А К У С Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Т о м 39 1 9 9 3 В ы п. 3

УДК 534.26

© 1993 г. С. Н. Курилкина

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЧАСТОТЫ УПРУГОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКИ ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Рассмотрены особенности генерации упругого излучения на преобразованной частоте при трехволновом взаимодействии в гиротропных средах с квадратичной нелинейностью. Показано, что появление из-за наличия акустической активности эллиптичности волн, распространяющихся в кристалле, приводит к возможности взаимодействия и преобразования частоты излучения в тех направлениях, где таковое в негиротропных средах отсутствует. Установлено, что генерация второй гармоники поперечных волн возможна лишь для кристаллов средней категории вдоль и вблизи акустических осей, где в отсутствие гиротропии имеет место низкий порядок касания полостей поверхности волновых векторов.

В последнее десятилетие теоретическому и экспериментальному исследованию нелинейных взаимодействий в кристаллах, и в частности генерации упругого излучения на преобразованной частоте, посвящен ряд работ [1—4]. Однако при рассмотрении данного вопроса обычно ограничиваются негиротропными кристаллами. В настоящем сообщении рассматривается влияние гиротропии на генерацию излучения на преобразованной частоте. Обсуждается возможность коллинеарного взаимодействия сдвиговых волн как одной, так и ортогональных поляризаций вдоль и вблизи акустических осей, коллинеарных осям симметрии выше второго порядка, а также лежащих в плоскости, ортогональной оси четвертого порядка в тетрагональных кристаллах, где гиротропия не подавляется анизотропией и экспериментально наблюдаема.

Рассмотрим процесс генерации излучения на преобразованной частоте $\omega = \omega_1 \pm \omega_2$ при смешивании двух волн, для волновых векторов которых полагается выполненным условие $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Тогда нелинейное уравнение для плоских монохроматических волн в акустически гиротропных средах примет вид:

$$LU = (\Lambda + iG^{x} - \omega^2)\,\mathbf{U} = -\,iU_{01}U_{02}k_1k_2^2\mathbf{N}\exp - i\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}, \tag{1}$$

$$\Lambda_{ik} = c_{ijkl}k_jk_l\ (\mathbf{G}^{x})_{ik} = \delta_{ilk}G_l,\ \ G_l = \frac{1}{2}\,\delta_{jlm}b_{rjm_np}k_rk_nk_p,$$

$$N_i = c'_{ijklrq}n_{1r}n_{2j}n_{2l}a_{1q}a'_{2k}c'_{ijklqr} =$$

$$= c_{ijklqr} + c_{ijlq}\delta_{kr} + c_{ilrq}\delta_{jk} + c_{ijlq}\delta_{jr},$$

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_s,$$

где $c_{ijl\,l}$, c_{ijklqr} и b_{rjmnp} — компоненты тензоров модулей упругости второго и третьего порядка и акустической гирации соответственно, отнесенные к плотности среды, G_l — вектор акустической гирации, δ_{jlm}, δ_{ik} — символы Леви — Чивита и Кронекера, $\mathbf{k}$ — волновой вектор волны на преобразованной частоте, а $\mathbf{U} = U\mathbf{a}$ — векторная амплитуда, $\mathbf{a}$ — вектор поляризации, $\mathbf{N}$ — вектор вынуждающей силы, U_{0i} — амплитуды взаимодействующих волн, $\mathbf{a}'$ равен $\mathbf{a}$ или $\mathbf{a}^*$ соответственно в случае генерации излучения суммарной или разностной частоты. Векторы поляризации волн на преобразованной частоте полагаются известными и такими, как в линейной среде, т. е. как и в случае оптики, определяются соотношением $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^* = \overline{L}/\mathrm{Sp}\overline{L}$ [5]. Тогда в приближении заданного поля с учетом нулевых граничных условий решение нелинейного волнового уравнения (1) представимо в виде

$$U_i = \{-iU_{01}U_{02}k_1k_2^2a_i\Gamma\,(1 - \exp - i\Delta k_n r_n)\ /$$

$$2a_i c'_{ijk_l}\Delta k_j k_l a_k^*\}\ \exp\,(k_n r_n - \omega t), \tag{2}$$

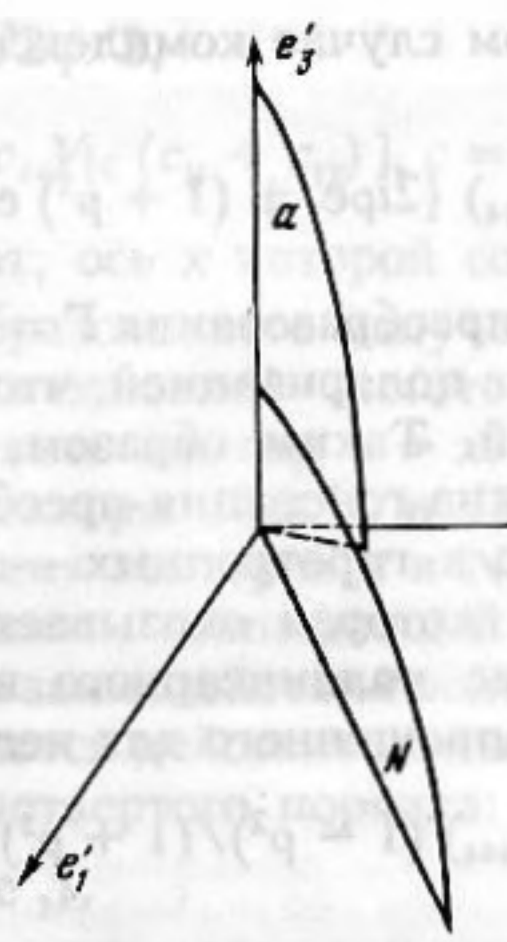
где $c_{ijk_l}{}' = c_{ijl_l} + ib_{ijk_ln}, k_n$, $\Gamma = a_i^* N_i$ — коэффициент преобразования, являющийся для гиротропных сред комплексным параметром и определяющий эффективность генерации. Как следует из последнего соотношения, коэффициент преобразования равен проекции вектора вынуждающей силы на вектор поляризации преобразованной волны и в общем случае вследствие их комплексности оказывается большим или равным соответствующему коэффициенту преобразования без учета гиротропии. Взаимодействие будет максимальным, если плоскости векторов поляризации и вынуждающей силы параллельны, и их большие полуоси, совпадающие с соответствующими векторами в отсутствие гиротропии [6], коллинеарны. Ортогональность же больших полуосей, как, впрочем, и плоскостей вектора поляризации и вынуждающей силы, отнюдь не означает отсутствия преобразования частоты излучения в отличие от негиротропных кристаллов, поскольку и в этом случае проекция вектора вынуждающей силы на вектор поляризации преобразованной волны, а следовательно, и коэффициент Г, может быть отлична от нуля (см., например, рисунок). Тогда вообще говоря, в гиротропных кристаллах оказывается возможным преобразование частоты излучения и в тех направлениях, для которых в негиротропных таковое отсутствует. Положим для определенности, что волны на основной и преобразованной частотах распространяются в одном направлении, коллинеарном оси z выбранной системы координат. Тогда выражение (2) можно упростить, и для коллинеарного взаимодействия вектор смещения преобразованного излучения имеет вид

$$\mathbf{U} = \{U_{01}U_{02}k_1k_2^2\mathbf{a}\Gamma\,(1 - \exp - i\Delta kz)/i2\Delta k\omega v\}\ \exp i\,(kz - \omega t). \tag{3}$$

Одним из экспериментально наблюдаемых примеров коллинеарного взаимодействия в нелинейных кристаллах является генерация второй гармоники (см., например, [2]). Кроме этого, наиболее сильно гиротропия проявляется вдоль и вблизи акустических осей и для сдвиговых волн, поэтому рассмотрение генерации второй гармоники в этих направлениях представляет особый интерес. Как известно [6], существенным следствием наличия гиротропии является устранение касания полостей поверхности фазовых скоростей в особых кратных или конических точках. В результате в направлении акустических осей, совпадающих с осями симметрии выше второго порядка, а также лежащих в плоскости, ортогональной оси симметрии четвертого порядка, скорости распространения сдвиговых волн в кристалле будут равны $v_{1,2}^2 = v_0 \pm g$, $v_0^2 = c_{44}$, $g = \mathrm{G}n/k^2$. Волны в направлении осей оказываются циркулярно поляризованными, и их векторы поляризации, неоднозначно определенные при отсутствии гиротропии, определяются проекторами $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^*$, где для акустических осей, коллинеарных осям симметрии кристалла выше второго порядка, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2/\sqrt{2}$. Решая задачу о генерации излучения на удвоенной частоте, рассмотрим три возможных случая: генерацию волнами правой, левой круговой поляризации и их взаимодействие. Тогда вектор вынуждающей силы при распространении звука вдоль оси симметрии третьего порядка в тригональных кристаллах для первых двух случаев задается выражением

$$N_i = c_{i3k3q3}a_{1k}a'_{2q},\ \mathbf{N}\,(c_{14} - c_{444})\,(\pm i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \tag{4}$$

и коэффициент преобразования $\Gamma = \mathbf{a}^*\mathbf{N}$ оказывается отличным от нуля лишь при условии, что вектор поляризации преобразованной волны ортогонален век-



Взаимное расположение векторов вынуждающей силы и поляризации волны на преобразованной частоте в случае коллинеарного взаимодействия сдвиговых волн одной круговой поляризации вблизи акустической оси, лежащей в плоскости, ортогональной оси симметрии четвертого порядка в тетрагональных кристаллах. Орт l_1' коллинеарен акустической оси

торам поляризации волн на основных частотах. Таким образом, волны левой круговой поляризации генерируют право циркулярно поляризованное излучение и наоборот. Аналогичный вывод для кристалла кварца получен в [7] путем непосредственного решения волнового уравнения (1). Для взаимодействия волн разной круговой поляризации, как следует из (1), $\mathbf{N} \equiv 0$, и, следовательно, таковое для указанных волн отсутствует.

Наличие пространственной дисперсии нарушает фазовый синхронизм, так как $k_{п,л}(\omega_1 + \omega_2) \neq k_{л,п}(\omega_1) + k_{л,п}(\omega_2)$. Поэтому, как следует из (3), амплитуда гармоники является периодической функцией координат в направлении распространения волны, т. е. испытывает пространственные биения, период которых, например для случая генерации второй гармоники, определяется выражением

$$x_0 = \pi/\Delta k = \pi v_0^3/\omega\ [g(2\omega) + g(\omega)]. \qquad (5)$$

Величина проекции вектора гирации на акустическую ось, как видно из (1), зависит от частоты и, в свою очередь, оказывает влияние на период биений амплитуды гармоники x_0. Поскольку $g(2\omega) \cong 2g(\omega)$, учет этой зависимости приводит к существенным поправкам в определении x_0. Так, для кристалла α-кварца на частоте 10^9 Гц, например, с учетом дисперсии вектора гирации $x_0 = 1{,}32$ см, без учета же дисперсии период пространственных биений составляет 1,96 см, т. е. при этом погрешность достигает 30%.

При рассмотрении генерации излучения на разностной частоте в выражении для вынуждающей силы $\mathbf{N}$ следует положить $\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2^*$. Тогда вектор $\mathbf{N}$ отличен от нуля лишь в случае взаимодействия разно поляризованных волн, определяется соотношением (4), и при этом генерируемое излучение может иметь как правую, так и левую круговую поляризацию. Кроме этого, как следует из (3), вектор смещения последнего не зависит от времени. Тогда вдоль оси симметрии третьего порядка в тригональных кристаллах возможна генерация стационарного, переменного в пространстве поля.

Рассмотрим теперь преобразование частоты излучения вблизи оси симметрии третьего порядка, для определенности положив, что направление распространения сдвиговых волн отклонено от последней в плоскости $x_1 = 0$ на малый угол θ. Тогда, согласно [6], соотношение $\mathbf{a}_{1,2} = (\mathbf{e}_{1,2} + i\rho\mathbf{e}_{2,1})/\sqrt{1+\rho^2}$ определяет соответственно медленные и быстрые квазипоперечные волны при $\theta > 0$ и, наоборот, при $\theta < 0$. Здесь ρ — эллиптичность волн. Тогда в отличие от рассмотренного ранее случая, когда упругое излучение распространяется вдоль акустической оси, вблизи последней возможно коллинеарное взаимодействие волн как одной, так и ортогональных поляризаций. При этом для генерации излучения суммарной частоты в первом случае комплексный вектор вынуждающей силы определяется соотношением

$$\mathbf{N} = (c_{14} - c_{444})\,\{2i\rho \mathbf{e}_1 \pm (1 + \rho^2)\,\mathbf{e}_2\} \,/\, \sqrt{1 + \rho^2} \tag{6}$$

и коэффициент преобразования $\Gamma = \mathbf{a}^*\mathbf{N}$ отличен от нуля как для преобразованной волны с такой же поляризацией, что и на основной частоте, так и с ортогональной ей поляризацией. Таким образом, если в негиротропных кристаллах в таких условиях возможна генерация преобразованного излучения только ортогональной поляризации, то в гиротропных — любой, однако с различной эффективностью преобразования, которая оказывается выше для волн с ортогональной поляризацией. В случае коллинеарного взаимодействия упругих волн ортогональных поляризаций, запрещенного для негиротропных сред, вектор вынуждающей силы

$$\mathbf{N} = \{(c_{14} - c_{444})\,(1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)\}\,\mathbf{e}_1 \tag{7}$$

и преобразованное излучение также может иметь любую поляризацию. Однако эффективность преобразования, а следовательно, и интенсивность излучения на преобразованной частоте выше, если последнее поляризовано как медленные (быстрые) квазипоперечные волны при положительных (отрицательных) значениях θ.

При генерации же излучения на разностной частоте вблизи акустической оси в отличие от случая генерации вдоль нее оказывается возможным взаимодействие волн одной поляризации. При этом вектор вынуждающей силы определяется соотношением (7), в котором следует осуществить замену $\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_2$, и преобразованное излучение может быть поляризовано так же, как медленная или быстрая сдвиговые волны на основной частоте, однако эффективность преобразования в этих двух случаях различна.

В гидротропных тригональных кристаллах вблизи оси третьего порядка возможно также коллинеарное взаимодействие волн ортогональных поляризаций с генерацией излучения разностной частоты. При этом вектор вынуждающей силы N определяется соотношением (6) с учетом замены $\mathbf{e}_1 \rightleftarrows \mathbf{e}_2$, и коэффициент преобразования Г отличен от нуля. Тогда, как следует из (3), при распространении упругих волн вблизи оси симметрии третьего порядка в тригональных кристаллах, так же как и вдоль последней, наряду с генерацией второй гармоники имеет место другой нелинейный процесс — возникает стационарное, переменное в пространстве упругое поле, причем появление его обусловлено коллинеарным взаимодействием волн как одной эллиптической поляризации, так и ортогональных.

Соотношения (2), (3) позволяют также проанализировать возможность нелинейного взаимодействия сдвиговых волн и определить смещение поля преобразованного излучения и для других кристаллов. Как показывает расчет, вектор вынуждающей силы N равен нулю для направлений распространений звуковых волн вдоль и вблизи осей симметрии выше третьего порядка в тетрагональных и гексагональных кристаллах и ортогонален плоскостям эллипсов поляризации сдвиговых волн на основной частоте в случае оси третьего порядка в кубических кристаллах. Тогда квазипоперечные волны при распространении в указанных направлениях не взаимодействуют друг с другом.

Особый интерес представляют акустические оси, лежащие в плоскости, ортогональной оси симметрии четвертого порядка в тетрагональных кристаллах. При распространении звука в указанных направлениях возможно нелинейное взаимодействие волн как одной, так и ортогональных круговых поляризаций $\mathbf{a}_{1,2} = (\mathbf{e}_2 \pm i\mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$. Причем при генерации суммарной частоты в первом случае вектор вынуждающей силы является комплексным:

$$\mathbf{N} = \{(\tilde{c}_{166} - \tilde{c}_{155} + \tilde{c}_{66} - c_{44})\,\mathbf{e}'_1 + (\tilde{c}_{26} - \tilde{c}_{655})\,\mathbf{e}'_2 \pm i\tilde{c}_{655}\mathbf{e}_3\} \,/\, 2, \tag{8}$$

где

$$\tilde{c}_{166} = c_{166} + [c_{111} - c_{112} - 4c_{166}]\,\sin^2 2\varphi/4,\quad \tilde{c}_{155} = c_{155} + (c_{144} - c_{155})\,\sin^2 2\varphi/2,$$

$$\tilde{c}_{655} = (c_{144} - c_{155}) \sin 4\varphi/4, \quad \tilde{c}_{66} = c_{66} + c \sin^2 2\varphi/2,$$

$$\tilde{c}_{26} = c \sin 4\varphi/4, \sin^2 2\varphi = 4 (c_{44} - c_{11})(c_{66} - c_{44})/[c (c_{11} + c_{12})], c = c_{11} - c_{12} - 2c_{66},$$

$\mathbf{e}_i'$ — орты прямоугольной системы координат, ось x которой совмещена с акустической осью. Тогда вектор смещения преобразованного излучения может быть поляризован как любая из сдвиговых волн на основной частоте и определяться выражением (3), в котором следует осуществить замену $z \to x$. Эффективность преобразования выше в том случае, если векторы $i[\mathbf{a}\mathbf{a}^*]$ и $i[\mathbf{N}\mathbf{N}^*]$ образуют правый (левый) винт с направлением обращения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{N}$ соответственно. Здесь $\mathbf{a}$ — вектор поляризации второй гармоники, совпадающей с вектором поляризации одной из сдвиговых волн. В случае взаимодействия волн ортогональных поляризаций вектор вынуждающей силы является действительным и расположен в плоскости, ортогональной оси симметрии четвертого порядка:

$$\mathbf{N} = \{(\tilde{c}_{166} + \tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{155} + c_{44})\, \mathbf{e}'_1 + (\tilde{c}_{26} + \tilde{c}_{655})\, \mathbf{e}'_2\}. \tag{9}$$

Тогда преобразованное излучение, как и в предыдущем случае, может быть право- или левоциркулярно поляризовано, однако эффективность преобразования в этом случае будет меньше, чем при взаимодействии волн одной поляризации.

Кроме того, в направлении акустической оси, лежащей в плоскости симметрии тетрагонального кристалла, возможно также взаимодействие волн одной из ортогональных поляризаций с генерацией стационарного, переменного в пространстве упругого поля.

Таким образом, гиротропия оказывает существенное влияние на характер протекания нелинейных процессов лишь вдоль и вблизи акустических осей с низким порядком касания полостей волновых векторов в отсутствие активности и для кристаллов средней категории, причем количество разрешенных взаимодействий уменьшается с повышением симметрии направления распространения.

Автор выражает глубокую признательность Хаткевичу А. Г. за ряд полезных замечаний, высказанных при обсуждении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах//УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549—586.
2. *Ермилин К. К., Красильников В. А., Лямов В. Е., Прохоров В. М.* Поляризация второй сдвиговой гармоники при распространении акустической волны вдоль оси III порядка в кристаллах//ФТТ. 1973. Т. 15. № 7. С. 2251—2252.
3. *Барышникова Л. Ф., Лямов В. Е.* Генерация акустической гармоники и ее потока энергии в пьезокристаллах//ФТТ. 1978. Т. 20. № 4. С. 1109—1114.
4. *Белый В. Н., Пашкевич Г. А., Хаткевич А. Г.* Преобразование частоты УЗ пучков в кристаллах//Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1981. № 2. С. 77—82.
5. *Федоров Ф. И.* Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976. 456 с.
6. *Курилкина С. Н., Хаткевич А. Г.* Поляризация упругих волн в гиротропных кристаллах//Кристаллография. 1988. Т. 33. № 2. С. 496—498.
7. *Вужва А. Д.* Генерация второй гармоники при распространении упругой волны//Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 614—616.

Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.92

S. N. Kurilkina

ON FREQUENCY TRANSFORMATION OF ELASTIC RADIATION IN ACOUSTICALLY GYROTROPIC CRYSTALS

Features of elastic radiation generation at a transformed frequency in gyrotropic media with quadratic nonlinearity in the case of three-wave interaction are studied. The rise of waves travelling in a crystal due to ellipticity acoustic activity leads to the possibility of interaction in the direction where these waves do not exist in nongyrotropic media.