

© 1993 г. О. А. Годин

**К ТЕОРИИ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА  
В ДВИЖУЩЕЙСЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ\***

На основе точного интегрального представления рассматривается поле точечного монохроматического источника звука, помещенного в регулярный волновод или анти-волновод в движущейся жидкости. Использование при анализе метода эталонных интегралов позволяет уточнить и обобщить результаты, полученные ранее при помощи метода перевала. Показано, что на больших по сравнению с длиной волны горизонтальных расстояниях от источника дискретный спектр поля при произвольной скорости течения допускает сравнительно простое представление, сходное с аналогичной асимптотикой поля в неподвижной среде и допускающее наглядную интерпретацию в рамках подхода «горизонтальные лучи — вертикальные моды».

Движение среды во многих случаях качественно меняет картину распространения акустических волн и заметно усложняет теоретическое описание звукового поля [1]. Исследованию влияния потока жидкости (например, ветра в атмосфере или течений в океане) на поле сосредоточенного источника звука посвящена обширная литература. Возбуждение нормальных волн точечным монохроматическим источником в волноводе в движущейся среде рассматривалось еще в 60-х годах [2], однако корректное решение этой задачи было впервые предложено, насколько нам известно, лишь в недавней монографии [1]. Оно подробно обсуждается и сопоставляется с предшествующими работами в [3, 4]. Для решений модельного волнового уравнения, совпадающего с истинным волновым уравнением в жидкости с не зависящими от координат плотностью и скоростью потока, соотношения, аналогичные результатам ([1], § 15.3), были из других соображений получены в [5].

В ([1], § 15.3) для выделения решений, имеющих физический смысл, предполагалось, что в среде имеется бесконечно малая диссипация; в [5] среда считалась не поглощающей и для отбора решений использовался принцип предельной амплитуды. В реальных условиях величина коэффициента поглощения всегда отлична от нуля и конечна. Цель настоящей работы — анализ дискретного спектра поля точечного источника в волноводе в движущейся среде при наличии поглощения. Предложенный в ([1], § 15.3) подход будет распространен на моды, мнимая часть постоянных распространения которых имеет конечную величину. Полученные результаты описывают также возбуждение квазимод точечным источником в антиволноводе в слоистой движущейся среде.

Рассмотрим акустическое поле точечного гармонического источника в произвольной слоистой жидкости с устойчивым течением. Будем предполагать, что плотность среды  $\rho$ , скорости звука  $c$  и потока  $u$  зависят только от вертикальной декартовой координаты  $z$ . В рамках слоистой модели среды вертикальную компоненту  $u$  следует считать равной нулю [6]. Подразумевается временная зависимость акустического поля вида  $\exp(-i\omega t)$ . Дискретный спектр поля, создаваемого монополюсным источником звука единичной амплитуды, имеет представление ([1], § 15.3; [3])

$$P_d(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{\varphi-\pi/2}^{\varphi+\pi/2} d\psi \xi_n [F_1^{(n)} B'(\eta) + i \xi_n F_2^{(n)} B(\eta)], \quad \text{Im } \xi_n > 0, \tag{1}$$

$$\eta = \xi_n(\psi) r \cos(\psi - \varphi), \quad (2)$$

где  $R_0 = (x_0, y_0, z_0)$  — координаты источника,  $R - R_0 \equiv (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z - z_0)$ , штрих здесь и далее означает производную от функции по ее аргументу,  $\xi_n = \xi_n(\psi)$  и  $F_j^{(n)} = F_j^{(n)}(\psi)$  — полюса и вычеты в них функций  $F_j$ , определенных равенствами

$$F_j(\xi, \psi) = 0,5 \xi^{1-j} [F(\xi, \psi) - (-1)^j F(\xi, \psi + \pi)], \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

$F(\xi, \psi)$  — функция Грина одномерной краевой задачи, которой удовлетворяет спектральная компонента поля с зависимостью  $\exp(i\xi R)$ ,  $\xi \equiv (\xi \cos \psi, \xi \sin \psi, 0)$  от горизонтальных координат. Скорость течения входит в краевую задачу только через величину  $\beta = 1 - \xi u / \omega$ .

Представление (1) содержит специальную функцию

$$B(q) \equiv iq \int_0^{\pi/2} H_0^{(1)}(q \cos \alpha) d\alpha, \quad |\arg q| < \pi, \quad (4)$$

исследованную в [3]. Она удовлетворяет уравнению

$$B''(q) + B(q) = -2/\pi q \quad (5)$$

и является линейной комбинацией интегрального синуса и интегрального косинуса:

$$B(q) = i \sin q + \frac{2}{\pi} \sin q \int_q^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \frac{2}{\pi} \cos q \int_0^q \frac{\sin x}{x} dx. \quad (6)$$

В дальнейшем нам потребуется связь между значениями  $B$  в точках  $q$  и  $q_1 = e^{\pi i} q^*$ , лежащих в комплексной плоскости  $q$  симметрично относительно мнимой оси. (Звездочка, как обычно, означает комплексное сопряжение.) Чтобы выразить  $B(q)$  через  $B(q_1)$ , воспользуемся тождеством  $H_0^{(1)}(qs) = -[H_0^{(1)}(q_1 s)]^*$  ([7], гл. 9). Подставляя его в (4), получаем соотношение симметрии

$$B(q) = -[B(e^{\pi i} q^*)]^*. \quad (7)$$

Поведение функции  $B$  при малых  $q$  описывается равенством [3]

$$B(q) = iq - 2\pi^{-1} q (\ln q + \gamma - 1) + O(q^3), \quad (8)$$

где  $\gamma = 0,5772\dots$  — постоянная Эйлера. В обратном предельном случае  $|q| \gg 1$ , пользуясь (6) и известными асимптотическими разложениями интегрального синуса и интегрального косинуса ([7], гл. 5), нетрудно отыскать асимптотику  $B$  для значений  $q$ , лежащих в I квадранте комплексной плоскости. Учитывая (7), получаем

$$B(q) = e^{iq} \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} q) - \frac{2}{\pi q} \left( 1 - \frac{2!}{q^2} + \frac{4!}{q^4} - \dots \right), \quad \operatorname{Im} q \geq 0, \quad |q| \gg 1. \quad (9)$$

Интегральное представление (1) является точным, если при любом  $\psi$  все полюса  $F$  как функции  $\xi$  простые. Более наглядное и удобное для вычислений представление дискретного спектра удастся получить на больших по сравнению с длиной звуковой волны горизонтальных расстояниях от источника. Точнее, пусть существует  $k_n > 0$ , такое, что при всех  $\psi$   $|\xi_n(\psi)| \geq k_n$ . На расстояниях  $r \gg k_n^{-1}$  интегралы в (1) можно заменить их асимптотиками. Для вычисления последних в ([1], § 15.3; [3]) функция  $B$  заменялась главным членом ее асимптотики (9), а полученные интегралы оценивались методом стационарной фазы. Тогда

$$P_d(R, R_0) = \sum_n \left\{ \left| \frac{\xi_n}{2\pi r D} \right|^{1/2} F^{(n)}(\psi) \exp \left[ i \xi_n' \cos(\psi - \varphi) + i \frac{\pi}{4} (2 - \operatorname{sgn}(\xi_n D)) \right] \right\}_{\psi = \psi_n},$$

$$\text{Im } \xi_n > 0, \quad (10)$$

где суммирование ведется по полюсам  $\xi_n(\psi)$  функции  $F(\xi, \psi)$ ,  $F^{(n)} = F_1^{(n)} + \xi_n F_2^{(n)}$  — вычет в полюсе  $\xi_n$  функции  $F$  (его легко выразить через нормированные собственные функции, отвечающие собственному значению  $\xi_n$  [4]),

$$D(\psi) = \cos(\psi - \varphi) [1 + 2 \operatorname{tg}^2(\psi - \varphi) - \xi_n^{-1} \partial^2 \xi_n / \partial \psi^2], \quad (11)$$

а азимутальный угол  $\psi_n$  удовлетворяет уравнению  $\partial \eta / \partial \psi = 0$  или

$$\operatorname{tg}(\psi_n - \varphi) = \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \xi_n \Big|_{\psi = \psi_n}, \quad (12)$$

и задает направление горизонтального волнового вектора  $n$ -й моды, групповая скорость которой направлена от источника к приемнику. Предполагается, что  $D(\psi_n) \neq 0$ .

Пренебрежение вкладом окрестностей конечных точек интервала интегрирования в (1), где аргумент функции  $B$   $\eta \leq 1$  и асимптотика (9) неприменима, приводит к погрешности  $\operatorname{const}/r$  в оценке интеграла. Поэтому анализ дискретного спектра поля, изложенный в ([1], § 15.3; [3]), пригоден только для отыскания главного члена асимптотики  $P_d$  по степеням  $1/r$  в случае бесконечно малого поглощения. Если  $\operatorname{Im} \xi_n > 0$  принимает конечные значения, то правая часть (10), экспоненциально затухающая с ростом  $r$ , на больших расстояниях становится малой по сравнению с оценкой  $\operatorname{const}/r$  погрешности расчета. Чтобы избавиться от указанных ограничений и глубже исследовать структуру дискретного спектра поля в движущейся среде, необходимо вместо метода стационарной фазы воспользоваться более тонкими подходами к построению асимптотик интегралов по  $\psi$  в (1).

Эти интегралы можно свести к исследованным в Приложении к статье эталонным интегралам  $T_1$  и  $T_2$ . Заметим сначала, что полюсами функций  $F_{1,2}(\xi, \psi)$  (3) при фиксированном  $\psi$  помимо полюсов  $\xi = \xi_n(\psi)$  функции  $F(\xi, \psi)$  являются и точки  $\xi = \xi_n(\psi + \pi)$ . Будем обозначать их  $\tilde{\xi}(\psi)$ . Объединяя вклады полюсов  $\xi_n$  и  $\tilde{\xi}_n$  в дискретный спектр поля, из (1), (3) получаем

$$P_d(R, R_0) = \sum_n P_n, \quad (13)$$

$$P_n = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi - \pi/2}^{\varphi + \pi/2} \left\{ \xi_n(\psi) F^{(n)}(\psi) [B'(\eta) + iB(\eta)] + \tilde{\xi}_n F^{(n)}(\psi + \pi) [B'(\tilde{\eta}) - iB(\tilde{\eta})] \right\} d\psi, \quad (14)$$

где  $\tilde{\eta} \equiv \tilde{\xi}_n(\psi) r \cos(\psi - \varphi)$ . Заменой переменной интегрирования

$$\eta = a \cos \alpha, \quad a \equiv \xi_n(\psi_n) r \cos(\psi_n - \varphi) \quad (15)$$

интегралы от  $B'$  и  $B$  в (14) сводятся к интегралам вида (П. 1) и (П. 2) соответственно, где  $Q(\alpha) = Q_0(\alpha) + Q_0(-\alpha)$ ,  $S(\alpha) = S_0(\alpha) + S_0(-\alpha)$ ,  $Q_0(\alpha) = -a \xi_n F^{(n)} \sin \alpha \cdot (4\pi \partial \eta / \partial \psi)^{-1}$ ,  $S_0(\alpha) = -ia \xi_n F^{(n)} \sin \alpha (4\pi d\eta / d\psi)^{-1}$ .

В интегралах от  $B'(\tilde{\eta})$ ,  $B(\tilde{\eta})$  делается аналогичная (15) замена переменных  $\tilde{\eta} = \tilde{a} \cos \alpha$ . Соответствующее стационарное значение угла  $\psi$ , удовлетворяющее уравнению  $\partial \tilde{\eta} / \partial \psi = 0$ , обозначим  $\tilde{\psi}_n$ . Тогда

$$\tilde{a} = \tilde{\eta}(\tilde{\psi}_n) \equiv \tilde{\xi}_n(\tilde{\psi}_n) r \cos(\tilde{\psi}_n - \varphi). \quad (16)$$

Мы предполагаем, что уравнения  $\partial \eta / \partial \psi = 0$  и  $\partial \tilde{\eta} / \partial \psi = 0$  имеют единственное решение при  $|\psi - \varphi| \leq \pi/2$ , причем  $\partial^2 \eta / \partial \psi^2 \neq 0$  при  $\psi = \psi_n$ ;  $\partial^2 \tilde{\eta} / \partial \psi^2 \neq 0$  при  $\psi = \tilde{\psi}_n$ . В совокупности эти предположения обеспечивают гладкость замены пе-

ременных  $\alpha(\psi)$  и функций  $Q(\alpha)$  и  $S(\alpha)$ , а также отображение интервала интегрирования  $\psi \in (\varphi - \pi/2, \varphi + \pi/2)$  на интервал  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Предположение о том, что  $\eta(\psi)$  имеет единственную стационарную точку, причем первого порядка, имеет простой физический смысл. Оно означает, что для  $n$ -й моды вектор групповой скорости оказывается направленным от источника в рассматриваемую точку наблюдения только при единственном направлении волнового вектора моды и что амплитуда последней в отсутствие поглощения убывает с расстоянием пропорционально  $r^{-1/2}$ . В терминах теории «вертикальные моды — горизонтальные лучи» [8, 9] наши предположения состоят в том, что точка наблюдения не лежит на каустике горизонтальных (модовых) лучей и что в эту точку приходит ровно один горизонтальный луч, соответствующий моде номера  $n$ .

Используя для построения асимптотики  $P_n$  соотношения (П. 13), (П. 14), после довольно громоздких выкладок приходим к следующему результату:

$$P_n [1 + O(k_n^{-2} r^{-2})] = \left( \frac{\xi_n}{2\pi r D} \right)^{1/2} F^{(n)} \left( 1 + \frac{d_1}{\xi_n r} \right) \exp \left[ i \xi_n r \cos(\psi - \varphi) + \frac{i\pi}{4} \right] \Big|_{\psi = \psi_n} + h_1^{(n)}/r + h_2^{(n)}/r^2; \quad (17)$$

$$d_1 = - \frac{i}{8 \cos(\psi_n - \varphi)} \left[ 1 + 4 \frac{Q''(0)}{Q(0)} \right], \quad (18)$$

$$h_1^{(n)} = \frac{-i}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\cos \chi} [F^{(n)}(\varphi + \chi) + F^{(n)}(\varphi - \chi) - F^{(n)}(\varphi + \chi + \pi) - F^{(n)}(\varphi - \chi + \pi)]. \quad (19)$$

Входящий в (17) коэффициент  $h_2^{(n)}$  выражается подобно коэффициенту  $h_1^{(n)}$  через интегралы от комбинаций функций  $\xi_n(\psi)$  и  $F^{(n)}(\psi)$ . Подчеркнем, что имеющиеся в правых частях (П. 13), (П. 14) слагаемые, содержащие  $\ln r$ , взаимно уничтожились и не вошли в (17).

Сопоставление формул (10) и (17) показывает, что при  $k_n r > 1$ ,  $\text{Im } \xi_n \rightarrow 0$  главный член асимптотики  $P_n$  совпадает с  $n$ -м слагаемым суммы (10). Уточнение результата, полученного в ([1], § 15.3; [3]), идет по двум линиям. Во-первых, асимптотика  $P_n$  содержит слагаемые вида  $h_m^{(n)} r^{-m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , где  $h_m^{(n)}$  не зависит от  $r$ . Они не возникают в случае неподвижной среды. Во-вторых, коэффициент при  $r^{-1/2} \exp [i \xi_n r \cos(\psi_n - \varphi)]$ , как и при  $u \equiv 0$ , представляет собой ряд по обратным степеням  $r$ . (В (10) этот ряд представлен своим главным, не зависящим от  $r$  членом.) Рассматриваемая компонента асимптотики  $P_n$  обусловлена вкладом в интеграл окрестности стационарной точки  $\psi = \psi_n$ . Выражая при помощи (15)  $d^2 Q/d\alpha^2$  в (18) через производные от  $\xi_n$  и  $F^{(n)}$  по  $\psi$ , нетрудно убедиться, что первое слагаемое в (17) совпадает с результатом расчета по формулам (11.9), (11.12) из [1] вклада стационарной точки  $\psi = \psi_n$  в аналогичный (14) интеграл, где функция  $B(q)$  заменена на  $\exp(iq) \text{sgn}(\text{Re } q)$ .

Асимптотика  $P_n$  в отличие от асимптотик (П. 13), (П. 14) интегралов от  $B'(\tilde{\eta})$  и  $B(\tilde{\eta})$  по отдельности не содержит слагаемых, пропорциональных  $\exp(i\tilde{a})$ . Легко видеть, что такие слагаемые отсутствуют не только в выписанных в (17) первых членах асимптотики  $P_n$ , но и во всех порядках по  $1/r$ , поскольку в силу (9) асимптотика при  $|\tilde{\eta}| \gg 1$  величины  $B'(\tilde{\eta}) - iB(\tilde{\eta})$ , стоящей под интегралом в (14), не содержит слагаемых, пропорциональных  $\exp(i\tilde{\eta})$ . Таким образом, полюса  $\xi_n(\psi)$  подынтегрального выражения не порождают распространяющихся волн в дальней

зоне источника, в то время как в ближайшей зоне вклады полюсов  $\xi_n(\psi)$  и  $\bar{\xi}_n(\psi)$  имеют сопоставимую величину [4].

При  $\text{Im } \xi_n > 0$  и  $r \gg 1/\text{Im } \xi_n$  в (17) будет доминировать слагаемое  $h_1^{(n)}/r$ . Принципиально важно, однако, что все слагаемые вида  $h_m^{(n)}/r^m$  взаимно уничтожаются при суммировании компонент дискретного спектра и не дают вклада в полное поле. Это вытекает из принципа причинности. Действительно, при излучении импульса в звуковое поле, которое можно представить как интеграл Фурье от монохроматических полей, рассматриваемые члены дадут вклад вида  $N_m(t)/r^m$ , где  $N_m$  — некоторая функция времени, не зависящая от  $r$ . Такой сигнал одновременно возникает при любых  $r$  и, следовательно, распространяется с бесконечной скоростью. Для устранения противоречия необходимо  $N_m \equiv 0$ , что приводит к равенству  $\sum_n h_m^{(n)} = 0$  и в частотной области. По той же причине асимптотика полного поля не может содержать слагаемых вида  $H_m r^{-m} \ln r$ .

Используя явное выражение (17), сделанный вывод можно подтвердить прямым расчетом. Рассмотрим для этого вспомогательную двумерную задачу о поле линейного монохроматического источника звука с координатами  $x = x_0, z = z_0$  в среде с теми же профилями  $c(z)$  и  $\rho(z)$ , что и в исходной задаче, и однонаправленным, перпендикулярным излучающей нити течением, скорость которого равна проекции скорости  $u(z)$  течения в задаче о точечном источнике на некоторое горизонтальное направление, характеризуемое азимутальным углом  $\varphi = \varphi_0$ .

Решение двумерной задачи [10] выражается через ту же функцию Грина  $F(\xi, \psi)$  вертикального волнового оператора, что и в трехмерной задаче, при  $\psi = \varphi_0$  и  $\psi = \varphi_0 + \pi$ . Условие непрерывности при  $x = x_0, z \neq z_0$  акустического давления, создаваемого волнами дискретного спектра поля линейного источника, можно записать в виде

$$\sum_n F^{(n)}(\varphi_0) = \sum_n F^{(n)}(\varphi_0 + \pi). \quad (20)$$

Подставляя это равенство в (19) при  $\varphi_0 = \varphi \pm \chi$ , получаем  $\sum_n h_1^{(n)} = 0$ . В виду непрерывности акустического давления вне источника последнее соотношение, доказанное для  $z \neq z_0$ , оказывается справедливым при любых  $z$ .

Таким образом, мы приходим к довольно простому результату: дискретный спектр звукового поля в движущейся среде на горизонтальных расстояниях от точечного источника, больших по сравнению с  $k_n^{-1}$ , имеет вид

$$P_d(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \sum_n \left\{ \left( \frac{\xi_n}{2\pi r D} \right)^{1/2} F^{(n)}(\psi) \left[ 1 + \frac{d_1}{\xi_n(r)} + \dots + \frac{d_2}{(\xi_n r)^2} + \dots \right] \exp \left[ i \xi_n r \cos(\psi - \varphi) + \frac{i\pi}{4} \right] \right\}_{\psi=\psi_n}, \quad (21)$$

где суммирование ведется по лежащим в верхней полуплоскости полюсам  $\xi_n(\psi)$  функции Грина  $F(\xi, \psi)$  вертикального волнового оператора, а  $\psi_n$  и  $D$  определены формулами (11) и (12). Для вычисления коэффициентов  $d_1, d_2, \dots$  при старших членах асимптотического разложения по степеням  $\xi_n r$  достаточно оценить по формулам метода перевала ([1], § 11) вклад стационарной точки  $\psi = \psi_n$  в интеграл по  $\psi$  от функции  $\exp [i \xi_n(\psi) \cos(\psi - \varphi)] \xi_n(\psi) F^{(n)}(\psi)$ .

Величина, стоящая под знаком суммы в (21), представляет собой вклад в поле отдельного горизонтального луча, соединяющего источник и приемник. (Для мод с  $\text{Im } \xi_n > 0$  горизонтальный луч является комплексным). Поэтому приведенный выше вывод формулы (20) можно рассматривать как обоснование использования

подхода «горизонтальные лучи — вертикальные моды» в случае волновода, заполненного движущейся средой.

В отличие от своего частного случая — соотношения (10), полученного в ([1], § 15.3; [3]), формула (21) справедлива и в поглощающей среде, а также для расчета вклада в поле нераспространяющихся мод и квазимод, соответствующие которым полюса не лежат на вещественной оси даже в отсутствие диссипации. На больших горизонтальных расстояниях от источника в волноводе вкладами комплексных полюсов в  $P_d$  можно, как правило, пренебречь по сравнению с полями распространяющихся мод. Учет квазимод становится существенным в случае антиволнового распространения звука, когда распространяющихся мод не существует. В известной нам литературе корректный вывод выражений для асимптотики  $P_d$  в движущейся среде при  $K_n r \gg 1$ ,  $\text{Im } \xi_n > 0$  отсутствовал. Дискретный спектр поля точечного источника звука в движущейся жидкости в условиях антиволнового распространения рассматривался в [11, 12], а в волноводе с поглощающей границей — в [11, 13]. Следует отметить, что авторы статей [11—13] пренебрегали квадратичными по  $M$  членами при вычислении дискретного спектра поля. Использованный в этих работах подход к выделению дискретного спектра из интегрального представления поля является неудовлетворительным вследствие неправомерного применения метода стационарной фазы для оценки интеграла от функции, которая может иметь полюс вблизи стационарной точки. (Подробнее сравнение двух подходов к выделению дискретного спектра поля в движущейся среде и полученных на их основе соотношений проводится в [3, 4] применительно к случаю волноводного распространения.) Используемые в [11—13] выражения для  $P_d$  получаются из главного члена асимптотики (21) формальной заменой  $\psi_n$  на  $\varphi$  и  $D$  на 1. Согласно [3],  $\psi_n - \varphi = O(M)$ ,  $D = 1 + O(M)$ , где  $M = u/c$  — число Маха течений. Поэтому сделанные в [11—13] заключения о свойствах  $P_d$  в конкретных задачах приближенно справедливы в случае медленных движений среды ( $M \ll 1$ ) постольку, поскольку можно пренебречь отличием от единицы множителя вида  $[1 + O(M)] \exp[i\xi_n r O(M^2)]$  в поле каждой моды и квазимоды.

Волноводное распространение звука в движущейся среде с поглощающей границей рассматривалось также в работе [14]. Хотя использованная в [14] процедура выделения дискретного спектра поля из его интегрального представления, как показано в [3], некорректна, для асимптотики дискретного спектра применительно к рассматриваемой в [14] конкретной задаче она приводит к соотношениям, аналогичным нашим формулам (10) — (12). Новый метод выделения дискретного спектра из интегрального представления поля предложен в монографии [15]. При произвольных  $r$  он, однако, не приводит к правильным результатам даже в случае неподвижной среды (см. формулу (2.3), ([15], с. 69)). Это связано с ошибкой в знаке при замене переменных в интеграле на с. 68, исправление которой делает невозможными последующие преобразования интегрального представления, описанные на с. 68—73 в [15].

## Приложение

### Асимптотические оценки интегралов, содержащих функции $B(q)$ и $B'(q)$

Рассмотрим интегралы следующего вида:

$$T_1 = \int_0^{\pi/2} B'(a \cos \alpha) Q(\alpha) d\alpha, \quad (\text{П.1})$$

$$T_2 = \int_0^{\pi/2} B(a \cos \alpha) S(\alpha) d\alpha, \quad (\text{П.2})$$

где  $Q$  и  $S$  — произвольные гладкие четные функции  $\alpha$ , а специальная функция  $B$  определена в основном тексте статьи. Такие интегралы возникают при исследовании дискретного спектра поля точечного источника звука в движущейся среде. Нас будет интересовать асимптотика интегралов  $T_{1,2}$  при  $|a| \rightarrow \infty, \text{Im } a \geq 0$ .

Если  $\text{Re } a \gg 1, \text{Re } a \gg \text{Im } a$ , то  $B(q) \sim \exp(iq)$ , согласно (9), и подынтегральное выражение в (П. 1), (П. 2) будет быстроосциллирующей функцией во всей области интегрирования, кроме малой окрестности точки  $\alpha = \pi/2$ , где  $B'$  имеет логарифмическую особенность. При  $\text{Im } a = 0$  основной вклад в интеграл дает окрестность стационарной точки  $\alpha = 0$  показателя экспоненты, и главный член асимптотики  $T_1$  и  $T_2$  может быть легко найден методом стационарной фазы. Вклад окрестности стационарной точки в асимптотику интеграла пропорционален  $\exp(ia)$ . Он экспериментально мал, когда  $\text{Im } a \rightarrow \infty$ . В этих условиях метод стационарной фазы непригоден даже для оценки главного члена асимптотики, и для анализа интегралов необходим иной подход.

Используя (5), представим подынтегральное выражение в (П. 2) в виде

$$B(a \cos \alpha) S(\alpha) = B(a \cos \alpha) \left\{ S\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \alpha \left[ S(0) - S\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} - \left[ \frac{2}{\pi a \cos \alpha} + B''(a \cos \alpha) \right] \sin \alpha S_1(\alpha), \quad (\text{П.3})$$

где

$$S_1(\alpha) \equiv \left[ S(\alpha) - S(0) \cos \alpha - S\left(\frac{\pi}{2}\right) (1 - \cos \alpha) \right] / \sin \alpha \quad (\text{П.4})$$

— гладкая нечетная функция  $\alpha$ . Интегрируя по частям слагаемое, содержащее  $B''$ , получаем

$$T_2 = S\left(\frac{\pi}{2}\right) I_1(a) + \left[ S(0) - S\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ I_3(a) + \frac{1}{a} \right] - \frac{2}{\pi a} \times \int_0^{\pi/2} d\alpha \frac{S(\alpha) - S(\pi/2)}{\cos \alpha} - \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} B'(a \cos \alpha) S_1'(\alpha) d\alpha. \quad (\text{П.5})$$

При выводе (П. 5) учтено, что  $S_1(0) = 0$  и что  $S_1(\alpha)B'(a \cos \alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \pi/2$ . Здесь и ниже мы используем три вспомогательных интеграла

$$I_1(a) \equiv \int_0^{\pi/2} B(a \cos \alpha) d\alpha, \quad I_2(a) = \int_0^{\pi/2} B'(a \cos \alpha) d\alpha, \quad (\text{П.6})$$

$$I_3(a) = \int_0^{\pi/2} \cos \alpha B(a \cos \alpha) d\alpha.$$

Временно будем считать  $I_{1,2,3}$  известными функциями  $a$ . Аналогично выводу формулы (П. 5) из (П. 1) нетрудно получить

$$T_1(a) = Q(0) I_2 + \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} B(a \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(0)}{\sin \alpha} \right]' d\alpha. \quad (\text{П.7})$$

Формула (П. 5) выражает  $T_2$  через известные функции и интеграл типа  $T_1$  ( $cQ(\alpha) = S_1'(\alpha)$ ), домноженный на малую величину  $a^{-1}$ . Аналогично, (П. 7) выражает  $T_1$  через известные функции и интеграл типа  $T_2$ . Используя для последнего представление (П. 5), получаем асимптотику  $T_1$  с точностью до множителя  $1 + O(a^{-2})$ . Подставляя полученный результат в правую часть (П. 5), найдем асимптотику  $T_2$  с точностью до множителя  $1 + O(a^{-3})$  и т. д. Повторение рекуррентной процедуры

позволяет построить асимптотические разложения  $T_1$  и  $T_2$  в терминах  $I_1, I_2, I_3$  с любой наперед заданной точностью относительно параметра  $|a|^{-1}$ .

Перейдем к анализу вспомогательных интегралов. Интеграл  $I_2$  был вычислен в [3]:

$$I_2(a) = 0,5i\pi H_0^{(1)}(a). \quad (\text{П.8})$$

При помощи (5) и (П. 6)  $I_3$  легко выражается через производную от  $I_2$ :

$$I_3(a) = -1/a - dI_2/da = 0,5i\pi H_1^{(1)}(a) - 1/a. \quad (\text{П.9})$$

Для оценки  $I_1$  представим эту функцию в виде суммы двух интегралов:

$$I_1(a) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos^2 \alpha B(a \cos \alpha) + \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^2 \alpha B(a \cos \alpha). \quad (\text{П.10})$$

Второй интеграл, используя (5), запишем в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^2 \alpha B(a \cos \alpha) &= -\frac{1}{a} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\epsilon} \left[ d\alpha \frac{2 \sin^2 \alpha}{\pi \cos \alpha} + \sin \alpha dB'(a \cos \alpha) \right] = \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos \alpha B'(a \cos \alpha) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\pi/2-\epsilon} d\alpha \frac{2 \sin^2 \alpha}{\pi \cos \alpha} + \cos \epsilon B'(\sin \epsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Интеграл от  $\sin^2 \alpha / \cos \alpha$  вычисляется элементарно, а от  $B' \cos \alpha$  может быть оценен при помощи (П. 7). Учитывая (8) при переходе к пределу, из (П. 10), (П. 11) находим

$$I_1(a) [1 + O(a^{-2})] = I_3(a) - \frac{I_2(a)}{2a} + \frac{1+i}{a} - \frac{2}{\pi a} (\gamma + \ln 2a), \quad (\text{П.12})$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера. При необходимости описанным выше способом можно отыскать и старшие члены асимптотики  $I_1$ .

Выпишем в заключение в явном виде несколько первых членов асимптотических разложений интегралов  $T_1$  и  $T_2$ , полученных при помощи формул (П. 5), (П. 7) — (П. 9), (П. 12) и известных ([7], гл. 9) разложений функций Ханкеля:

$$\begin{aligned} T_1(a) [1 + O(a^{-2})] &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \exp\left(ia + \frac{i\pi}{4}\right) Q(0) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{i}{8a} \left[ 1 + \frac{4Q''(0)}{Q(0)} \right] \right\} + \frac{2}{\pi a^2} Q'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{i\pi}{2} - \gamma - \ln 2a\right) - \\ &- \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \left\{ \frac{Q'(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} [Q(\alpha) - Q(0)] - Q'\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}; \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

$$\begin{aligned} T_2(a) [1 + O(a^{-2})] &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \exp\left(ia - \frac{i\pi}{4}\right) S(0) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{i}{8a} \left[ 1 + \frac{4S''(0)}{S(0)} \right] \right\} + \frac{2S(\pi/2)}{\pi a} \left(\frac{i\pi}{2} - \gamma - \ln 2a\right) - \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \frac{S(\alpha) - S(\pi/2)}{\cos \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Отметим, что асимптотики интегралов вида (П. 1), (П. 2) содержат наряду с обусловленным вкладом окрестности стационарной точки  $\alpha = 0$  слагаемыми, пропорциональными  $\exp(ia)$ , также члены вида  $a^{-n}$ ,  $a^{-n} \ln a$ , где  $n = 1, 2, \dots$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
2. Pridmore-Brown D. C. Sound propagation in a temperature — and wind-stratified medium//J. Acoust. Soc. Amer. 1962. V. 34. № 4. P. 438—443.
3. Годин О. А. Дискретный спектр звукового поля в движущейся среде//Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 630—636.
4. Годин О. А. О свойствах дискретного спектра звукового поля точечного источника в движущейся среде//Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 999—1006.
5. Вдовичева Н. К., Окомелькова И. А., Шерешевский И. А. О звуковом поле гармонического источника в слоистой среде с течением//Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 5—11.
6. Годин О. А. О приближении слоистой движущейся среды в акустике//Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1378—1382.
7. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979.
8. Барридж Р., Вейнберг Г. Горизонтальные лучи и вертикальные моды//Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. С. 76—125.
9. Годин О. А. Волноводное распространение звука в горизонтальнонеоднородном океане с течениями//Океаническая акустика. М.: Наука, 1993.
10. Swinbanks M. A. The sound field generated by a source distribution in a long duct carrying sheared flow//J. Sound Vibr. 1975. V. 40. № 1. P. 51—76.
11. Chunchuzov I. P., Bush G. A., Kulichkov S. N. On acoustic impulse propagation in a moving inhomogeneous atmospheric layer//J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 88. № 1. P. 455—461.
12. Остаев В. Е. О дискретном спектре звукового поля точечного источника в стратифицированной движущейся среде//Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 486—491.
13. Zorumski W. E., Willshire W. L. The acoustic field of a point source in a uniform boundary layer over an impedance plane//AIAA Paper. 1986. № 1923. P. 1—14.
14. Остаев В. Е. Волноводное распространение высокочастотного звукового поля в стратифицированной движущейся среде вблизи импедансной поверхности//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 11. С. 1204—1212.
15. Григорьева Н. С. Асимптотические методы в задачах о распространении звука в неоднородной движущейся среде. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.

Институт океанологии  
им. П. П. Ширшова  
Российской академии наук

Поступила в редакцию  
27.02.92

О. А. Годин

### ON THEORY OF WAVEGUIDE SOUND PROPAGATION IN A MOVING LAYERED MEDIUM

Sound propagation in regular waveguides and antiwaveguides in moving media is discussed on the basis of the exact integral representation of a point source field. Application of a new version of the reference integrals method to the derivation of field asymptotics at large source-receiver separations allows to generalize and specify results obtained earlier. Final expressions obtained for the discrete spectrum of the field are rather simple. They admit of visual physical interpretation in terms of «horizontal rays and vertical modes».

Временное будем считать  $T_{22}$  известными функциями  $\alpha$ . Аналогично выводу формулы (II. 5) из (II. 1) нетрудно получить

$$T_1(\alpha) = Q(\alpha) T_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} B(\alpha \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(\alpha \cos \alpha)}{\alpha \sin \alpha} - \frac{Q(\alpha \cos \alpha) - Q(\alpha \cos^2 \alpha)}{\alpha \sin^2 \alpha} \right] d\alpha. \quad (II. 7)$$

Формула (II. 7) выражает  $T_1$  через известные функции и интеграл типа  $T_2$ . Используя для последнего выражение (II. 5), можно получить

$$T_1(\alpha) = Q(\alpha) T_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} B(\alpha \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(\alpha \cos \alpha)}{\alpha \sin \alpha} - \frac{Q(\alpha \cos \alpha) - Q(\alpha \cos^2 \alpha)}{\alpha \sin^2 \alpha} \right] d\alpha. \quad (II. 8)$$

Выражение (II. 8) можно переписать в виде

$$T_1(\alpha) = Q(\alpha) T_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} B(\alpha \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(\alpha \cos \alpha)}{\alpha \sin \alpha} - \frac{Q(\alpha \cos \alpha) - Q(\alpha \cos^2 \alpha)}{\alpha \sin^2 \alpha} \right] d\alpha. \quad (II. 9)$$

Выражение (II. 9) можно переписать в виде

$$T_1(\alpha) = Q(\alpha) T_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} B(\alpha \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(\alpha \cos \alpha)}{\alpha \sin \alpha} - \frac{Q(\alpha \cos \alpha) - Q(\alpha \cos^2 \alpha)}{\alpha \sin^2 \alpha} \right] d\alpha. \quad (II. 10)$$

Выражение (II. 10) можно переписать в виде

$$T_1(\alpha) = Q(\alpha) T_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} B(\alpha \cos \alpha) \left[ \frac{Q(\alpha) - Q(\alpha \cos \alpha)}{\alpha \sin \alpha} - \frac{Q(\alpha \cos \alpha) - Q(\alpha \cos^2 \alpha)}{\alpha \sin^2 \alpha} \right] d\alpha. \quad (II. 11)$$