УДК 534.23

О ПОЛЕ НАПРАВЛЕННЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Шарфарец Б. П.

В работе [1] рассматривается звуковое поле направленного излучателя, находящегося вблизи поверхности земли. При этом поле излучателя рассматривается в терминах сферических функций, а его направленность характеризуется бесконечным набором мультипольных моментов. В настоящей работе указанная задача решается иначе: направленный излучатель характеризуется своей диаграммной функцией, что позволяет согласовать решение с геометрией задачи. Отметим, что рассматриваемая задача идеологически примыкает к классической задаче об отражении сферической волны от плоской границы раздела, рассмотренной Л. М. Бреховских [2].

Пусть направленный излучатель помещен в однородное полупространство с импедансной плоской границей, характеризующейся коэффициентом отражения. Геометрия задачи представлена на рисунке. Поле звукового давления U в точке наблюдения складывается из суммы прямого U_0 и отраженного от границы $U_{\text{отр}}$ полей:

$$U = U_0 + U_{\text{отр}}. \tag{1}$$

Прямое поле U_0 может быть найдено при помощи следующего асимптотического ряда [3]:

$$U_0 \sim \frac{\exp(jkR)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(\theta, \varphi)}{(kR)^n}, \tag{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{(\Delta_{\theta,\varphi} + n(n+1)) V_n}{2j(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$V_0 = D(\theta, \varphi)$; $D(\theta, \varphi)$ — диаграммная функция излучателя; $\Delta_{\theta,\varphi} = \partial(\sin\theta\partial/\partial\theta)/\partial\theta + \sin^{-2}\theta\partial^2/\partial\varphi^2$ — оператор Бельтрами, (R, θ, φ) — сферические координаты точки наблюдения относительно точки И расположения реального источника, k — волновое число. Найдем представление для поля отраженной волны, порожденного мнимым источником И′ в виде, аналогичном (2). В интегральном представлении в виде суперпозиции плоских волн поле мнимого источника может быть представлено в следующем виде [2, 3]:

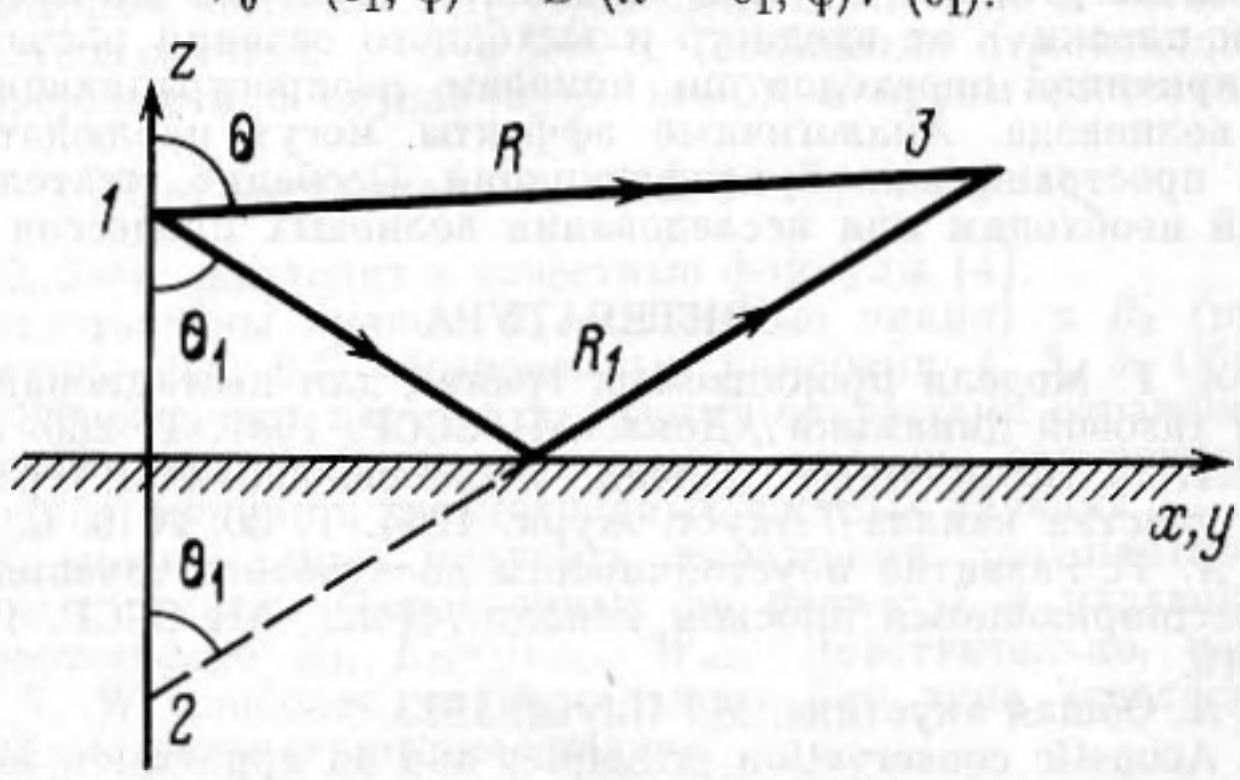
$$U_{\text{отр}} = \frac{jk}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2-j\infty} D(\pi - \theta', \varphi') \exp\{jkR_1(\sin\theta_1 \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta_1 \cos\theta')\} V(\theta') \sin\theta' d\theta' d\varphi', \tag{4}$$

где (R_1, θ_1, φ) — сферические координаты точки наблюдения относительно точки И′ расположения мнимого источника, $V(\theta)$ — коэффициент отражения импедансной границы. В работе [3] проведена оценка интеграла вида (4) методом перевала в предположении о том, что в ближайшей окрестности точки перевала отсутствуют полюса функции $V(\theta)$. Эта оценка имеет вид

$$U_{\text{отр}} \sim \frac{\exp(jkR_1)}{R_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n^{(1)}(\theta_1, \varphi)}{(kR_1)^n}, \tag{5}$$

где $V_n^{(1)}$ определяются рекурсией (3) со следующим нулевым членом:

$$V_0^{(1)}(\theta_1, \varphi) = D(\pi - \theta_1, \varphi) V(\theta_1). \tag{6}$$



Расположение направленного излучателя И и точки наблюдения П по отношению к импедансной границе: *1* — И $(0, 0, z_0)$, *2* — И′ $(0, 0, -z_0)$, *3* — П (x, y, z)

Таким образом, общее поле (1) определяется суммой рядов (2) и (5) по обратным степеням волновых параметров kR, kR_1 соответственно, коэффициенты которых легко определяются из рекурсии (3). Отметим, что отраженное поле (5) можно рассматривать как поле, создаваемое эквивалентным мнимым источником с диаграммной функцией $D(\pi-\theta, \varphi)V(\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$, равной соответствующему произведению диаграммной функции реального источника и функции коэффициента отражения от импедансной границы.

Получим асимптотику для поля отраженной волны в случае, когда в ближайшей окрестности точки перевала находится полюс функции $V(\theta)$. Для этого вначале перейдем в (4) к перевальному пути. Согласно [3], имеем

$$U_{\text{отр}} = ke^{jkR_1}\int_0^\infty \overline{D}(s)\overline{V}(s)e^{-kR_1 s}ds. \tag{7}$$

Здесь $D(s)$, $V(s)$ — диаграммная функция и коэффициент отражения в зависимости от комплексной переменной s, которая на перевальном пути действительна. Отметим, что согласно [3]

$$\overline{D}(0) = D(\pi-\theta_1, \varphi); \quad \overline{V}(0) = V(\theta_1). \tag{8}$$

Пусть функция $\overline{V}(s)$ в ближайшей окрестности точки $s=0$ (точки перевала) имеет полюс $s=s_0$. Тогда, если другие особенности функции $F(s) = \overline{D}(s)\overline{V}(s)$ не оказывают влияния на оценку интеграла (7), можно записать

$$F(s) = \frac{\alpha}{s-s_0} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n s^n. \tag{9}$$

Здесь α — вычет в полюсе s_0. Подставляя (9) в (7), имеем

$$U_{\text{отр}} \sim ke^{jkR_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n n!}{(kR_1)^{n+1}} + \alpha\int_0^\infty \frac{e^{-kR_1 s}}{s-s_0}ds\right].$$

Интеграл в последнем выражении табличный —

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kR_1 s}}{s-s_0}ds = -e^{-kR_1 s_0}\,\mathrm{Ei}\,(kR_1 s_0).$$

Учитывая асимптотику интегральной показательной функции [4, с. 411]:

$$-\mathrm{Ei}\,(x) \sim \frac{e^x}{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{x^n},$$

получаем окончательно

$$U_{\text{отр}} \sim \frac{e^{jkR_1}}{R_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(Q_n - \alpha s_0^{-(n+1)})}{(kR_1)^n}. \tag{10}$$

Полагая в (9) $s=0$, имеем

$$\overline{D}(0)\,\overline{V}(0) = D(\pi-\theta_1, \varphi)\,V(\theta_1) = Q_0 - \alpha/s_0,$$

что в точности соответствует нулевому члену ряда (10). Таким образом, и в случае наличия полюса для отраженного поля справедливо представление (5), в котором нулевой член определяется выражением (6), а все последующие — рекурсией (3). Однако в этом случае ряд (5), (10) теряет смысл при $s_0 = 0$, когда полюс совпадает с точкой перевала. Физически в области видимости ($\theta_1 \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) такое невозможно, так как поле отраженной волны в этом случае перестает удовлетворять принципу излучения Зоммерфельда [5, с. 439].

Совершенно аналогичным образом можно показать, что поле отраженной волны описывается асимптотикой (5), (3), (6) и в случае, когда в окрестности точки перевала находится два и более полюсов, в том числе и кратных. Не рассмотренное здесь поле боковой волны может быть проанализировано так же, как в работе [2].

В заключение перепишем ряд (10) в терминах величины $\omega = kR_1 s_0$, которая, исходя из примененной версии метода перевала, эквивалентна численному расстоянию, введенному в [2, с. 174]:

$$U_{\text{отр}} \sim \frac{ke^{jkR_1}}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(Q_n s_0^{n+1} - \alpha)}{\omega^n}.$$

Последний ряд позволяет оценить необходимое число членов для описания поля отраженной волны при заданном численном расстоянии.

Таким образом, в работе получены удобные асимптотические ряды для прямого (2) и отраженного (5) полей направленного излучателя. Коэффициенты ряда для прямого поля определяются через диаграммную функцию реального излучателя и ее производные. Коэффициенты ряда для отраженного поля определяются через диаграммную функцию и ее производные мнимого излучателя, равную произведению диаграммной функции реального излучателя и коэффициента отражения от границы.

Отметим, что полученные выражения в случае ненаправленного излучателя ($D(\theta, \varphi) \equiv 1$) переходят в соответствующие выражения для поля сферической волны, отраженной от плоской границы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генералов А. В.* Распространение звуковых волн от направленных источников вблизи поверхности земли // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 998—1002.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. *Шарфарец Б. П.* Геометрооптическое представление поля направленного излучателя в неоднородных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 738—742.
4. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 932 с.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Поступило в редакцию
15.III.1988