АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 4

УДК 534.222

АНАЛИЗ РАБОТЫ ПРИЕМНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ КОМБИНАЦИОННОЙ ЧАСТОТЫ

Степанов Ю. С.

Предложен метод вычисления звукового поля комбинационной частоты, который основан на соотношении взаимности для звуковых полей, являющихся результатом взаимодействия плоской волны с полем источников произвольной конфигурации. Дан пример анализа характеристики направленности приемной параметрической антенны.

Взаимодействие звуковых волн в однородной среде приводит к комбинационному рассеянию звука на звуке. Исследование этого явления привело к созданию параметрических излучателей и приемников звука. Метод, предложенный Вестервельтом [1], решает задачу о комбинационном рассеянии в рамках теории возмущений. Подход Зверева В. А. и Калачева А. И. [2] основан на вычислении смещений точек фазового профиля высокочастотной волны в поле низкочастотной волны. В настоящей работе предложен метод, основанный на построении функции Грина и соотношения взаимности для поля комбинационной частоты созданного взаимодействием плоской волны с полем произвольно распределенных источников. Преимуществом метода является то, что поле в точке выражается через интеграл от значения функции Грина по области источников, которая в большинстве случаев имеет конечные размеры. Сущность подхода заключается в том, что поле комбинационной частоты вычисляется в виде суммы (в пределе интеграла) полей, созданных взаимодействием полей точечных источников с плоской волной; при этом функция, описывающая взаимодействие плоской волны и поля точечного источника, выполняет роль функции Грина. На основе анализа свойств функции Грина сформулировано соотношение взаимности, которое сводит вычисление поля комбинационной частоты в точке к интегралу от значения функции Грина по области источников.

Запишем систему уравнений для первичного поля p_1 и поправки к первичному полю p_2, учитывающей нелинейность уравнений гидродинамики и уравнения состояния в квадратичном приближении [1]:

$$\Box p_1 = Q \tag{1}$$

$$\Box p_2 = -q(p_1, p_1) \tag{2}$$

Первичное поле p_1 состоит из решения неоднородного волнового уравнения p_ω — поля источников с пространственной плотностью $Q=Q(\mathbf{x})\cdot$ $\cdot\exp(-i\omega t)$ и поля плоской волны частотой Ω, волновым вектором $\mathbf{K}$ и амплитудой звукового давления P_Ω. Виртуальные источники q в правой части уравнения (2) являются квадратичной формой от первичного поля p_1 и содержат члены на частотах 2ω, 2Ω и $\omega_\pm=\omega\pm\Omega$. Учитывая линейность уравнения (2), рассмотрим поле источников $q_\pm$ с гармонической зависимостью от времени $\exp(-i\omega_\pm t)$, для которого справедливо уравнение Гельмгольца $(\Delta+k_\pm^2)p_\pm=q_\pm$, где $k_\pm=\omega_\pm/c$, c — скорость звука. Решение этого уравнения выражается через свертку функции плотности источников $q_\pm$ с функцией Грина уравнения Гельмгольца $G_\pm(\mathbf{x}_1, \mathbf{x})=-\exp\cdot$ $\cdot(ik_\pm|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}|)/(4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}|)$:

$$p_\pm(\mathbf{x}_1) = \int d^3x\, q_\pm(P_\Omega \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}), p_\omega(\mathbf{x}))\, G_\pm(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}). \tag{3}$$

Таким образом, процедура расчета звукового поля $p_\pm$ сводится к следующей последовательности: расчет первичного поля источников Q, вычисление поля виртуальных источников $q_\pm$ при помощи уравнения (3).

Рассмотрим альтернативный подход, в котором решение выражается через интеграл от произведения функции плотности источников Q и некоторой функции Грина, зависящей от волнового вектора **k** плоской волны. Учитывая, что квадратичная форма $q_\pm$ линейна по каждому из входящих в нее полей p_ω и p_Ω, а также то, что поле p_ω выражается через свертку функции плотности источников с функцией Грина уравнения Гельмгольца $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)=\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|)/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|)$, преобразуем функцию виртуальных источников $q_\pm$ следующим образом:

$$q_\pm(P_\Omega \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}), \quad \int d^3x_2\, Q(\mathbf{x}_2)\, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)) =$$
$$= \int d^3x_2\, Q(\mathbf{x}_2)\, q_\pm(P_\Omega \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}),\, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)). \tag{4}$$

Подставим выражение для $q_\pm$ в уравнение (3) и проинтегрируем по переменной x:

$$p_\pm(\mathbf{x}_1) = \int d^3x_2\, Q(\mathbf{x}_2)\, G_\pm(\mathbf{K}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \tag{5}$$

где

$$G_\pm(\mathbf{K}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d^3x\, q_\pm(P_\Omega \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}),\, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2))\, G_\pm(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \tag{6}$$

— функция Грина для вычисления поля комбинационной частоты по источникам Q. Физический смысл полученной функции — поле комбинационной частоты в точке $\mathbf{x}_1$, являющееся результатом взаимодействия поля точечного источника, расположенного в точке $\mathbf{x}_2$, с полем плоской волны.

Рассмотрим преобразование функции Грина $G_\pm(\mathbf{K}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ при перестановке переменных $\mathbf{x}_1 \rightleftarrows \mathbf{x}_2$. Для того, чтобы значение поля комбинационной частоты, создаваемое в точке $\mathbf{x}_1$ источником, находящимся в $\mathbf{x}_2$, равнялось значению поля, создаваемому в точке $\mathbf{x}_2$ источником, находящимся в $\mathbf{x}_1$, достаточно, чтобы плоская волна p_Ω' распространялась в противоположном направлении и принимала в точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ значения такие, что $p_\Omega'(x_1)=p_\Omega(\mathbf{x}_2)$ и $p_\Omega'(\mathbf{x}_2)=p_\Omega(\mathbf{x}_1)$. Этим условиям удовлетворяет плоская волна вида $p_\Omega'=P_\Omega \exp(\pm i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}))$. Следовательно, при перестановке переменных функция Грина преобразуется следующим образом:

$$G_\pm(\mathbf{K};\, \mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) = \exp(\pm i\mathbf{K}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2))\, G_\pm(-\mathbf{K};\, \mathbf{x}_2,\, \mathbf{x}_1). \tag{7}$$

Формально выражение (7) можно получить, проделав замену переменной интегрирования $\mathbf{x}=-\mathbf{x}'+\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ в уравнении (6).

Перейдем от выражения (5) для поля комбинационной частоты $p_\pm$ к выражению для сигнала на выходе приемника с пространственной чувствительностью $R(\mathbf{x})$, который равен интегралу от произведения функции чувствительности на амплитуду поля. Учитывая (7), получим

$$u_\pm = \int d^3x_1\, R(\mathbf{x}_1) \int d^3x_2\, Q(\mathbf{x}_2)\, G_\pm(\mathbf{K}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) =$$
$$= \int d^3x_2 \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_2)\, Q(\mathbf{x}_2) \int d^3x_1 \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_1)\, R(\mathbf{x}_1)\, G_\pm(-\mathbf{K}; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \tag{8}$$

В полученном соотношении, аналогичном соотношению взаимности для линейных акустических полей [3], участвуют модифицированные функции плотности источников $\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_1)R(\mathbf{x}_1)$ и пространственной чувствительности $\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_2)Q(\mathbf{x}_2)$. Так, например, для акустических преобразователей, размеры которых малы по сравнению с длиной волны $\Lambda=2\pi/K$, сигнал комбинационной частоты на выходе приемника R при взаимодействии поля источника Q с плоской волной $p_\Omega=P_\Omega \exp(i\mathbf{K}\mathbf{x})$ будет совпадать с сигналом на выходе приемника Q при взаимодействии поля источника R с плоской волной $p_\Omega'=P_\Omega \exp(-i\mathbf{K}\mathbf{x})$ с точностью до фазового множителя $\exp(\pm i\mathbf{K}(\mathbf{x}_Q+\mathbf{x}_R)$, где $\mathbf{x}_Q$ и $\mathbf{x}_R$ — координаты преобразователей Q и R.

Применим полученные результаты к анализу работы приемной параметрической антенны, состоящей из излучателя высокочастотного зондирующего звукового поля, пространственная плотность источников которого описывается функцией $Q(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)$, и точечного приемника звука, пространственная чувствительность которого описывается δ-функцией $R(\mathbf{x}_1)=R_0\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_R)$. Выражение (8) для сигнала на выходе приемника принимает вид

$$u_{\pm}=\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_R)\int d^3x_2\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_2)Q(\mathbf{x}_2)G_{\pm}(-\mathbf{K};\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_R). \qquad (9)$$

Полученное выражение, как и выражение (6), сводит расчет поля в точке приема к интегралу по области источников Q поля p_ω. Практически всегда эта область имеет конечные размеры в отличие от области виртуальных источников $q_{\pm}$, а в важном случае поршневых излучателей выражение (9) сводится к интегралу по поверхности в конечных пределах интегрирования. Более подробный анализ возможен при наличии явного выражения для функции Грина.

Отметим, что, не вводя понятие функции Грина и соотношения взаимности для поля комбинационной частоты, решение в форме уравнения (5) использовали ранее другие авторы [4] для расчета характеристики направленности параметрической приемной антенны с линейным источником зондирующего звукового поля. Поле комбинационной частоты вычислялось через сумму полей, созданных взаимодействием точечных источников, равномерно распределенных на отрезке, с плоской волной. В этой же работе приводится выражение для поля комбинационной частоты, описывающее взаимодействие всенаправленного источника с плоской волной. Приведем это решение в обозначениях, используемых в настоящей работе:

$$G_{\pm}(\mathbf{K};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=-\frac{i\varepsilon\omega_{\pm}P_\Omega}{8\pi\rho c^3}e^{ik_{\pm}|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}e^{\pm iM}\frac{\sin M}{M}. \qquad (10)$$

Здесь ε — нелинейный параметр среды, ρ — плотность среды, $M=K|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\cdot\sin^2(\Theta/2)$, где Θ — угол между векторами $\mathbf{K}$ и $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$. Выражение (10) справедливо при условии, что $(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|/k)^{1/2}K\ll1$, и может быть использовано для расчета характеристик направленности параметрических приемных антенн с излучателем накачки произвольной конфигурации.

Рассмотрим антенну, состоящую из круглого поршневого излучателя накачки и точечного приемника. Приемник находится в начале координат на оси излучателя на расстоянии L от него. Пусть функция пространственной плотности источников имеет вид простого слоя с поверхностной плотностью Q_s на поверхности излучателя S. Введем безразмерный параметр $N\gg1$ и пусть выполняются условия:

$$(L/k)^{1/2}K=1/N \qquad (11)$$

$$D/(L/k)^{1/2}\leqslant1/N. \qquad (12)$$

Условие (12) означает, что размер первой зоны Френеля значительно превышает размер излучателя D (приемник находится в области сферической расходимости зондирующего звукового поля). При этом значение функции Грина на поверхности излучателя в подынтегральном выражении можно заменить на ее постоянное значение и вынести за знак интеграла. Условия (11) и (12) автоматически означают, что $KD\leqslant1/N^2\ll1$ и множитель $\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x})$ так же можно вынести из-под знака интеграла, заменив на постоянное значение $\exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_Q)$, где $\mathbf{x}_Q$ — координата излучателя. Учитывая вышеизложенное, выражение (9) запишем в виде

$$u_{\pm}=(ie^{\pm i\mathbf{K}\mathbf{x}_Q})\left(\frac{R_0\varepsilon\omega_{\pm}P_\Omega}{8\pi\rho c^3}e^{ik_{\pm}L}\int_S Q_s\,dS\right)\left(e^{\pm iM}\frac{\sin M}{M}\right). \qquad (13)$$

Характеристика направленности факторизовалась на три сомножителя: фазовый множитель; амплитудный множитель сигнала комбинационной частоты, принимаемого преобразователем с чувствительностью R_0, расположенным на расстоянии L от точечного источника с напряженностью

$\int\limits_S Q_s\,ds$; диаграммный множитель, представляющий собой нормированную к единице диаграмму направленности параметрической приемной антенны, состоящей из точечного источника и точечного приемника.

Границей применимости выражения (13) является условие $D/(L/k)^{1/2} \simeq 1$ (приемник находится на границе области дифракции). В этом случае расчет амплитуды сигнала комбинационной частоты необходимо производить с учетом дифракции зондирующего звукового поля.

Пусть приемник находится в зоне дифракции круглого поршневого излучателя. Вклад в значение интеграла (9) в максимуме диаграммы направленности дает половина поверхности первой зоны Френеля и край поверхности излучателя, а остальная поверхность излучателя, состоящая из четного количества половинок зон Френеля, работает «вхолостую». В этом случае особый интерес представляют фокусирующие излучатели (например, сферические с радиусом кривизны, равным L), обеспечивающие синфазное суммирование подынтегральной функции. На эту особенность фокусирующих излучателей было указано в работе [5], как на способ увеличения коэффициента усиления приемных параметрических антенн. Пусть помимо (11) выполняются условия:

$$(L/k)^{1/2}/D \gg 1, \tag{14}$$

$$D/(L/k)^{1/2} \geqslant N, \tag{15}$$

которые означают, что размер излучателя много меньше размера зоны Френеля низкочастотного звука, а приемник находится в зоне дифракции высокочастотного звука. Учитывая, что множитель $\exp(ik_\pm|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|)$ в выражении (9) постоянен на поверхности S излучателя, а также (15), заменяем значение функции Грина в подынтегральном выражении на постоянное и выносим за знак интеграла. Полученное выражение запишем в следующей форме:

$$u_\pm = \left(i\frac{R_0\varepsilon\omega_\pm P_\Omega}{8\pi\rho c^3}e^{ik_\pm L}\int\limits_S Q_s\,dS\right)\left(e^{\pm iM}\frac{\sin M}{M}\right)\left(\frac{\int\limits_S \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x})\,Q_s\,dS}{\int\limits_S Q_s\,dS}\right).$$

Характеристика направленности факторизовалась на три сомножителя: амплитудный множитель; нормированная к единице диаграмма направленности параметрической приемной антенны, состоящей из точечного источника и точечного приемника; нормированная диаграмма излучателя на частоте принимаемого звука. Следует отметить, что условия (15) с (14) и (11) означают, что $KD \gg 1$ и $(KL)^{1/2} \gg 1$, т. е. апертурный множитель $\int\limits_S \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{x})\,Q_s\,dS \Big/ \int\limits_S Q_s\,dS$ сказывается на достаточно высокой частоте принимаемого звука, когда на апертуре излучающей антенны укладывается несколько длин волн принимаемого звука, а параметрическая антенна работает в режиме узконаправленного приема.

Резюмируя содержание работы, отметим, что соотношение взаимности звукового поля комбинационной частоты позволило перейти при расчете взаимодействия плоской волны с полем, созданным произвольным распределением источников, от интеграла свертки функции Грина уравнения Гельмгольца с функцией виртуальных источников [1], где интегрирование производится по всему объему, к интегралу от значения функции Грина поля комбинационной частоты по области первичных источников, которая в большинстве случаев имеет конечные размеры. Анализ работы параметрической приемной антенны на основе соотношения взаимности звукового поля комбинационной частоты и асимптотического выражения для функции Грина позволил получить ранее известные результаты [2] и более точно сформулировать для них область значений параметров задачи, а также выявить случаи, при которых сказывается апертурный множитель излучателя зондирующего поля на частоте принимаемого звука.

В заключении автор благодарит К. А. Наугольных и С. А. Рыбака за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Westervelt P. J.* Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. P. 535–537.
2. *Зверев В. А., Калачев А. И.* Модуляция звука звуком при пересечении акустических волн // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 245–251.
3. *Лямшев Л. М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1231–1235.
4. *Trachard J. J.* The detection of low frequency plane wave with parametric receiving array // Finite amplitude wave effects in fluids. Proceeding of the 1973 Symposium. Copenhagen, 1973. P. 184–189.
5. *Донской Д. М., Сутин А. М.* О возможности усиления акустических волн при параметрическом приеме // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 1. С. 151–153.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13.V.1987