АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 4

УДК 534

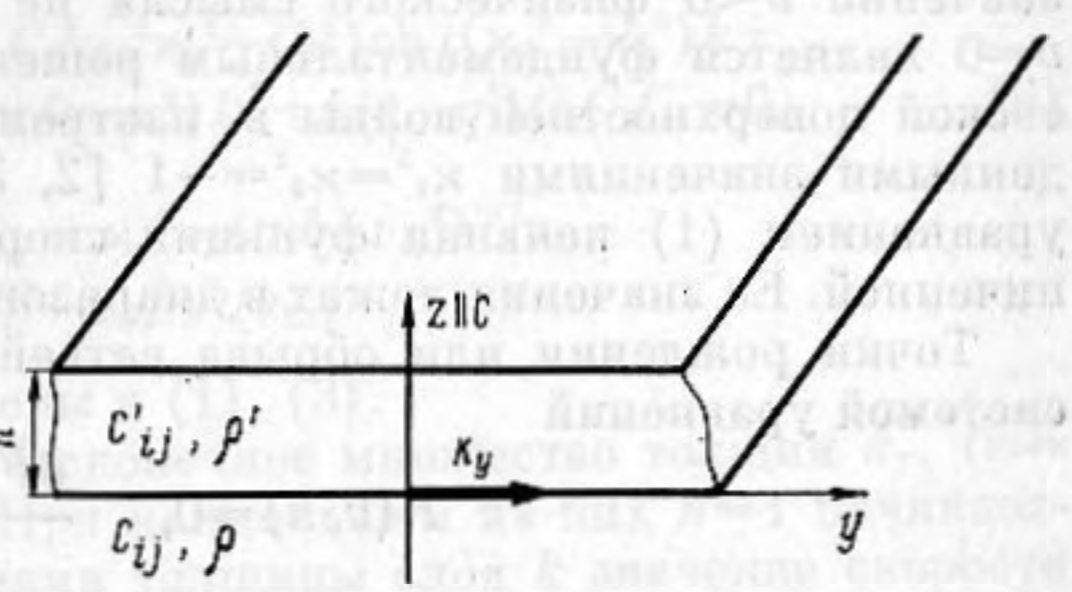
РЭЛЕЕВСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В МЯГКОМ ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ НА ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОДЛОЖКЕ

Кессених Г. Г.

Теоретически исследована дисперсионная зависимость скорости рэлеевской волны от толщины «мягкого» слоя. Показано, что в интервале скоростей $v_l<v\leqslant v_T$ существуют рэлеевские волны обычного типа, а в интервале $0\leqslant v\leqslant v_l$ могут существовать волны щелевого типа и медленные рэлеевские волны.

Характеристики поверхностных акустических волн (ПАВ) в слоистых звукопроводах определяются соотношением упругих свойств подложки и слоя и зависят от толщины слоя h [1]. Для поперечно-изотропных материалов слой по отношению к подложке может быть либо «жестким», когда скорость поперечных объемных волн в слое v_l больше, чем в подложке v_T, либо «мягким», когда $v_l<v_T$ [2]. Дисперсионные зависимости скорости ПАВ v от толщины h жесткого слоя были теоретически исследованы в работе [2]. В настоящей работе проводится теоретическое исследование зависимости $v(h)$ для мягкого слоя.

Выберем поперечно-изотропные материалы подложки и слоя так, чтобы выполнялось условие $v_l<v_T$. Пусть выделенные направления C обоих материалов будут параллельны друг другу и перпендикулярны рабочей поверхности и плоскости контакта подложки и слоя (фиг. 1).



Фиг. 1. Взаимное расположение подложки и слоя

Дисперсионное уравнение, в неявном виде определяющее зависимость $v(h)$, полученное в [2] для плоских монохроматических волн с вектором механического смещения $U_n\sim \exp i\cdot(k_jx_j-\omega t)$ из граничных условий жесткого контакта подложки и слоя ($z=0$) и свободной верхней поверхности слоя ($z=h$), запишем в виде

$$F(v,k)=[C_5^2+(1-q')^2\varkappa_3\varkappa_4]\left[\left(C_1^2+C_2^2\varkappa_1\varkappa_2+\frac{C_3^2+C_4^2\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_3\varkappa_4}\right)\operatorname{ch} i(\varkappa_3+\varkappa_4)k-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}+\frac{\varkappa_2}{\varkappa_4}\right)(C_1C_4+C_2C_3)\operatorname{sh} i(\varkappa_3+\varkappa_4)k\right]+ \qquad (1)$$
$$+[C_5^2-(1-q')^2\varkappa_3\varkappa_4]\left[\left(C_1^2+C_2^2\varkappa_1\varkappa_2-\frac{C_3^2+C_4^2\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_3\varkappa_4}\right)\operatorname{ch} i(\varkappa_3-\varkappa_4)k-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}-\frac{\varkappa_2}{\varkappa_4}\right)(C_1C_4+C_2C_3)\operatorname{sh} i(\varkappa_3-\varkappa_4)k\right]+4(1-q')C_5(C_1C_3-C_2C_4\varkappa_1\varkappa_2)=0,$$

где

$$k=k_yh=2\pi h/\lambda,\quad C=C_{44}/C_{44}',\quad C_5=q'\varkappa_3^2+1,$$
$$C_1=Cq'(q\varkappa_1^2+1)+(1-q'),\quad C_2=q(1-q')-Cq'(1-q),$$
$$C_3=C(q\varkappa_1^2+1)-(q'\varkappa_3^2+1),\quad C_4=C(1-q)+q(q'\varkappa_3^2+1).$$

В рассматриваемом случае ПАВ состоит из шести парциальных волн, характеризующихся различными величинами $\varkappa_\alpha = k_{z\alpha}/k_y$: двух в подложке ($\alpha=1, 2$) и четырех в слое ($\varkappa_3=-\varkappa_5, \varkappa_4=-\varkappa_6$), распространяющихся с единой фазовой скоростью $v=\omega/k_y$. Величины $\varkappa_\alpha$ связаны с v следующим образом:

$$\varkappa_1^2=(v^2-v_T^2)/v_T^2, \quad \varkappa_2^2=(v^2-v_{Ly}^2)/v_{Lz}^2, \quad \varkappa_3^2=(v^2-v_t^2)/v_t^2,$$
$$\varkappa_4^2=(v^2-v_{ly}^2)/v_{lz}^2, \quad \rho v_T^2=C_{44}, \quad \rho v_{Ly}^2=C_{22}, \quad \rho v_{Lz}^2=C_{33}, \tag{2}$$
$$\rho' v_t^2=C_{44}', \quad \rho' v_{ly}^2=C_{22}', \quad \rho' v_{lz}^2=C_{33}'.$$

Как и в [2], здесь использовано дополнительное соотношение между упругими постоянными C_{ij}-подложками и C_{ij}-слоя:

$$\frac{C_{44}+C_{23}}{C_{44}-C_{22}}=\frac{C_{44}+C_{33}}{C_{44}+C_{23}}=q, \quad \frac{C_{44}'+C_{23}'}{C_{44}'-C_{22}'}=\frac{C_{44}'-C_{33}'}{C_{44}'+C_{23}'}=q'. \tag{3}$$

Это соотношение означает по существу введение модельной поперечно-изотропной среды, в которой каждое направление есть направление чистой моды [2]. Введение условия (3) не является серьезным ограничением задачи, однако оно упрощает расчеты. Для изотропных материалов это соотношение выполняется строго в силу симметрии.

Уравнение (1) определяет зависимость $v(k)$ как сложную трансцендентную неявную функцию, не все значения которой отвечают ПАВ. Для существования ПАВ необходимо, чтобы величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ были мнимыми и имели одинаковые знаки в соответствии с требованием ограниченности амплитуды ПАВ на бесконечности. Это выполняется при условии $\varkappa_1\varkappa_2 \leqslant 0$. Для обычных материалов подложки и слоя справедливо соотношение $v_l > v_t$, $v_L > v_T$ [1]. Условие существования ПАВ при этом можно записать в виде $v \leqslant v_T$. Значения $v=v_T$, таким образом, являются максимальными. Естественной нижней границей скорости ПАВ, как видно из (1), (2), является значение $v=0$, поскольку в рассматриваемом случае значения $v<0$ физического смысла не имеют. Отметим, что значение $v=0$ является фундаментальным решением граничной задачи для рэлеевской поверхностной волны в изотропном полупространстве с вырожденными значениями $\varkappa_1^2=\varkappa_2^2=-1$ [2, 3]. Таким образом, определяемая уравнением (1) неявная функция скорости ПАВ $v(k)$ является ограниченной. Ее значения лежат в диапазоне $0 \leqslant v \leqslant v_T$.

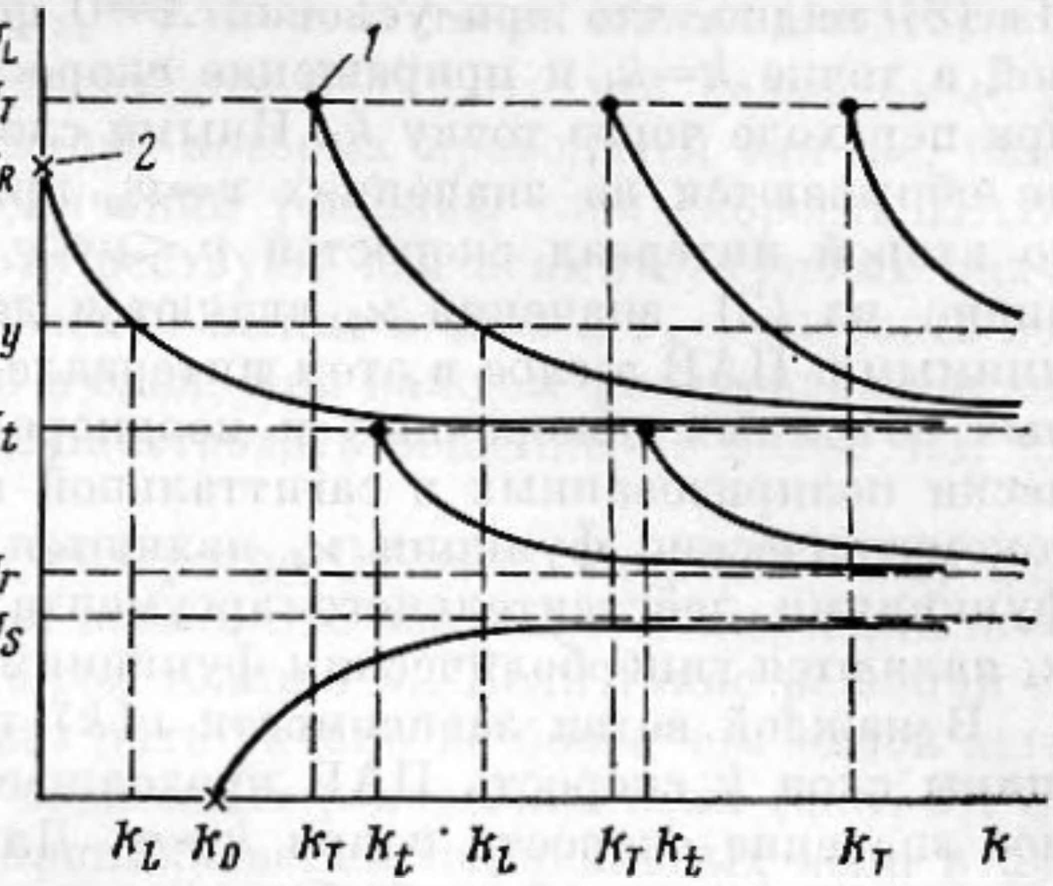
Точки рождения или обрыва ветвей неявной функции определяются системой уравнений

$$F(v,k)=0, \quad \frac{\partial F(v,k)}{\partial v}=0. \tag{4}$$

Как известно, таких точек может быть только конечное число [4]. Из (1), (4) следует, что второе уравнение в (4) выполняется при условии $\partial\varkappa_\alpha/\partial k=0$ ($\alpha=1, 2, 3, 4$).

В рассматриваемом случае мягкого слоя $v_t<v_T$ величины $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ во всем диапазоне скоростей ПАВ, как видно из (2), могут быть обе мнимыми, обе действительными и $\varkappa_4$ — мнимой, а $\varkappa_3$ — действительной при условии $v_{ly}>v_t$. В соответствии с этим весь диапазон возможных значений скорости ПАВ можно разделить на три интервала: 1) $v_{ly} \leqslant v \leqslant v_T$, когда $\operatorname{Im}\varkappa_3=\operatorname{Im}\varkappa_4=0$; 2) $v_t<v\leqslant v_{ly}$, когда $\operatorname{Im}\varkappa_3=\operatorname{Re}\varkappa_4=0$ и 3) $0\leqslant v\leqslant v_t$, когда $\operatorname{Re}\varkappa_3=\operatorname{Re}\varkappa_4=0$ (см. фиг. 2).

Рассмотрим последовательно все три интервала скоростей ПАВ v и особенности функции $v(k)$ в каждом из них. В интервале $v_{ly}\leqslant v\leqslant v_T$ обе величины $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ являются действительными и отвечают объемным продольным и поперечным парциальным волнам в слое, испытывающем полное внутреннее отражение от ограничивающих его поверхностей. Здесь имеет место обычная ПАВ рэлеевского типа [1]. При этом, как видно из (2), все тригонометрические функции от $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ в (1) являются обычными периодическими функциями действительного аргумента. Следовательно, $v(k)$ в этом диапазоне является многозначной функцией, так что каждое фиксированное значение скорости $v=\mathrm{const}$ может отвечать



Фиг. 2. Пример зависимости скорости ПАВ v в подложке из поперечно-изотропного материала с поперечно-изотропным слоем от относительной толщины слоя $k=2\pi h/\lambda$: v_R, v_T, v_L – скорости рэлеевской волны, объемной поперечной и объемной продольной волн в подложке соответственно; v_r, v_t, v_l – соответствующие скорости в слое; v_S – скорость волны Стоунли на границе подложки и слоя, 1 – объемные поперечные волны, 2 – поверхностные волны

бесконечному числу толщин слоя k, и при каждой достаточно большой фиксированной толщине слоя $k=\text{const}$ может существовать бесконечное число мод ПАВ с различной скоростью v. Иными словами, может существовать бесконечное число ветвей зависимости $v(k)$ [1]. Первая ветвь этой зависимости начинается со значения скорости v_R рэлеевской поверхностной волны в полубесконечной подложке без слоя при $k=0$, определяемой полученным из (1) уравнением

$$(q\varkappa_1^2+1)^2=-(q-1)^2\varkappa_1\varkappa_2. \tag{5}$$

Все последующие ветви начинаются со значения $v=v_T$ при толщинах слоя $k=k_T$, определяемых полученным из (1) при условии $\varkappa_1=0$ уравнением

$$\begin{aligned}&[C_5^2+(1-q')^2\varkappa_3^0\varkappa_4^0][(C_1^2\varkappa_3^0\varkappa_4^0+C_3^2)\operatorname{ch} i(\varkappa_3^0+\varkappa_4^0)k-\\&\quad-\varkappa_2^0\varkappa_3^0(C_1C_4+C_2C_3)\operatorname{sh} i(\varkappa_3^0+\varkappa_4^0)k]+\\&+[C_5^2-(1-q')^2\varkappa_3^0\varkappa_4^0][(C_1^2\varkappa_3^0\varkappa_4^0-C_3^2)\operatorname{ch} i(\varkappa_3^0-\varkappa_4^0)k+\\&+\varkappa_2^0\varkappa_3^0(C_1C_4+C_2C_3)\operatorname{sh} i(\varkappa_3^0-\varkappa_4^0)k]+4(1-q')C_1C_3C_5=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\varkappa_3^0=(v_T^2-v_t^2)^{1/2}/v_t,\quad \varkappa_4^0=(v_T^2-v_{ly}^2)^{1/2}/v_{lz},$$
$$\varkappa_2^0=(v_T^2-v_{Ly}^2)^{1/2}/v_{Lz},$$

а q', q, C_n ($n=1, 2, 3, 4, 5$) определены в (1), (3).

Из (6) видно, что существует бесконечное множество толщин k_{Tn} ($n=1, 2, 3\ldots$), при которых $v=v_T$. При наименьшем из них $n=1$ начинается ветвь Сезавы [1]. При увеличении толщины слоя k значение скорости ПАВ v для каждой ветви уменьшается и приближается к значению $v=v_{ly}$ (см. фиг. 2), которое отвечает скорости объемной продольной волны в слое с $\varkappa_4=0$ и является граничным для первого интервала скорости и начальным для второго интервала $v_t<v\leqslant v_{ly}$. Из уравнения (1) при условии $\varkappa_4=0$ найдем уравнение для толщин слоя, при которых $v=v_{ly}$:

$$\begin{aligned}&C_5^2(C_1^2-C_2^2\varkappa_{01}\varkappa_{02})\cos\varkappa_{03}k-\frac{\varkappa_{01}}{\varkappa_{03}}(C_1C_4+C_2C_3)\sin\varkappa_{03}k+\\&+2(1-q')C_5(C_1C_3+C_2C_4\varkappa_{01}\varkappa_{02})=0,\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\varkappa_{01}=(v_T^2-v_{ly}^2)^{1/2}/v_T,\quad \varkappa_{02}=(v_{Ly}^2-v_{ly}^2)^{1/2}/v_{Lz},$$
$$\varkappa_{03}=(v_{ly}^2-v_t^2)^{1/2}/v_t.$$

Из (7) видно, что существует бесконечное число толщин слоя k_l, при которых $v=v_{ly}$ (фиг. 2). Для того чтобы выяснить, как ведет себя функция $v(k)$ при этих толщинах, представим эту функцию в окрестности точки k_l, пользуясь уравнениями (1), (2), в виде

$$A_{\substack{v=v_{ly}\\k=k_l}}(v-v_{ly})+B_{\substack{v=v_{ly}\\k=k_l}}(k-k_l)=0. \tag{8}$$

Из (8) видно, что при условии $A\neq0$ функция $v(k)$ является непрерывной в точке $k=k_l$ и приращение скорости $\Delta v=v-v_{ly}$ изменяет свой знак при переходе через точку k_l. Иными словами, все ветви зависимости $v(k)$ не обрываются на значениях $v=v_{ly}$ при $k=k_l$, а переходят непрерывно во второй интервал скоростей $v_t<v\leqslant v_{ly}$. В этом втором интервале, как видно из (2), значения $\varkappa_3$ являются действительными, а значения $\varkappa_4$ – мнимыми. ПАВ в слое в этом интервале состоит из линейно поляризованных объемных поперечных и неоднородных продольных волн, эллиптически поляризованных в сагиттальной плоскости. В уравнении (1) тригонометрические функции $\varkappa_3$ являются обычными тригонометрическими функциями действительного аргумента, а тригонометрические функции $\varkappa_4$ являются гиперболическим функциями действительного аргумента.

В каждой ветви зависимости $v(k)$ при дальнейшем увеличении толщины слоя k скорость ПАВ продолжает уменьшаться. Найдем предельное значение скорости v при $k\to\infty$. Для этого уравнение (1) во втором интервале скоростей $v_t<v\leqslant v_{ly}$, где $\varkappa_4$ – мнимая величина, и все тригонометрические функции от $\varkappa_4$ можно приближенно заменить их асимптотическими значениями при больших толщинах слоя k, представим в виде

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[\varkappa_3 k+\operatorname{arctg} f_1(\varkappa_4 k)]=f_2(\varkappa_4 k), \tag{9}$$

где f_1 и $f_2(k,\varkappa)$ – ограниченные аналитические функции действительного аргумента. Из (9) и (2), переходя к пределу при $k\to\infty$, получим для каждой ветви $v_n(k)$ с фиксированным номером n

$$\lim_{k\to\infty} v_n^2(k)=v_t^2\left\{1+\frac{4}{k^2}[\operatorname{arctg} f_1-\operatorname{arctg} f_2\pm n\pi]^2\right\}=v_t^2. \tag{10}$$

Таким образом, два интервала скоростей $v_{ly}\leqslant v\leqslant v_T$ и $v_t<v\leqslant v_{ly}$ представляют собой единый интервал $v_t<v\leqslant v_T$, в котором зависимость $v(k)$ является многозначной. В этом едином интервале существует бесконечное множество ветвей зависимости $v(k)$, первая из которых начинается со значения v_R при $k=0$, а все последующие – со значений v_T при k_T. При увеличении толщины слоя значения скорости в каждой ветви $v(k)$ в пределе $k\to\infty$ стремятся асимптотически к значению скорости объемной сдвиговой волны в слое v_t. В этом интервале скоростей $v_t<v\leqslant v_T$ имеют место обычные рэлеевские волны, характер которых изменяется с увеличением толщины слоя.

В третьем интервале скоростей $0\leqslant v\leqslant v_t$ величины $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$, как видно из (2), являются мнимыми и ПАВ целиком состоит из неоднородных (поперечных и продольных) эллиптически поляризованных волн в подложке и в слое. Все тригонометрические функции от $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ в (1) являются гиперболическими функциями действительного аргумента.

В этом интервале скоростей максимальным значением является $v=v_t$, при котором $\varkappa_3=0$. Из уравнения (1) найдем толщины слоя, при которых $\varkappa_3=0$:

$$C_5^2(C_1^2-C_2^2\varkappa_{10}\varkappa_{20})\operatorname{ch}\varkappa_{04}k+\frac{\varkappa_{20}}{\varkappa_{04}}(C_1C_4+C_2C_3)\operatorname{sh}\varkappa_{04}k+$$

$$+2(1-q')C_5(C_1C_3-C_2C_4\varkappa_{10}\varkappa_{20})=0, \tag{11}$$

где

$$\varkappa_{10}=\frac{(v_T^2-v_t^2)^{1/2}}{v_t},\quad \varkappa_{20}=\frac{(v_{Ly}^2-v_t^2)^{1/2}}{v_{Lz}},\quad \varkappa_{04}=\frac{(v_{ly}^2-v_t^2)^{1/2}}{v_{lz}}.$$

Уравнение (11) можно представить в виде

$$R_1+R_2 l^{-\varkappa_{04}k}+R_3 l^{\varkappa_{04}k}=0, \tag{12}$$

где R_1, R_2, $R_3\sim$const. Система трех функций $\{1,\ \exp(-\varkappa_{04}k),\ \exp(\varkappa_{04}k)\}$, как известно, является Чебышевской относительно k [4], следовательно, уравнение (11) может иметь не больше двух решений для k_t, при которых $v=v_t$. При условии $\partial^2 v/\partial k^2|_{k=k_t}\neq 0$ из этих точек может начаться не более двух различных ветвей зависимости $v(k)$. Это так называемые рэлеевские ПАВ щелевого типа, анализ которых проводится так же, как и для жесткого слоя [2]. При увеличении толщины слоя скорость ПАВ v уменьшается и в пределе $k\to\infty$ существуют два асимптотических значения скорости: v_r — скорость рэлеевской волны в слое и v_S — скорость волны Стоунли на границе подложки и слоя. При каждом фиксированном значении скорости $v=\text{const}$ может существовать решение не более чем для четырех толщин слоя k.

Минимальным значением v в интервале $0\leqslant v\leqslant v_t$ является $v=0$, формально отвечающее поверхностной волне. Это значение может быть получено также не более чем для четырех толщин k_0. Если такие решения существуют, то каждое из них может дать начало не более чем одной ветви зависимости $v(k)$ [2]. Это ветви медленных рэлеевских волн (фиг. 2). Обратные относительные глубины проникновения парциальных волн в подложку и в слой при $v=0$ принимают вид значения

$$\varkappa_{01}^2=\varkappa_{03}^2=-1,\quad \varkappa_{02}^2=-C_{22}/C_{33},\quad \varkappa_{04}^2=-C_{22}'/C_{33}'. \tag{12}$$

Для поперечно-изотропного слоя на изотропной подложке получим из (1) при условии $k\ll 1$, что $v=0$ в первом приближении при толщинах слоя

$$k_0=\frac{C(1+q')(3-4\sigma)}{(\varkappa_{04}^2+1)(q'-1)(1-\sigma)}, \tag{13}$$

где $\sigma=C_{12}/(C_{12}+C_{11})$ — коэффициент Пуассона, а C и q' определены в (1), (3). Поскольку σ изменяется в пределах $-1\leqslant\sigma\leqslant{}^1/_2$, определяемых условием устойчивости твердого тела [7], то толщины $k_0\neq 0$ могут существовать при $|\varkappa_{04}^2|<1$, $|q'|<1$. Для изотропного слоя на изотропной подложке $q'=-1$, $\varkappa_{04}^2=-1$ и $k_0=0$.

Помимо (13), уравнение (1) содержит еще одно решение $v=0$, не зависящее от толщины слоя. Отметим, что значение $v=0$ является также решением задачи о поверхностной волне в полубесконечном изотропном полупространстве [8] (подложка без слоя, $k=0$), а кроме того, значение $v=0$ при $k_0=0$ является точкой рождения антисимметричной ветви зависимости $v(k)$ в бесконечной поперечно-изотропной пластинке (слой без подложки, $C=0$) [6]. Решение для пластинки с $k=0$ не представляет физической реальности. Решение же для полупространства является вырожденным, поскольку $\varkappa_{01}=\varkappa_{02}$. При этом решение для амплитуд механического смещения принимает вид $U_n^0\sim(U_1+zU_2)\exp kz$, и значение $v=0$ является решением граничной задачи для упругого полупространства лишь при единственном значении коэффициента Пуассона $\sigma={}^3/_4$, которое находится далеко за пределами устойчивости изотропного твердого тела. Существование решений для $k_0\neq 0$ (13) означало бы наличие в устойчивой слоистой системе статических неоднородных, модулированных в пространстве деформаций при отсутствии внешних напряжений, что противоречит теореме единственности в теории упругости [5]. Условие (13) отвечает, по-видимому, неустойчивости слоистой системы.

Отсутствие решений для $k_0\neq 0$ в конкретной слоистой системе не означает отсутствие ветвей медленных волн со скоростями $v<v_r$, v_S. Однако точки рождения и характер зависимости $v(k)$ этих ветвей нуждаются в дальнейших исследованиях. Существование медленных рэлеевских волн в интервале $0\leqslant v\leqslant v_r$ для жесткого слоя в специальном случае $C\ll 1$, $\rho/\rho'\ll 1$ (малое возмущение антисимметричной ветви зависимости $v(k)$ для изотропной пластинки) и при малых толщинах слоя $k\ll 1$ было показано в [6].

Таким образом, в слоистых звукопроводах, состоящих из поперечно-изотропной подложки с мягким поперечно-изотропным слоем в интервале скоростей $v_t\leqslant v\leqslant v_T$ существуют рэлеевские волны, для которых зависимость $v(k)$ имеет бесконечное множество ветвей. Первая из этих ветвей начинается со значения скорости рэлеевской волны в подложке v_R при $k=0$, а все последующие ветви начинаются со значения скорости объемной поперечной волны в подложке v_T. ПАВ вначале состоит из эллиптически поляризованных волн в подложке и линейно поляризованных волн в слое. При увеличении толщины слоя в пределе $k\to\infty$ скорость ПАВ в каждой ветви асимптотически стремится к скорости объемной поперечной волны в слое v_t. Характер поляризации волн в слое при увеличении толщины слоя также изменяется: они становятся частично поляризованными, когда скорость ПАВ становится меньше скорости объемной продольной волны в слое v_l.

В интервале скоростей $0\leqslant v\leqslant v_t$ ПАВ целиком состоит из эллиптически поляризованных волн в подложке и в слое. В этом интервале могут существовать рэлеевские ПАВ щелевого типа, имеющие не более двух ветвей зависимости $v(k)$, которые начинаются со значения скорости объемной поперечной волны в слое v_t. Зависимость $v(k)$ здесь может быть немонотонной, так что каждое значение скорости ПАВ может иметь место не более чем при четырех различных толщинах слоя. В этом же интервале скоростей могут существовать медленные рэлеевские волны, имеющие не более четырех ветвей зависимости $v(k)$. В пределе $k\to\infty$ здесь могут существовать два асимптотических значения: скорость рэлеевской ПАВ в слое v_r и скорость ПАВ Стоунли на границе подложки и слоя v_S.

Автор искренне благодарен В. П. Плесскому и В. И. Альшицу за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олинер А.* Поверхностные акустические волны. М.: Мир, 1981.
2. *Иванов Л. Д., Кессених Г. Г.* Рэлеевские поверхностные волны в жестком поперечно-изотропном слое на поперечно-изотропной подложке // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 665–669.
3. *Lothe J., Barnett D. M.* On the existence of surface-wave solution for anisotropic elastic half-spaces with free surface // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. № 2. P. 428–432.
4. *Коровкин П. Г.* Линейные операторы и теории приближений. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
6. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
8. *Taylor D. B.* On the existence of elastic surface waves // Q. H. Mech. appl. Math. 1978. V. 31. P. 335–347.

Институт кристаллографии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.I.1987
после исправления
25.X.1987