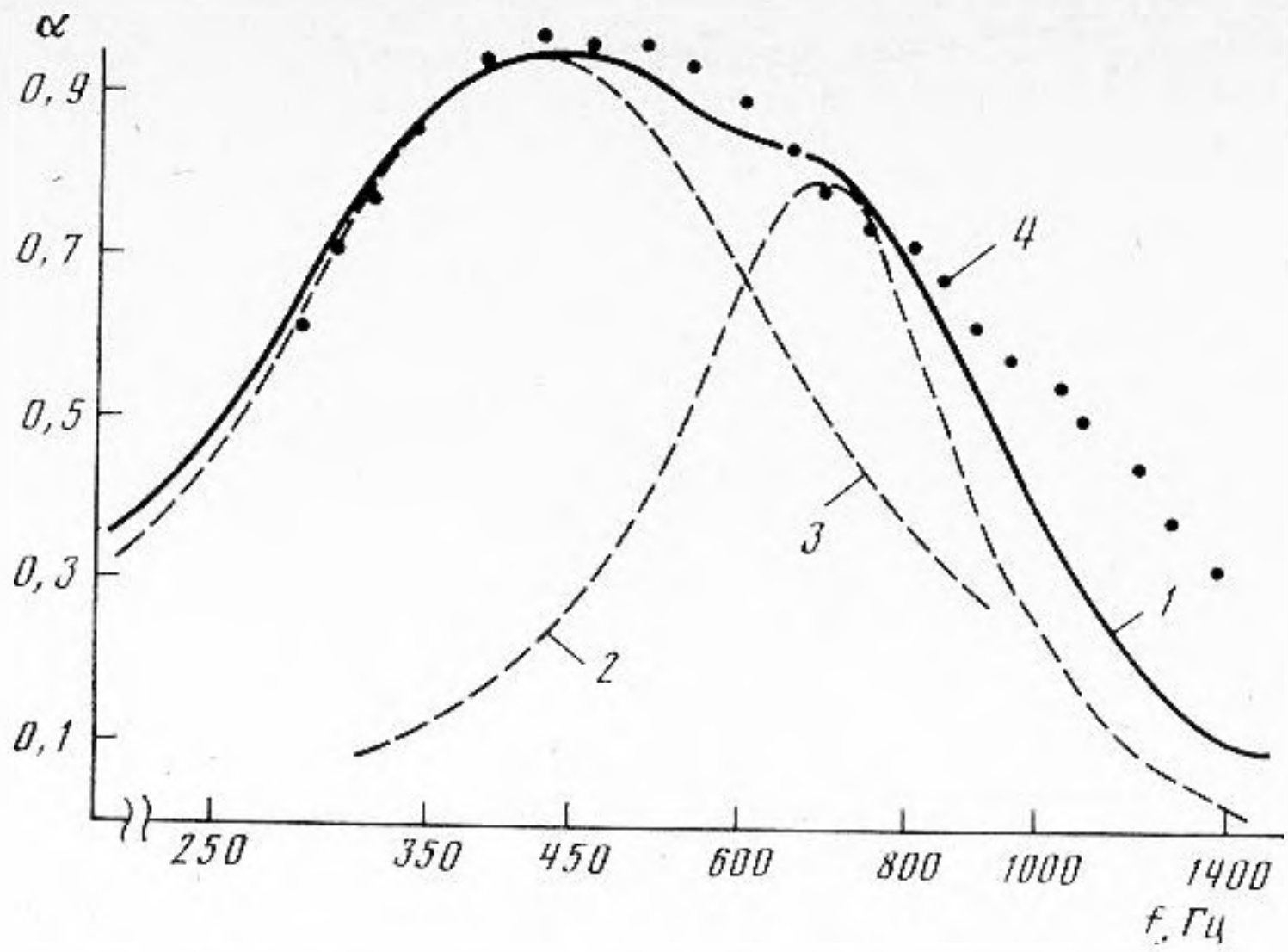

Фиг. 2. Теоретическая и экспериментальная зависимости коэффициента поглощения комбинированного поглотителя со следующими параметрами, см: $r_0=0{,}15$, $a_0=0{,}8$, $r_1=0{,}08$, $a_1=1$, $t=0{,}16$, $L=8$, $d=3$, $b=8$: *1* – коэффициент поглощения широкополосного РЗП, *2* – коэффициент поглощения поверхности при $Z_0=Z_0$, $Z_1=-i\infty$, *3* – коэффициент поглощения поверхности при $Z_1=Z_1$, $Z_0=-i\infty$, *4* – экспериментальный коэффициент поглощения широкополосного РЗП

Подставив выражения для Z_0 и Z_1 в (1), из (2) можно получить частотную зависимость коэффициента поглощения широкополосного РЗП с учетом дифракции. На фиг. 2 приведена такая зависимость для поглотителя с указанными на фиг. 2 параметрами. Там же для сравнения нанесены зависимости коэффициента поглощения для случаев, когда на жесткой стенке ($Z=-i\infty$) размещены полосы с импедансом Z_0 или Z_1. Хорошо виден выигрыш в ширине кривой поглощения для комбинированного поглотителя.

Экспериментальная проверка предложенного способа проводилась интерферометрическим методом. В качестве исследуемого образца был взят один период описанной выше поглощающей облицовки с параметрами, для которых проводился расчет. Измеренные значения коэффициента поглощения представлены кривой *4* на фиг. 2. Удовлетворительное совпадение их с теоретической кривой подтверждает верность проведенных расчетов. Таким образом, предложенный способ позволяет создать даже на базе простейших однослойных РЗП поглотители с достаточно широкой (полторы – две октавы (см. фиг. 2)) полосой резонансной характеристики поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Велижанина К. А., Гамулин А. В.* Дифракция звука на периодической неоднородной поверхности // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 1. С. 41–45.
2. *Болдарева О. А., Велижанина К. А.* К вопросу о краевом эффекте // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 2. С. 189–194.
3. *Вовк И. В.* Дифракция звука на решетке из лент конечной прозрачности // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 378–381.
4. *Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во ХГУ, 1973.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
физический факультет

Поступило в редакцию
31.III.1988

УДК 534.241

«КВАДРАТИЧНОЕ» ЭХО В ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ

Виноградова О. С., Лопатников С. Л.

Наличие в жидкости даже небольшого количества газовых пузырьков существенно изменяет характер распространения звуковых волн. В частности, в такой среде может возникнуть явление, которое обычно принято называть нелинейным эхом [1, 2], т. е. на два последовательных возмущения с интервалом T, среда отвечает

«самостоятельным» возмущением в момент времени $2T$. Впервые на существование нелинейного временного эха, связанного с наличием пузырьков неодинакового радиуса, было указано в работах [3, 4]. Затем этот эффект и близкое к нему пространственное эхо рассматривались в работах [5, 6] [1]. Из практических применений данного явления наиболее очевидным может быть регистрация газосодержания в жидкости, особенно при наличии рассеятелей другого типа (например, взвеси твердых частиц), когда обычные методы диагностики неприменимы.

В настоящей работе рассматривается возмущение среды в виде двух коротких импульсов, разделенных временным интервалом T, превосходящим характерное время затухания среднего поля и прилагаемых в одной точке пространства.

Для описания динамики пузырьков воспользуемся уравнением Рэлея

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{P_0}{\rho_0}\left(1-\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma}\right)=-\frac{\tilde{P}}{\rho_0}, \tag{1}$$

где $\tilde{P}$ – возмущение давления в жидкости, ρ_0 – ее массовая плотность, а R – радиус пузырька. Переходя к относительному давлению $P=\tilde{P}/P_0$ и делая замену $y=(R/R_0)^{5/2}$, получим уравнение нелинейного осциллятора:

$$\ddot{y}+\frac{5}{6\gamma}w_0^2y^{1/5}\left[1-y^{-\frac{6\gamma}{5}}\right]=-\frac{5}{6\gamma}w_0^2y^{1/5}P, \tag{2}$$

где

$$w_0=\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}}\frac{1}{R_0}.$$

Индекс 0 соответствует равновесному значению величины.

Будем считать, что длина звуковой волны в жидкости $\lambda\gg l$, где l – характерное расстояние между пузырьками велико по сравнению с радиусами пузырьков, при этом доля объема, занятая газом, $\Omega(t)\ll 1$. В этих предположениях уравнение для плоской волны давления малой амплитуды имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\rho_0}{P_0}\Omega=0. \tag{3}$$

Выражая Ω через радиусы пузырьков, а затем через y, имеем

$$\Omega(t)-\Omega(0)=\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty f(R_0)(R^3-R_0^3)\,dR_0=\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty f(R_0)R_0^3(y^{6/5}-1)\,dR_0, \tag{4}$$

где f – функция распределения пузырьков по радиусам.

Исходное возмущение среды эквивалентно введению в правую часть уравнения (3) суммы $A_1\delta(x)\delta'(t)+A_2\delta(x)\delta'(t-T)$ [2].

Решение системы (2), (3) ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} y&=1+s_1+s_2+\ldots\\ P&=P_1+P_2+\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

где одинаковые индексы соответствуют членам одного порядка малости. Тогда в первом приближении по амплитуде возмущения должно выполняться

$$\ddot{s}_1+w_0^2s_1=\alpha w_0^2P_1,$$

$$\Box P_1-J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\infty f(R_0)R_0^3s_1\,dR_0=A_1\delta(x)\delta'(t)+A_2\delta(x)\delta'(t-T), \tag{6}$$

---

[1] В работе [6] содержится ряд неточностей, которые привели автора к ошибочному выводу о том, что квадратичное эхо в жидкости с пузырьками газа отсутствует, а возможен только эховый отклик, связанный с нелинейным смещением частоты, рассмотренный ранее в [3]. Одна из неточностей состоит в том, что решение для нелинейного осциллятора не может быть записано в виде $\xi_*(a, x, t)=\xi_{02}\cos[(w_0+\Delta w_1+\Delta w_2)(t-T)+\varphi]+\xi_{02}\cos[\theta_*+(w_0+\Delta w_1+\Delta w_2)(t-T)+\varphi]$ ((12) работы [6]). На самом деле она имеет вид $\xi_*(a, x, t)=\theta(t)\theta(T-t)\xi_{01}\cos[(w_0+\Delta w_1)t+\varphi]+\theta(t-T)\xi_{02}'\times\cos[(w_0+\Delta w_2)t+\theta']$.

Кроме того, из уравнения (2) данной статьи ясно, что в правую часть уравнения для членов возмущения второго порядка входит $\theta(t)\delta(t)$, что приводит к необходимости уточнить смысл произведения двух обобщенных функций с сингулярностью в одной точке. Это и заставляет рассмотреть совместное поведение акустического поля и пузырьков, несмотря на то что длительность отклика среды мала.

[2] Заметим, что источник может быть выбран в виде $\delta'(t)$, если длительность его действия τ много меньше, чем период колебаний пузырька. Поскольку характерная частота пульсаций газовых пузырьков при давлениях 1–10 ат составляет около 10^4–10^5 Гц, то должно выполняться неравенство $\tau\ll 6\cdot 10^{-5}$ с.

где

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \partial^2/\partial x^2, \quad \alpha = -{}^5/_6\gamma, \quad J = 8\pi\rho_0/5P_0,$$

а во втором приближении

$$\ddot{s}_2 + w_0^2 s_2 = \alpha w_0^2 P_2 - \beta w_0^2 s_1 - c w_0^2 s_1 P_1,$$

$$\Box P_2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\infty f(R_0) R_0^3 \left(s_2 + \frac{1}{10} s_1^2\right) dR_0 = 0, \tag{7}$$

где $\beta = -3(2\gamma+1)/10, \quad c = 1/6\gamma.$

После преобразования Фурье по x и Лапласа по переменной t решение обеих систем запишется в виде

$$s_1^{w,\,k} = \alpha \frac{w_0^2}{w_0^2 + w^2} P_1^{w,\,k}, \tag{8}$$

$$D(w, k) P_1^{w_1 k} = w(A_1 + A_2 e^{-wT}), \tag{9}$$

$$D(w, k) = \frac{w^2}{c^2} + k^2 + w^2 Z(w), \tag{10}$$

$$Z(w) = \frac{\rho_0}{P_0\gamma}\int_0^\infty \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}\right)^2 \frac{f(w_0)}{w_0^5}\frac{w_0^2}{(w_0^2 + w^2)} dw_0, \tag{11}$$

$$s_2^{w,\,k} = \frac{w_0^2}{w_0^2 + w^2}(\alpha P_2^{w,\,k} - \beta s_1^{w,\,k} * s_1^{w,\,k} - c s_1^{w,\,k} * p_1^{w,\,k}), \tag{12}$$

$$D(w, k) P_2^{w,\,k} = J w^2 \int_0^\infty f(R_0) R_0^3 \left(\frac{s_1^{w,\,k} * s_1^{w,\,k}}{10} + \right.$$

$$\left. + \beta \frac{w_0^2 s_1^{w,\,k} * s_1^{w,\,k}}{w_0^2 + w^2} + c\frac{w_0^2 s_1^{w,\,k} * P_1^{w,\,k}}{w_0^2 + w^2}\right\} dR_0 \tag{13}$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty dw_0 \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}\right)^2 \frac{f(w_0)}{w_0^5} = \Omega_0$$

и что $Z(w)$ определяется формулой (11) для w, лежащих справа от мнимой оси. Будем предполагать, что f – аналитична в $\bar{C}$ за исключением конечного множества точек, которые не лежат на вещественной оси, $f(w) \to 0$ при $|w| \to \infty$, $f(w) \to 0$ при $w \to 0$ как степенная функция и $f(w) = f(-w)$. Тогда $Z(w)$ может быть продолжена аналитически почти во всю левую полуплоскость, причем $Z(w) \to 0$ при $|w| \to \infty$:

$$Z(ia) = \int_0^\infty \tilde{\tilde{f}}(w_0) \frac{dw_0}{w^2 - a^2} - i\frac{\pi}{2}\frac{\tilde{\tilde{f}}(a)}{a},$$

где

$$\tilde{\tilde{f}}(w) = \frac{12\pi\gamma P_0}{\rho_0}\frac{f(w)}{w^3}.$$

Рассмотрим подробнее свертки, входящие в (13). Поскольку эхо связано с взаимодействием сигналов, то в свертках будем интересоваться членами, содержащими произведения $A_1 A_2$:

$$(s_1 * s_1)^{A_1 A_2} = \frac{A_1 A_2 \alpha^2}{2\pi 2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{\sigma' \pm i\infty} dw' \frac{1}{D(w', k') D(w - w', k - k')} \times$$

$$\times \frac{1}{\varepsilon(w', w_0)}\frac{1}{\varepsilon(w - w', w_0)} w_0^4 w'(w - w')\{\exp(-(w - w')T) + \exp(-w'T)\}, \tag{14}$$

где $\varepsilon(w', w_0) = w'^2 + w_0^2$,
или

$$(s_1 * s_1)^{A_1 A_2} = \frac{\alpha^2 w_0^4 A_1 A_2}{2\pi}\int_{\sigma' \pm i\infty} dw \frac{w(w - w') G(w, w', k)\{e^{-(w-w')T} + e^{-w'T}\}}{\varepsilon(w', w_0)\varepsilon(w - w', w_0)}, \tag{15}$$

где

$$G(w, w, k) = \frac{k_1(w') + k_1(w - w')}{2k_1(w')\, k_1(w - w')\,(k^2 - (k_1(w') + k_1(w - w'))^2)}, \tag{16}$$

где $k_1(w)$ – корень $D(w, k)=0$, лежащий в верхней полуплоскости. В силу того что подынтегральная функция в (15) симметрична относительно замены w' на $w-w'$ и не имеет корней в области $0<\mathrm{Re}\,w'<\mathrm{Re}\,w$, два слагаемых в (15) равны между собой. Опуская корни, связанные с функцией G, получаем

$$(s_1 * s_1)^э = iw_0^4 A_1 A_2 \alpha^2 \frac{(w + iw_0)\, G(w, -iw_0, k)\, e^{-(w+iw_0)T}}{w(w + 2iw_0)} + \\ + \frac{(w - iw_0)\, G(w, iw_0, k) e^{-(w-iw_0)T}}{w(w - 2iw_0)} \Bigg\}. \tag{17}$$

Аналогичные члены в $s_1 * P_1$ выглядят так:

$$(s_1 * P_1)^{A_1 A_2} = \frac{\alpha w_0^2 A_1 A_2}{2\pi 2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk' \int\limits_{\sigma' \pm i\infty} dw' \frac{w'(w - w')\{e^{-(w-w')T} + e^{-w'T}\}}{D(w', k)\, D(w - w', k - k')\, \varepsilon(w_0, w')} = \tag{18}$$

$$= \frac{\alpha w_0^2 A_1 A_2}{2\pi} \int\limits_{\sigma' \pm i\infty} dw' \frac{w'(w - w')\, e^{-(w-w')T}}{(w' + iw_0)(w' - iw_0)} G(w, w', k) =$$

$$= \frac{i\alpha w_0^2 A_1 A_2}{2} \{(w - iw_0)\, e^{-(w-iw_0)T} G(w, iw_0, k) + (w + iw_0)\, e^{-(w+iw_0)T} G(w, -iw_0, k)\}.$$

Из (13) следует

$$P_2(x, t) = J \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{2\pi i} \int\limits_{\sigma \pm i\infty} d\omega \frac{w^2 e^{wt}}{D(w, k)} \int\limits_0 dw_0 f(R_0)\, R_0^3 \times \\ \times \frac{w_0^2}{w^2 + w_0^2} (\beta s_1 * s_1 + c s_1 * P_1 \ldots) \tag{19}$$

или (меняя порядок интегрирования)

$$P_2(x, t) = J \int\limits_0^{\infty} dR_0 f(R_0)\, R_0^3 w_0^2 \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma \pm i\infty} dw \frac{w^2 e^{wt}}{\varepsilon(w, w_0)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \times \\ \times \frac{[\beta(s_1 * s_1) + c(s_1 * P_1)]\, e^{-ikx}}{D(w, k)}. \tag{20}$$

Вычислим вспомогательные интегралы (для определенности считаем $x>0$):

$$I_1(w, w_0, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx} G(w, iw_0, k)}{D(w, k)} = \frac{e^{ik_1(x)x} G(w, iw_0, k_1(w))}{2k_1(w)} + \\ + \frac{e^{i(k_1(iw_0) + k_1(w - iw_0))x}}{D(w, k_1(iw_0) + k_1(w - iw_0))\, 4k_1(iw_0)\, k_1(w - iw_0)}. \tag{21}$$

$$I_2(w, w_0, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx} G(w, -iw_0, k)}{D(w, k)} = \frac{e^{ik_1(w)x} G(w, -iw_0, k_1(w))}{2k_1(w)} + \\ + \frac{e^{i(k_1(-iw_0) + k_1(w + iw_0))x}}{D(w, k_1(-iw_0) + k_1(w + iw_0))\, 4k_1(-iw_0)\, k_1(w + iw_0)}. \tag{22}$$

При $t>T$ получаем следующие члены, входящие в (19):

$$(P_2(x, t))^{s_1 * s_1} = J \int\limits_0^{\infty} dR_0 f(R_0)\, R_0^3 w_0^2 \alpha^2 (-w_0^4)\, A_1 A_2 \beta L(w_0, t), \tag{23}$$

$$(P_2(x, t))^{s_1 * P_1} = J \int\limits_0^{\infty} dR_0 f(R_0)\, R_0^3 \frac{\alpha}{2} w_0^6 A_1 A_2 c L(w_0, t), \tag{24}$$

$$L(w_0, t) = e^{iw_0(t-2T)} I_2(iw_0, w_0) + e^{-iw_0(t-2T)} I_1(-iw_0, w_0). \tag{25}$$

Суммируя, запишем окончательный ответ в виде

$$P_2(x, t) = A_1 A_2 J \left(\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}\right)^2 \left(-\alpha^2\beta + \frac{\alpha}{2} c\right) \int_0^\infty dw_0 f(w_0) L(w_0, t). \qquad (26)$$

Видно, что при $t=27$ быстро осциллирующий множитель $e^{\pm iw_0(t-2T)}$ равен единице, что эквивалентно сфазированию части пузырьков, при том, что остальные оказываются размазанными по фазе и в сумме дают нулевой вклад.

Проще всего выглядит формула (26) для точки $x=0$:

$$P(0, 2T) = \frac{\pi P_0}{\rho_0}(3\gamma + 1) \int_0^\infty dw_0 f(w_0) w_0 \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{k_1 k_1^* k_2^* (k_1 - k_1^* - k_2^*)}\right\}, \qquad (27)$$

* – означает комплексное сопряжение.

Для оценки поля в точке $x=0$ была выбрана функция распределения $f(R_0)$ в виде ломаной с носителем на отрезке $0{,}001 \leqslant R_0 \leqslant 0{,}01$ см и такая, что суммарный объем пузырьков составлял 0,001 единичного объема среды. Также полагалось $P_0 = 10$ ат, а исходная энергия импульса 1 Дж/см^2. Элементарный расчет на ЭВМ дает значение $P(0,2T) = 0{,}007 \cdot P_0$, отрицательное по величине.

Отметим в заключение, что для применимости данного анализа нужно, чтобы время T было меньше характерного времени затухания пузырьков в результате трения, т. е. $T < 2Q/w_0$, где Q – добротность характерного пузырька. Ее величина составляет ~ 50 [7]. Следовательно, $T < 10^{-3}$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электродинамика плазмы / Под ред. Ахиезера А. И. М.: Наука, 1974.
2. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
3. *Лопатников С. Л.* Акустическое фазовое эхо в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 10. С. 623.
4. *Лопатников С. Л.* В кн.: Волны и дифракция. Т. 1. Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. М.: АН СССР, 1981. С. 332–334.
5. *Немцов Б. Е., Эйдман В. Я.* Об эффекте пространственного эха в жидкости с пузырьками газа // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 669–672.
6. *Котельников И. А.* Эффект эха в жидкости с пузырьками газа // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. № 10. С. 1227–1234.
7. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука. 1982.

Поступило в редакцию
4.IX.1987

УДК 621.315.6:537.226.86

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗВУКОПРОВОДОВ

Вьюн В. А.

Для решения задач акустоэлектронного (АЭ) взаимодействия и возбуждения поверхностных акустических волн (ПАВ) широко и плодотворно применяется импедансный метод [1–3]. Он основан на том, что для пьезоэлектрического звукопровода и прилегающей к нему среды на их поверхностях вводятся поверхностные эффективные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = D_y/(k\varphi)$ (здесь φ, D_y – электрический потенциал и индукция, k – волновое число) или обратно пропорциональные ε импедансы. Значения ε для каждой среды учитывают ее физические свойства и все граничные условия (кроме электрических для φ, D_y). Граничные условия для φ, D_y на границе раздела сред требуют непрерывности ε, откуда следует дисперсионное уравнение для ПАВ [1, 2]. При этом основная трудность состоит в том, что значение ε для пьезоэлектрических звукопроводов зависит не только от их параметров, но и, что следует особо отметить, от типа ПАВ.

В настоящей работе показывается, что с учетом ПАВ поверхностная диэлектрическая проницаемость пьезоэлектрического звукопровода, отделенного зазором h, при увеличении h независимо от типа ПАВ асимптотически стремится к одной и той же функции, характеризуемой всего тремя параметрами.

Пусть ПАВ на фиксированной частоте с волновым числом k распространяется в z-направлении на поверхности звукопровода, занимающего область $y>0$. Не касаясь вопроса существования ПАВ [4], будем считать, что ПАВ существует, и для полу-