

УДК 534.171:534.231.1:551.463.21:551.596.1

## ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ И ИЗМЕНЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА, ИЗЛУЧЕННОГО ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ

*Осташев В. Е.*

Выведены формулы для эффекта Доплера в движущейся среде и для изменения направления распространения звука, излученного движущимся источником. Применение полученных формул в конкретных задачах иллюстрируется двумя примерами.

В литературе (см., например, [1—4]) эффект Доплера обычно рассматривается в неподвижной среде. Обобщение классических формул для эффекта Доплера на случай движущейся среды представляет интерес для акустики океана, где учет влияния течений на распространение звука становится актуальной задачей, и для атмосферной акустики, где скорость ветра зачастую сравнима со скоростью источника или приемника. Движение узконаправленного источника должно приводить еще к одному эффекту — к изменению направления распространения звука. Благодаря этому эффекту движение вертолетов или кораблей с расположенными на них узконаправленными антеннами может приводить к существенному изменению геометрии озвученной области пространства. Настоящая статья посвящена теоретическому рассмотрению эффекта Доплера в движущейся среде и анализу изменения направления распространения звука, излученного движущимся источником. Заметим, что в литературе эти вопросы ранее не освещались.

Вывод формул, описывающих рассматриваемые в статье эффекты, проведем на примере источника, создающего плоскую волну. Отметим, что полученные при этом формулы справедливы также для других источников, если звуковую волну в точке наблюдения можно считать квазиплоской. Предположим, что характерные масштабы изменения скорости звука  $c$  и скорости движения среды  $v$  много больше длины волны  $\lambda$  и размеров источника  $a$ . В такой крупномасштабной среде изменение направления распространения звука обуславливается не только движением источника, но и рефракцией звука. С другой стороны, рефракция звука приводит к тому, что в неоднородной среде приходящий из источника в точку наблюдения луч не совпадает с аналогичным лучом в однородной среде. Поскольку эти лучи составляют с направлением движения источника разные углы, то в точке наблюдения частота звука для однородной и неоднородной сред будет различной. Рефракция звука подробно изучена в литературе, поэтому в настоящей статье рефракцией будем пренебрегать. Для этого вблизи источника выделим область пространства с характерным масштабом, много большим  $\lambda$ ,  $a$ , в которой  $c$ ,  $v$  постоянны и равны  $c_1$ ,  $v_1$ . Формулы для эффекта Доплера и изменения направления распространения звука при движении источника выводятся именно для этой области пространства. Если же точка наблюдения находится вне выделенной области, то изменение частоты и направления распространения рассчитываются по этим формулам и известным соотношениям для рефракции звука.

Пусть источник плоских волн движется с постоянной скоростью  $u$ , относительно неподвижной прямоугольной декартовой системы координат  $K$ , в которой радиус-вектор  $\mathbf{R} = (x, y, z)$ . С источником свяжем движущуюся со скоростью  $u_1$  систему координат  $K_1$ , в которой радиус-вектор  $\mathbf{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . Без ограничения общности считаем, что плоскость, содер-

жащая векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ , совпадает с плоскостями  $z=0$  и  $z_1=0$ . В этом случае преобразование системы координат  $K$  к системе координат  $K_1$  имеет вид  $z=z_1, \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{u}_1 t$ , где  $\mathbf{r}=(x, y), \mathbf{r}_1=(x_1, y_1), t$  — время. Звуковое поле  $p$ , создаваемое в однородной неподвижной среде источником плоских волн, находящимся в системе координат  $K_1$ , имеет вид

$$p(\mathbf{R}_1, t) = \exp(-i\omega_1 t + iq_1 z_1 + i\mathbf{x}\mathbf{r}_1). \quad (1)$$

В выражении (1)  $\omega_1 = kc_1$  — частота источника,  $\mathbf{x}$  и  $q_1$  — проекции волнового вектора  $\mathbf{k}=(\mathbf{x}, q_1)$  на плоскость  $x_1, y_1$  и на ось  $z_1$ . Рассматриваемая плоская волна распространяется в направлении единичного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k = (\mathbf{e} \cos \theta, \sin \theta)$  (см. фиг. 1). Здесь единичный вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{x}/x$  определяет азимутальное направление распространения волны,  $\theta$  — угол скольжения, причем для определенности считаем  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Движение источника и среды приводят к изменению звукового поля, определяемого выражением (1). Сначала рассмотрим это изменение в системе координат  $K_1$ , в которой источник покоится, а вектор скорости движения среды  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1$  лежит в плоскости  $x_1, y_1$ . В этой системе координат звуковое поле, создаваемое рассматриваемым источником, имеет вид [5]

$$p(\mathbf{R}_1, t) = A \exp(-i\omega_1 t + iq_1 z_1 + i\mathbf{x}\mathbf{r}_1), \quad (2)$$

где  $q_1 = [(\omega_1 - \mathbf{x}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1))^2 / c_1^2 - \mathbf{x}^2]^{1/2}$  — проекция на ось  $z_1$  волнового вектора,  $A = 1 - \mathbf{x}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) / \omega_1$  — амплитуда. В системе координат  $K_1$  частота  $\omega_1$  связана с волновым вектором  $\mathbf{k}_1 = (\mathbf{x}, q_1)$  рассматриваемой плоской волны дисперсионным уравнением

$$\omega_1 = k_1 c_1 + \mathbf{x}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1). \quad (3)$$

При  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 = 0$  выражение (2) переходит в (1).

Единичный вектор нормали к волновому фронту плоской волны, определяемой выражением (2), равен  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}_1 / k_1 = (\mathbf{e} \cos \theta_1, \sin \theta_1)$ . Азимутальное направление вектора  $\mathbf{n}_1$  совпадает с азимутальным направлением вектора  $\mathbf{n}$ , а угол скольжения  $\theta_1$ , вообще говоря, отличается от  $\theta$  (см. фиг. 1). Выразим угол  $\theta_1$  через угол  $\theta$ . Для этого воспользуемся соотношением  $\cos \theta_1 = \mathbf{x} / k_1$ , справедливым при  $q_1^2 \geq 0$ . Подставляя в это соотношение значение  $k_1$  из дисперсионного уравнения (3) и учитывая, что  $\omega_1 = kc_1$ , а  $\cos \theta = \mathbf{x} / k$ , получим

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta \mathbf{e}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) / c_1}. \quad (4)$$

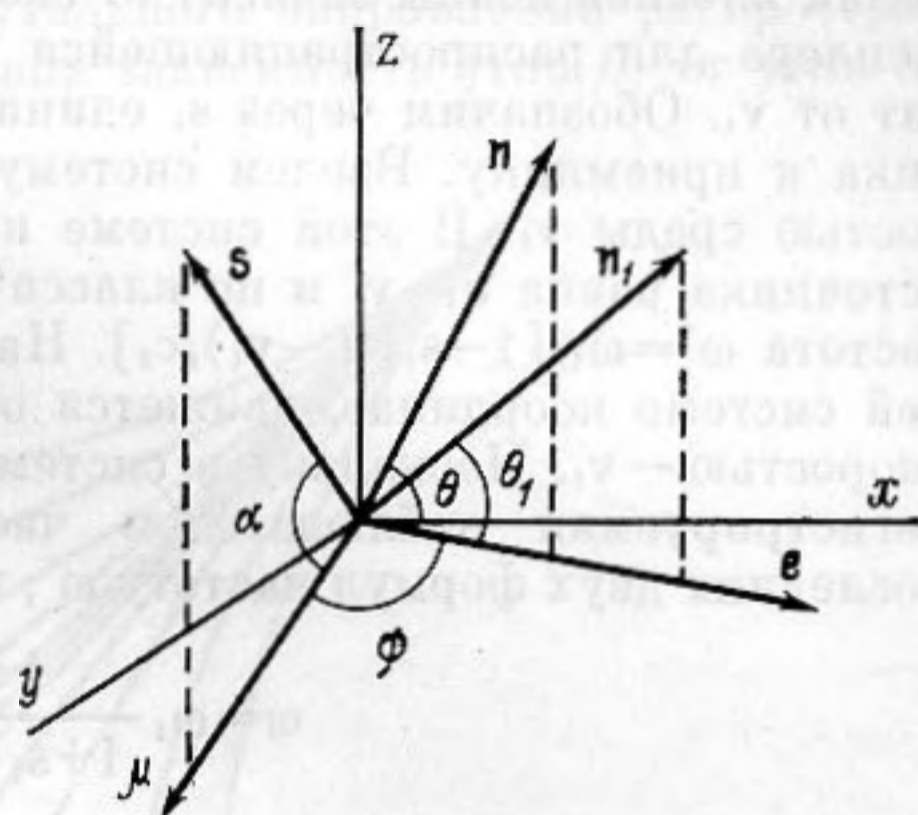
Можно показать, что при  $q_1^2 \geq 0$  правая часть выражения (4) меньше либо равна 1. Если же  $q_1^2 < 0$ , то выражение (2) описывает неоднородную плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора  $\mathbf{e}$ . В этом случае  $\theta_1 = 0$ .

В неподвижной системе координат  $K$  выражение (2) для рассматриваемой плоской волны принимает вид

$$p(\mathbf{R}, t) = A \exp(-i\omega t + iq_1 z + i\mathbf{x}\mathbf{r}). \quad (5)$$

Из (5) следует, что при переходе к неподвижной системе координат волновой вектор  $\mathbf{k}_1 = (\mathbf{x}, q_1)$ , остается постоянным, а изменяется частота  $\omega$ , определяемая следующим равенством:

$$\omega = \omega_1 + \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_1. \quad (6)$$



Фиг. 1. Расположение векторов  $\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{n}_1$  в пространстве

В формуле (6) мы учли, что  $\mathbf{k}u_1 = k_1 u_1$ . Эта формула выражает эффект Доплера и связывает частоту  $\omega_1$  плоской волны, излученной движущимся со скоростью  $u_1$  источником, с частотой  $\omega$ , воспринимаемой неподвижным наблюдателем. Из (6) следует, что для фиксированной плоской волны, характеризуемой вектором  $\mathbf{k}$ , эффект Доплера не зависит от скорости среды. Этот результат легко объяснить физически. Движение среды приводит к изменению показателя преломления, который не влияет на частоту фиксированной плоской волны.

Однако, в большинстве случаев представляет интерес не эффект Доплера (6) для фиксированной плоской волны, а изменение частоты волны, излученной в заданном направлении. Поскольку направление распространения плоской волны зависит от скорости движения среды  $v_1$ , то и эффект Доплера для распространяющейся в заданном направлении волны зависит от  $v_1$ . Обозначим через  $s_1$  единичный вектор в направлении от источника к приемнику. Введем систему координат  $K'$ , движущуюся со скоростью среды  $v_1$ . В этой системе координат среда неподвижна, скорость источника равна  $u_1 - v_1$  и по классической формуле для эффекта Доплера частота  $\omega' = \omega_1 / [1 - s_1(u_1 - v_1)/c_1]$ . Наблюдатель, находящийся в неподвижной системе координат, движется относительно системы координат  $K'$  со скоростью  $-v_1$ . Поскольку в системе координат  $K'$  среда неподвижна, то регистрируемая наблюдателем частота  $\omega = \omega'(1 + s_1 v_1/c_1)$ . Исключая из последних двух формул частоту  $\omega'$ , приходим к формуле

$$\omega = \omega_1 \frac{1 + s_1 v_1/c_1}{1 + s_1(v_1 - u_1)/c_1}.$$

При  $v_1 = 0$  формула (7) переходит в классическую формулу для эффекта Доплера [1-4]. При  $v_1 \neq 0$  формула (7) обобщает эту классическую формулу на случай движущейся среды.

Перейдем теперь к рассмотрению эффекта изменения направления распространения звука, излученного движущимся источником. Этот эффект обуславливается, во-первых, изменением направления распространения плоской волны в системе координат  $K_1$ , связанной с движущимся источником. Как показано выше, в системе  $K_1$  единичный вектор нормали к волновому фронту рассматриваемой волны  $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{e} \cos \theta_1, \sin \theta_1)$  не совпадает с вектором  $\mathbf{n} = (\mathbf{e} \cos \theta, \sin \theta)$ , характеризующим направление распространения волны при  $u_1 = v_1 = 0$ . При этом угол  $\theta_1$  выражается через угол  $\theta$  по формуле (4). Во-вторых, рассматриваемый эффект обуславливается абберацией звука — изменением направления распространения плоской волны при переходе от движущейся системы координат  $K_1$  к неподвижной  $K$ . В неподвижной системе координат  $K$  направление распространения звуковой волны задается единичным вектором  $\mathbf{s} = (\mu \cos \alpha, \sin \alpha)$ , касательным к звуковому лучу. Здесь  $\mu$  — единичный вектор, определяющий азимутальное направление  $\mathbf{s}$ ,  $\alpha$  — угол скольжения (см. фиг. 1). Из выражения (5) следует, что в системе координат  $K$  единичный вектор нормали к волновому фронту рассматриваемой волны равен  $\mathbf{n}_1$ , т. е. совпадает с аналогичным вектором в системе  $K_1$ . Поэтому вектор  $\mathbf{s}$  определяется следующими соотношениями (см., например, [6]):

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_1/c_1}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_1/c_1|} = \frac{(\mathbf{e} \cos \theta_1 + \mathbf{v}_1/c_1, \sin \theta_1)}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_1/c_1|}. \quad (8)$$

Вектор  $\mu$  однозначно задается углом  $\psi$  между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mu$ . Считаем, что  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ; положительным значениям  $\psi$  соответствует поворот вектора  $\mu$  против часовой стрелки относительно вектора  $\mathbf{e}$ . Из (8) следует, что  $\mu = (\mathbf{e} \cos \theta_1 + \mathbf{v}_1/c_1) / |\mathbf{e} \cos \theta_1 + \mathbf{v}_1/c_1|$ . Из этой формулы находим угол  $\psi$ :

$$\sin \psi = (\mathbf{e}_\perp \mathbf{v}_1/c_1) / [(\cos \theta_1 + \mathbf{e} \mathbf{v}_1/c_1)^2 + (\mathbf{e}_\perp \mathbf{v}_1/c_1)^2]^{1/2}, \quad (9)$$

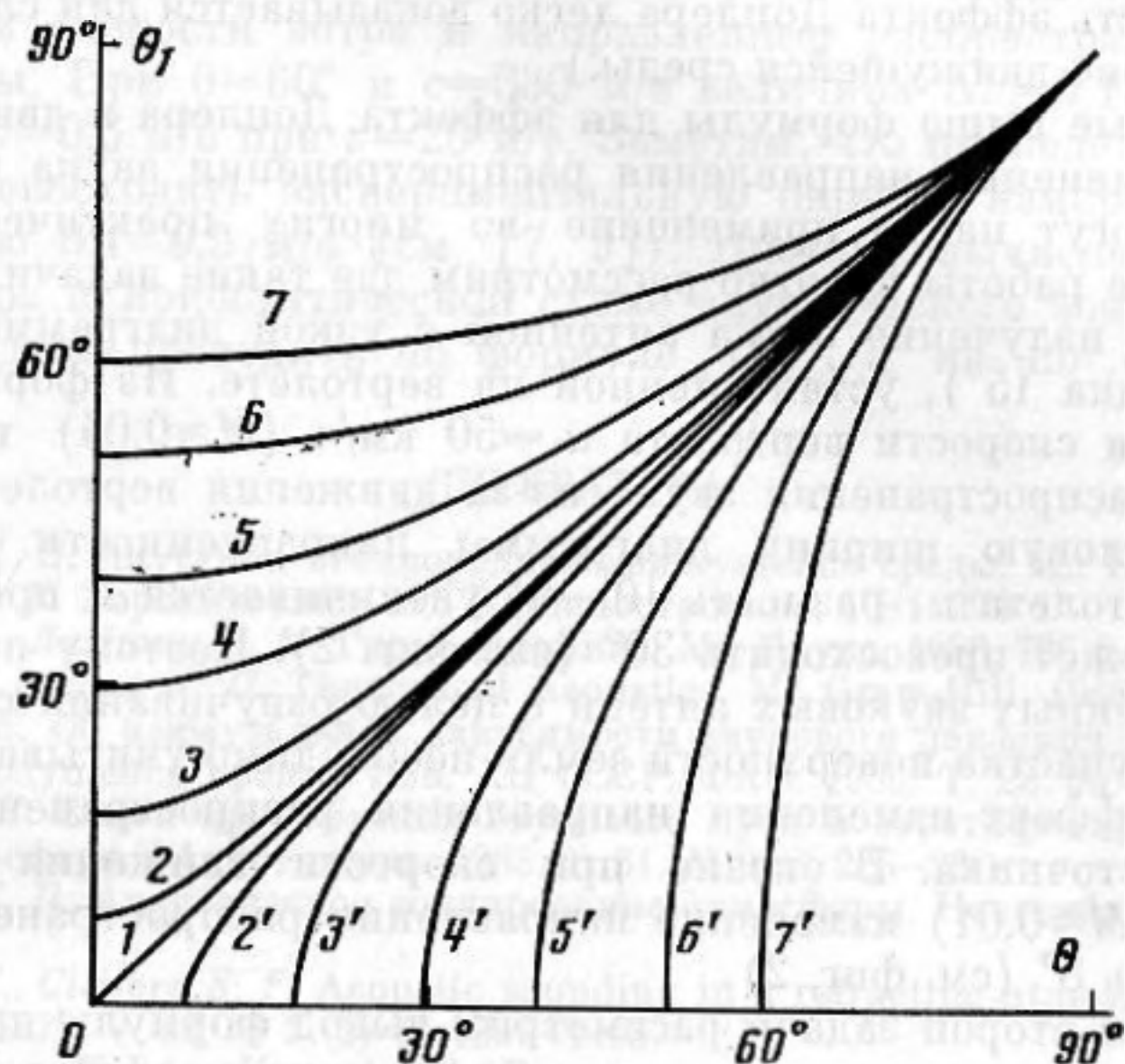
$$\cos \psi = (\cos \theta_1 + \mathbf{e} \mathbf{v}_1/c_1) / [(\cos \theta_1 + \mathbf{e} \mathbf{v}_1/c_1)^2 + (\mathbf{e}_\perp \mathbf{v}_1/c_1)^2]^{1/2}.$$

Здесь вектор  $\mathbf{e}_\perp$  получается поворотом вектора  $\mathbf{e}$  в плоскости  $x, y$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки.

Из соотношений (8) находим угол скольжения  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \left[ \frac{\cos^2 \theta_1 + 2 \cos \theta_1 e v_1 / c_1 + v_1^2 / c_1^2}{1 + 2 \cos \theta_1 e v_1 / c_1 + v_1^2 / c_1^2} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Таким образом, формулы (4), (9), (10) определяют изменение азимутального направления распространения плоской волны и ее угла скольжения, вызванные движением источника и среды. Эти формулы выражают изменение направления распространения звука, излученного движущимся источником в движущейся среде. Для неподвижной среды эти формулы существенно упрощаются. В этом случае из (9), (10) следует, что  $\psi=0$ ,  $\alpha=\theta_1$ . Поэтому в неподвижной среде движение источника приводит к изменению угла скольжения излученной волны в соответствии с формулой (4) и не приводит к изменению азимутального направления распространения этой волны. На фиг. 2 изображена зависимость угла  $\theta_1$  от угла  $\theta$ ,



Фиг. 2. Зависимость угла  $\theta_1$  от угла  $\theta$  при разных значениях числа Маха  $M$  скорости источника: 1 — 0; 2 — 0,01; 2' — -0,01; 3 — 0,05; 3' — -0,05; 4 — 0,15; 4' — -0,15; 5 — 0,3; 5' — -0,3; 6 — 0,6; 6' — -0,6; 7 — 1; 7' — -1

рассчитанная по формуле (4) при  $v_1=0$  и разных значениях числа Маха  $M=e u_1 / c_1$ .

Рассмотрим, как видоизменяется полученная выше формула (7) для эффекта Доплера, если источник неподвижен, а приемник движется с постоянной скоростью  $u_2$ . Вблизи приемника выделим область пространства, в которой  $s$ ,  $v$  постоянны и равны  $s_2$ ,  $v_2$ . Предположим, что источник, частота которого равна  $\omega$ , находится в этой области пространства. Рассмотрим систему координат  $K_2$ , движущуюся со скоростью источника  $u_2$ . В этой системе координат источник движется со скоростью  $-u_2$ , скорость движения среды равна  $v_2 - u_2$ , а приемник неподвижен, так что измеряемую им частоту  $\omega_2$  можно определить из формулы (7). Подставляя в (7) скорость источника и скорость движения среды относительно системы координат  $K_2$ , получим

$$\omega_2 = \omega \frac{1 + s_2 (v_2 - u_2) / c_2}{1 + s_2 v_2 / c_2}, \quad (11)$$

где  $s_2$  — единичный вектор в направлении от источника к приемнику.

В неоднородной крупномасштабной движущейся среде вблизи источника и приемника, которые также движутся, можно выделить области пространства, в которых справедливы формулы (7) и (11). Входящие в эти

формулы векторы  $s_{1,2}$ ,  $v_{1,2}$ ,  $u_{1,2}$  определены относительно некоторой выбранной системы координат  $K_0$ . Рассмотрим звуковую волну, излученную источником и приходящую в приемник. В неоднородной среде направление распространения этой волны изменяется, поэтому  $s_1 \neq s_2$ . Однако частота этой волны  $\omega$  в системе координат  $K_0$  остается постоянной. Исключая из (7) и (11) частоту  $\omega$ , получим

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 + s_1 v_1 / c_1}{1 + s_1 (v_1 - u_1) / c_1} \frac{1 + s_2 (v_2 - u_2) / c_2}{1 + s_2 v_2 / c_2}.$$

Эта формула выражает эффект Доплера в наиболее общем случае, когда источник и приемник движутся со скоростями  $u_1$  и  $u_2$  относительно системы координат  $K_0$ , а неоднородная движущаяся среда является крупномасштабной. Отметим, что эффект Доплера в неоднородной движущейся среде не должен зависеть от выбора системы координат  $K_0$ . (Галилеева инвариантность эффекта Доплера легко доказывается для случая однородной равномерно движущейся среды.)

Полученные выше формулы для эффекта Доплера в движущейся среде и для изменения направления распространения звука при движении источника могут найти применение во многих практических задачах. В заключение работы коротко рассмотрим две такие задачи. Сначала проанализируем излучение звука антенной с узкой диаграммой направленности (порядка  $15^\circ$ ), установленной на вертолете. Из формулы (4) следует, что при скорости вертолета  $u_1 = 50$  км/ч ( $M \approx 0,04$ ) изменение направления распространения звука из-за движения вертолета может превосходить угловую ширину диаграммы направленности. При большей скорости вертолета  $u_1$  разность  $|\theta_1 - \theta|$  увеличивается и при  $u_1 = 200$  км/ч ( $M \approx 0,17$ ) может превосходить  $30^\circ$  (см. фиг. 2). Поэтому при ориентации узконаправленных звуковых антенн с целью озвучивания с вертолета определенного участка поверхности земли необходимо учитывать рассмотренный выше эффект изменения направления распространения звука при движении источника. В океане при скорости движения корабля  $u_1 = 50$  км/ч ( $M \approx 0,01$ ) изменение направления распространения звука может достигать  $8^\circ$  (см. фиг. 2).

В качестве второй задачи рассмотрим вывод формулы для вычисления скорости ветра при акустическом зондировании атмосферы. Пусть  $\omega_n$ ,  $k_n$  — частота и волновой вектор излученной содаром (акустической антенной) волны. Эта волна рассеивается на неоднородностях показателя преломления, движущихся со скоростью ветра  $v$ . Частота  $\omega_n$  и волновой вектор  $k_n$  принимаемой содаром рассеянной волны отличаются от  $\omega_n$  и  $k_n$ . В системе координат, движущейся со скоростью  $v$  вместе с рассеивателем, частота излученной волны  $\omega' = \omega_n - k_n v$ . Из формулы (6) следует, что частота принимаемой волны равна  $\omega_n = \omega' + k_n v$ . Исключая из последних двух формул  $\omega'$  и обозначая  $\Delta\omega = \omega_n - \omega_n$ , получим

$$\Delta\omega = (k_n - k_n) v. \quad (12)$$

Формула (12) хорошо известна в теории акустического зондирования атмосферы (см., например, [7]<sup>1</sup>). Входящие в (12) значения  $k_n$  и  $k_n$  в литературе считают равными  $k_n = k_n = \omega_n / c$ . В моностатической схеме акустического зондирования, когда излучение и прием звука осуществляется одним содаром, последнее соотношение и выражение (12) приводят к расчетной формуле  $V' = \Delta\omega c / 2\omega_n$ , где  $V'$  — проекция скорости ветра на направление распространения принимаемой волны. Неточность такого подхода к вычислению скорости ветра состоит в том, что равенство  $k_n = k_n = \omega_n / c$  справедливо для движущегося рассеивателя и неподвижной среды. На самом же деле среда и рассеиватель движутся с одинаковой скоростью  $v$ . Поэтому в (12)  $k_n = k_n = \omega_n / (c + n_n v)$ , где  $n_n = k_n / k_n$ . Кроме того, в (12) следует учесть, что единичные вектора вдоль направления распро-

<sup>1</sup> Заметим, что полученная в [8] формула для  $\Delta\omega$  (см. формулу (5) работы [8]) не согласуется полностью с классической формулой для эффекта Доплера в случае движущегося источника и неподвижного наблюдателя.

странения излученной и принятой волн равны  $s_n = (\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c) / |\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c|$  и  $s_n = (\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c) / |\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c|$ , где  $\mathbf{n}_n = \mathbf{k}_n / k_n$ . При моностатическом зондировании  $s_n = -s_n$ , так что формула (12) принимает вид

$$\Delta\omega = \frac{\omega_n s_n \mathbf{v} (|\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c| + |\mathbf{n}_n + \mathbf{v}/c|)}{(c + \mathbf{n}_n \mathbf{v})}.$$

Оставляя в этой формуле члены порядка  $v^2/c^2$  и вводя проекцию скорости ветра на направление распространения принимаемой волны  $V = \mathbf{v} s_n$ , получим

$$V = \Delta\omega c / (\omega_n + \omega_n). \quad (13)$$

Таким образом, формула (13) отличается от принятой в литературе формулы  $V' = \Delta\omega c / 2\omega_n$ . Можно показать, что с точностью до членов порядка  $v^2/c^2$  ошибка  $\Delta v$  в определении скорости ветра, обусловленная отличием этих формул, равна  $\Delta v = (V' - V) / \cos \theta = (v^2/c) \cos \theta$ . Здесь  $\theta$  — угол между направлением скорости ветра и направлением распространения принимаемой волны. При  $\theta = 60^\circ$  и  $c = 330$  м/с величина  $\Delta v = 0,15$  м/с при  $v = 10$  м/с и  $\Delta v = 0,6$  м/с при  $v = 20$  м/с. Заметим, что приведенные значения  $\Delta v$  могут превосходить экспериментальную ошибку измерения скорости ветра, равную 0,1–0,3 м/с (см. [7, 9]). Поэтому вычисление проекции скорости ветра в моностатической схеме акустического зондирования атмосферы следует проводить по формуле (13), а не по формуле  $V' = \Delta\omega c / 2\omega_n$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
2. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical Acoustics. Mc Graw-Hill, 1968. 927 p.
5. Осташев В. Е. Об азимутальной зависимости звукового давления в стратифицированной движущейся среде // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22. № 6. С. 634–642.
6. Осташев В. Е. Закон преломления звукового луча в стратифицированной движущейся атмосфере // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 225–228.
7. Красненко Н. П. Акустическое зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1986. 166 с.
8. Georges T. M., Clifford S. F. Acoustic sounding in a refracting atmosphere // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. V. 52. № 5 (2) P. 1397–1405.
9. Каллистратова М. А., Кон А. И. Радиоакустическое зондирование атмосферы. М.: Наука, 1985. 197 с.

Институт физики атмосферы  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
8.XI.1987