Проведем оценки применительно к эксперименту [2]. Считая $r_1 = 0,1$ м, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м и учитывая константы жидкости (глицерина), найдем $U_h = 0,8 \cdot 10^{-3}$ м/с, $T_h = 2,2$ К, $W_h = 3,8$ Вт. При $W = 16$ Вт отсюда получим $U_{\max} \sim 3 \cdot 10^{-3}$ м/с, $T_{\max} \sim 4$ К, $x_h \sim 0,2$ м. Эти значения близки к наблюдаемым.

Рассмотрим теперь функцию T_2 , ответственную за ТСФЗ. Так как $U_2 / U_0 = 2 / Br_0^2$, $F_2 / F_0 = 2 / r_0^2$, то из (21) получим

$$T_2 = \frac{4(B-1)}{Br_0^2} \frac{c_0}{c_p} U_0(x) \int_0^x \frac{F_0(x')}{U_0^2(x')} dx'.$$

Пусть излучаемая мощность велика: $W \gg W_h$. Тогда из (22) следует, что при $x \leq x_h$ $U_0(x) \approx U_h (W / W_h) \exp(-2\alpha x)$, поэтому получим $T_2 / T_h = 2[1 - \exp(-2\alpha x)] (B-1) / Br_0^2$. Отметим важное обстоятельство: T_2 не зависит от W . Таким образом, в рамках данной модели при увеличении излучаемой мощности W происходит «насыщение» ТСФЗ: изменение W при $W \gg W_h$ не меняет параметры тепловой линзы. Эта специфическая особенность ТСФЗ в жидкостях связана с тем, что с увеличением излучаемой мощности растет не только тепловыделение в области пучка, но и вынос тепла из этой области акустическим ветром.

Как уже отмечалось, новые особенности в самофокусировке звука возникают в том случае, когда существенно нелинейное искажение профиля волны. До сих пор медленные моды (течение и нагрев) рассматривались в параксиальном приближении, а акустическая мода — в безаберрационном. Однако в случае несинусоидальных волн, например образующихся в нелинейной среде при больших акустических числах Рейнольдса, последнее приближение неприемлемо. В этом случае и для анализа уравнения (1) используем параксиальное приближение [7]. Разложим p' и M вблизи оси в ряд по r : $p' = p_0 - r^2 p_2 + \dots$, $M = M_0 - r^2 M_2 + \dots$; ограничимся выписанными членами. Подставляя эти разложения в (1), приравнивая члены при r^0 и r^2 и пренебрегая линейной диссипацией, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{M_0}{c_0} \frac{\partial p_0}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \tau} \right] = -2c_0 p_2, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{M_0}{c_0} \frac{\partial p_2}{\partial \tau} - \frac{M_2}{c_0} \frac{\partial p_0}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (p_0 p_2) \right] = 0. \quad (24)$$

Заменой переменной $\tau \rightarrow \tau + \int_0^x (M_0/c_0) dx'$ слагаемые с M_0 в левых частях

(23), (24) уничтожаются — M_0 вызывает лишь однородный поперек пучка фазовый сдвиг, но не фокусировку. Поэтому будем считать $M_0 = 0$. Введем переменную Φ : $p_2 = \partial \Phi / \partial \tau$. Произвольную аддитивную постоянную в Φ выберем такой, чтобы $\Phi = 0$ (черта означает усреднение по периоду волны). Интегрируя (23), (24) по τ и учитывая, что $\bar{p}_0 = 0$, запишем

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \tau} = -2c_0 \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{M_2 p_2}{c_0} + H, \quad (25)$$

где $H = H(x) = -(\varepsilon/c_0^3 \rho_0) \overline{p_0 \partial \Phi / \partial \tau}$. Перепишем эти уравнения в характеристиках:

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p_0, \quad \frac{dp_0}{dx} = -2c_0 \Phi, \quad \frac{d\Phi}{dx} = \frac{M_2}{c_0} p_0 + H. \quad (26)$$

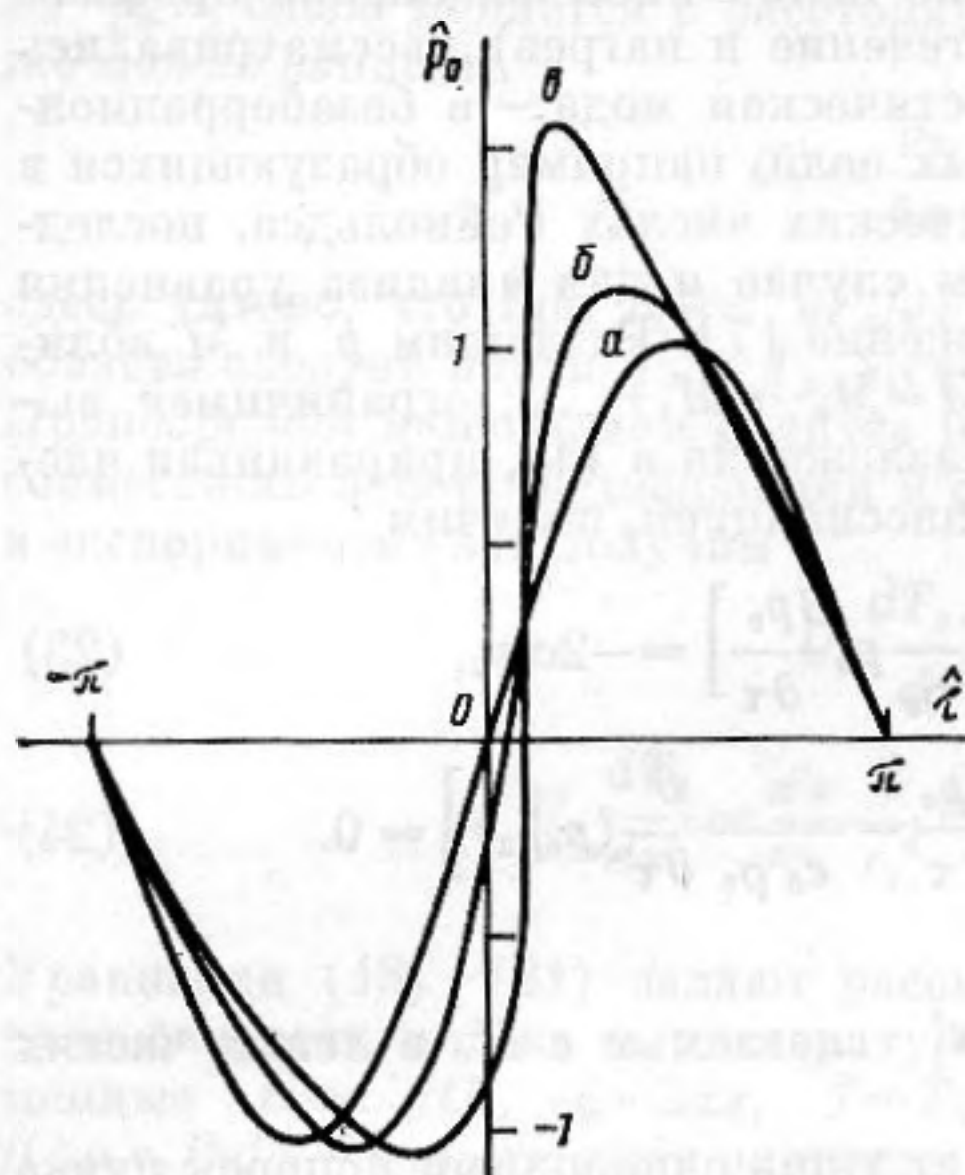
Для анализа ТСФЗ кроме (25) нужно использовать уравнения (6), (12) — (15). Несмотря на то что эта задача проще, чем решение системы (1) — (6), все же и она достаточно сложна. Поэтому продемонстрируем уравнение (25) на примере фокусировки звукового пучка заданной линзой: $M_2 = -1/2 x_\Phi^2$, где $x_\Phi = \text{const}$ имеет смысл масштаба фокусировки. Исходя из краевых ($x=0$) условий $\tau = T$, $p_0 = p_n(T)$, $\Phi = \Phi_n(T)$, получим решение уравнений (26):

$$p_0 = p_n(T) \text{ch} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) - 2c_0 x_\Phi \Phi_n(T) \text{sh} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) + C_1(x), \quad (27)$$

$$\Phi = -\frac{p_n(T)}{2c_0 x_\Phi} \text{sh} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) + \Phi_n(T) \text{ch} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) + C_2(x), \quad (28)$$

$$\tau = T - \frac{\varepsilon x_\Phi}{c_0^3 \rho_0} p_n(T) \text{sh} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) + \frac{2\varepsilon x_\Phi^2}{c_0^2 \rho_0} \Phi_n(T) \left[\text{ch} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) - 1 \right] + C_3(x). \quad (29)$$

Выражения для $C_i(x)$ нетрудно найти в явном виде. Однако они не зависят от T и поэтому форма волны может быть построена без вычисления C_i (с точностью до сдвига профиля как целого без его деформирования). На фиг. 3 показано, как искажается профиль первоначально гармонического возмущения с гауссовским поперечным распределением; изображен один период волны на оси пучка. Видно, что при распространении происходит увеличение амплитуды волны из-за фокусировки; разрыв в профиле волны образуется на меньшем расстоянии, чем для плоской волны той же амплитуды. Кроме того, области сжатия и разрежения искажаются не-



Фиг. 3. Искажение формы волны на оси фокусируемого пучка с пройденным расстоянием. Профили построены на основе (27)–(29) при $p(x=0, r, \tau) = A_0 \exp(-r^2/r_0^2) \sin \omega \tau$; $\hat{p}_0 = p_0/A_0$, $\hat{\tau} = \omega \tau$. Соотношение между масштабами дифракции $x_d = \omega r_0^2 / 2c_0$, фокусировки x_f и нелинейности $x_{нл} = c_0^3 \rho_0 / (\epsilon \omega A_0)$ выбрано следующим: $x_d = 2x_f = 3x_{нл}$: $a - v - x/x_{нл} = 0; 0,5; 1$. Расчет показывает, что разрыв в профиле волны наступает при $x/x_{нл} \approx 0,93$, т. е. раньше, чем в плоской волне

одинаково, это обусловлено дифракционными фазовыми сдвигами между гармониками [6]. Ясно, что при ТСФЗ-пучков конечной амплитуды имеют место аналогичные явления: самофокусировка повышает эффективность нелинейных процессов, ударные фронты формируются ближе к источнику звука, чем в среде без самовоздействия. Дополнительное нелинейное затухание ударных волн приводит к тому, что ТСФЗ становится более выраженной.

Рассмотренные модельные задачи качественно отражают отличительные черты тепловой самофокусировки звука в жидкости. При необходимости детального количественного исследования этого эффекта требуется решать систему (1)–(6) на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин Ф. В., Кравцов Ю. А., Ляхов Г. А. Акустические аналоги нелинейных оптических явлений // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 391–411.
2. Армеев В. Ю., Карабутов А. А., Сапожников О. А. Особенности тепловой самофокусировки ультразвука в жидкости // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 177–180.
3. Гусев В. Э., Руденко О. В. Нестационарные квазиодномерные акустические течения в неограниченных объемах с учетом гидродинамической нелинейности // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 6. С. 875–881.
4. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
5. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // УФН. 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
7. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. К нелинейной теории параксиальных звуковых пучков // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1053–1055.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
физический факультет

Поступила в редакцию
27.II.1987