

УДК 534.26

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ХАРАКТЕР СИЛЫ РЕАКЦИИ
ИЗЛУЧАЮЩЕГО ПОРШНЯ, НАЛАГАЕМЫЕ ПРИНЦИПОМ
ПРИЧИННОСТИ

Урусовский И. А.

Исходя из принципа причинности, показано, что для любого поршневого излучателя сила реакции среды на поршень может быть выражена либо только через вещественную часть спектра импеданса поршня, либо только через мнимую его часть. Проанализирована связь силы реакции со скоростью поршня в предшествующие моменты времени.

Сила реакции среды на гармонически колеблющийся излучающий поршень для любого поршневого излучателя определяется его импедансом, зависящим, вообще говоря, сложным образом от частоты колебаний поршня, формы и свойств акустического экрана, в котором поршень колеблется. Соответствующая формула, связывающая эту силу реакции $f(\omega)$ и безразмерный удельный импеданс поршня $z(\omega)$ на круговой частоте ω , имеет вид

$$f(\omega)/\rho c S = z(\omega)v(\omega), \tag{1}$$

где $v(\omega)$ — скорость колебаний поршня на этой частоте, S — площадь поршня, ρ — плотность среды, c — скорость звука в ней.

Покажем, исходя из принципа причинности, что хотя $f(\omega)$ и зависит как от вещественной, так и от мнимой частей импеданса, для любого поршневого излучателя и при произвольном движении поршня во времени сила реакции среды на поршень $F(t)$ как функция времени t может быть выражена либо только через вещественную часть спектра импеданса поршня, либо только через мнимую его часть, а эти части спектра связаны соотношениями, аналогичными формулам Крамерса—Кронига для диспергирующих сред [1].

Поскольку с увеличением частоты $z(\omega)$ стремится к единице, удобно выделить в выражении для $z(\omega)$ его асимптотическое значение, положив $z(\omega) = 1 + g(\omega)$, где $g(\omega)$ — функция, исчезающая на бесконечности.

Учитывая спектральные разложения

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad \text{и} \quad V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

соответственно для силы реакции $F(t)$ и скорости поршня $V(t)$, из формулы (1) найдем

$$\Phi(t) \equiv F(t)/(\rho c S) = V(t) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) v(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

откуда по теореме о свертке получим

$$\Phi(t) = V(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(t-\tau) G(\tau) d\tau, \tag{2}$$

где

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega. \tag{3}$$

Функции $V(t)$ и $\Phi(t)$ являются вещественными функциями, поэтому и $G(\tau)$ — вещественная функция, а следовательно, $g(-\omega) = g^*(\omega)$. Кроме того, согласно принципу причинности, звуковое давление на поршне может зависеть только от скорости поршня в момент наблюдения и в предшествующие ему моменты времени. Поэтому при $\tau > 0$

$$G(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = 0, \quad (4)$$

$$G(\tau) = G(\tau) \pm G(-\tau) = 4 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} g(\omega) \cos \omega\tau d\omega = 4 \int_0^{\infty} \operatorname{Im} g(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (5)$$

Отсюда видно, что при соблюдении принципа причинности формула (2) сводится к виду

$$\Phi(t) = V(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} V(t-\tau) G(\tau) d\tau, \quad (6)$$

причем функция $G(\tau)$ выражается по формуле (5) через вещественную часть спектра импеданса, либо через мнимую его часть.

Для обратного по отношению к (3) преобразованию Фурье согласно формулам (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\tau) d\tau \int_0^{\infty} \operatorname{Re} g(\Omega) \cos \Omega\tau d\Omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\omega\tau) d\tau \int_0^{\infty} \operatorname{Im} g(\Omega) \sin \Omega\tau d\Omega. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования в первом из двойных интегралов и проведя интегрирование по τ , найдем

$$2 \int_0^{\tau} \exp(i\omega\tau) \cos \Omega\tau d\tau = i \left\{ \frac{1 - \exp[i(\omega + \Omega)T]}{\omega + \Omega} + \frac{1 - \exp[i(\omega - \Omega)T]}{\omega - \Omega} \right\}$$

Вклад быстро осциллирующих членов в рассматриваемый интеграл в пределе при $T \rightarrow \infty$ исчезает всюду, кроме исчезающе малой δ -окрестности точки $\Omega = \omega$. При этом

$$g(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} g(\Omega) \left(\frac{1}{\omega + \Omega} + \frac{1}{\omega - \Omega} \right) d\Omega + A \operatorname{Re} g(\omega),$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения,

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta T \rightarrow \infty} \frac{i}{\pi} \int_{\omega - \delta}^{\omega + \delta} \frac{1 - \exp[i(\omega - \Omega)T]}{\omega - \Omega} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 1.$$

Отсюда получим первое

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} g(\Omega) \frac{\omega d\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (7)$$

и аналогично второе

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} g(\Omega) \frac{\Omega d\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (8)$$

искомые соотношения типа Крамерса — Кронига, эквивалентные формулам, полученным в [2] на основе преобразований Гильберта, примененным к $z(\omega) - R(\infty)$, где $R(\infty)$ — вещественный высокочастотный предел импеданса $z(\omega)$. Заметим, что формулы этого типа можно трактовать как частный случай формул Сохоцкого [3].

Приведем функции $g(\omega)$ и $G(\tau)$ при $\tau > 0$ для следующих простейших примеров поршневого излучения:

1. Для пульсирующей сферы радиуса a $g(\omega) = 1/(ika - 1)$, где $k = \omega/c$ — волновое число. Уводя контур интегрирования в (3) в сторону отрицательно-мнимых ω и вычисляя вычет в точке $ka = -i$, при этом получим [4]

$$\frac{1}{2\pi} G(\tau) = -\frac{c}{a} \exp\left(-\frac{c\tau}{a}\right).$$

2. Для пульсирующего цилиндра радиуса a $g(\omega) = (H_0^{(1)}(ka)) / (H_1^{(1)}(ka)) - 1$, причем, $\operatorname{Re} g(\omega) = 2[\pi ka (J_1^2(ka) + N_1^2(ka))]^{-1} - 1$. Отсюда по формуле (5) найдем

$$\frac{1}{2\pi} G(\tau) = \frac{2c}{\pi a} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi x [J_1^2(x) + N_1^2(x)]} - 1 \right\} \cos\left(\frac{c\tau}{a} x\right) dx.$$

Альтернативно, стягивая контур интегрирования в исходном интеграле

$$G(\tau) = \frac{c}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H_0^{(1)}(z)}{iH_1^{(1)}(z)} - 1 \right] \exp\left(-i\frac{c\tau}{a} z\right) dz$$

к берегам разреза подынтегральной функции по отрицательно мнимой оси и используя известные соотношения между функциями Ганкеля и Макдональда, получим выражение

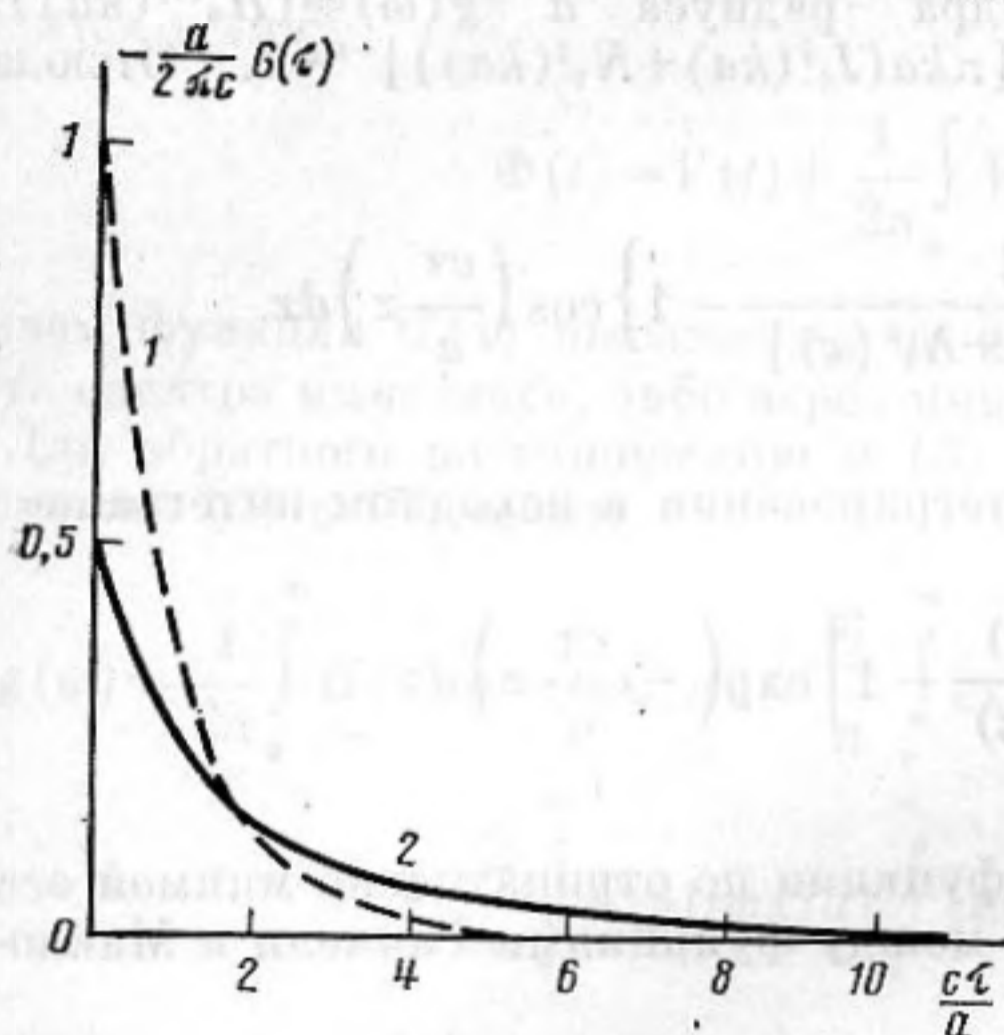
$$\frac{1}{2\pi} G(\tau) = -\frac{c}{a} \int_0^{\infty} \frac{1}{x [K_1^2(x) + \pi^2 I_1^2(x)]} \exp\left(-\frac{c\tau}{a} x\right) dx \quad (9)$$

с асимптотически монотонно убывающей подынтегральной функцией. Легко найти, что поскольку при $x^2 \ll 1$ $K_1(x) \approx 1/x$, $I_1(x) \approx x/2$, а следовательно, при этом множитель при экспоненте в подынтегральной функции близок к x , то при $\tau \gg a/c$ правая часть равенства (3) асимптотически равна $-a/(c\tau^2)$. Сравнительно медленное (как τ^{-2}) убывание абсолютной величины функции последствия $(2\pi)^{-1}G(\tau)$ для пульсирующего цилиндра по сравнению с экспоненциальным убыванием абсолютной величины этой функции для пульсирующей сферы объясняется тем, что в цилиндрическом случае имеется акустическое взаимодействие сколь угодно далеко отстоящих вдоль цилиндра элементов излучающей поверхности и соответственно большое время распространения звука от одного элемента к другому при сравнительно медленном убывании амплитуды звуковых волн с расстоянием, в то время как в сферическом случае, все элементы хотя и находятся на конечном расстоянии, огибающие (в том числе и многократно) сферу звуковые волны убывают по амплитуде экспоненциально, с точностью до медленно меняющегося сомножителя, по пути распространения [5, 6]. Для сравнения укажем, что в случае полосы, колеблющейся в плоском жестком экране, функция последствия асимптотически равна $-2a/(\pi c\tau^2)$ [7], так что закон асимптотического изменения как $-1/\tau^2$ этой функции относится вообще ко всем цилиндрическим излучателям. В случае поршня конечных размеров, колеблющегося в плоском жестком экране, эта функция резко обрывается: она отлична от нуля лишь в интервале $0 < \tau < L/c$, где L — максимальный размер поршня [8, 7], поскольку в этом случае нет огибающих и дифрагированных волн. Так, например,

в случае круглого поршня радиуса a имеем [4, 7–9]

$$G(\tau) = -\frac{4c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^2} \quad \text{при} \quad 0 < \frac{c\tau}{2a} < 1, \quad G(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{c\tau}{2a} > 1.$$

График взятой с обратным знаком функции последствия для пульсирующего цилиндра, представленный на фигуре кривой 2, на начальном участке изменения переменной $c\tau/a$ имеет резкий, примерно экспоненциальный, спад, сменяющийся после короткой переходной области вблизи $c\tau/a \approx 2$ сравнительно медленным асимптотическим спадом к нулю. Экспоненциальный спад на начальном участке объясняется сравнительно большой кривизной звуковых лучей, по которым происходит акустическое взаимодействие между большей частью элементов излучающей поверхности, отстоящих друг от друга на расстоянии $c\tau$ вдоль таких лучей, и экспоненциальным убыванием амплитуды звуковых волн, скользящих по



Функция $-G(\tau)a/(2\pi c)$ в зависимости от $c\tau/a$: 1 — для пульсирующей сферы радиуса a , 2 — для пульсирующего цилиндра радиуса a

поверхности цилиндра по кривым лучам. Кривой 1 представлен аналогичный график для сферы.

Спектральные функции $g(\omega)$ в примерах 1 и 2, как легко видеть, не имеют особых точек в полуплоскости $\text{Im } ka > 0$ комплексной переменной ka и достаточно быстро стремятся к нулю в этой полуплоскости при $|ka| \rightarrow \infty$, так что условия леммы Жордана выполнены, а значит, $G(-\tau) \equiv 0$ при $\tau > 0$, как того и требует принцип причинности. И наоборот, для любого излучателя из принципа причинности вытекает тождество (4), а следовательно, и голоморфность спектральной функции $g(\omega)$ в верхней полуплоскости комплексной переменной ω и стремление этой функции к нулю на бесконечности.

Формула (6) описывает и звуковое давление $p(\mathbf{r}, t)$ на поверхности поршня в какой-либо его точке \mathbf{r} , если под $\Phi(t)$ понимать $p(\mathbf{r}, t)/(\rho c)$, а функцию G считать зависящей также от координат этой точки, $G = G(\mathbf{r}, \tau)$. Наконец, если точка \mathbf{r} не лежит непосредственно на поверхности поршня, а находится в некотором отдалении над поршнем или даже в стороне от него, то формула (6) заменится соотношением

$$\frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho c} = V_{\Gamma}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} V(t-\tau) G(\mathbf{r}, \tau) d\tau,$$

где $V_{\Gamma}(\mathbf{r}, t)$ — величина скорости в точке \mathbf{r} , найденная в геометрикоакустическом приближении, причем предполагается, что геометрическая часть поля соответствует одному звуковому лучу, проходящему через точку наблюдения, так что это поле — локально плоское, а θ — время распространения звука от поршня до этой точки.

В случае, когда однородность акустической среды нарушена внесением в нее пластины или других препятствий, отраженные от них волны, возвращаясь к поршню, дают вклад в звуковое поле на нем, а значит, изменяют импеданс $z(\omega)$, высокочастотная асимптотика для импеданса имеет более сложный характер, чем в рассмотренном выше случае $z(\omega) \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$; в случае пластины она оказывается периодической функцией частоты. Асимптотика $z_a(\omega)$ импеданса $z(\omega)$ может быть найдена как его геометрикоакустическое приближение (с дифракционными поправками, если это необходимо). Тогда формулы (7), (8) остаются справедливыми, если

положить $z(\omega) = z_a(\omega) + g(\omega)$, $g(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Так, если на расстоянии H от поршня параллельно ему располагается пластина, в простейшем случае — однородная, в общем случае — слоисто-неоднородная, то

$$z_a(\omega) = [1 + V \exp(i2kH)] / [1 - V \exp(i2kH)],$$

где $V(\omega)$ — коэффициент отражения от пластины со стороны поршня, $k = \omega/c$. При этом к правой части формулы (6) добавится член $\Phi_1(t)$, равный

$$\Phi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [z_a(\omega) - 1] v(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{\infty} V(t-\tau) G_a(\tau) d\tau,$$

где

$$G_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [z_a(\omega) - 1] \exp(-i\omega\tau) d\omega = 4 \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} z_a(\omega) - 1] \cos \omega\tau d\omega.$$

В заключение отметим, что к обсуждаемому кругу вопросов относится и обобщение М. А. Леонтовичем [10] формул Крамерса — Кронига на среды с пространственной дисперсией, для которых нелокальная связь между полем и током приводит к дополнительным ограничениям на вещественную и мнимую части комплексной проводимости.

Благодарю С. А. Рыбака за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957. § 62.
2. Mangulis V. Kramers — Kronig or dispersion relations in acoustics // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. V. 36. № 1. P. 213—214.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. § 4.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954. С. 351.
5. Фок В. А. Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. Вып. 10. С. 916—924.
6. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Гл. 6.
7. Урусовский И. А. О реакции среды для плоских поршней, колеблющихся в плоском жестком экране по произвольному временному закону // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 751—760.
8. Lindemann O. A. Transient fluid reaction on a baffled plane piston of arbitrary shape // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 4. P. 707—717.
9. Stepanishen P. R. The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 49. № 3. Pt. 2. P. 841—849.
10. Леонтович М. А. Обобщение формул Крамерса — Кронига на среды с пространственной дисперсией // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. № 3. С. 907—912.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.X.1987