

О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ЖЕСТКИМИ ТОРЦЕВЫМИ СТЕНКАМИ

© 1997 г. Ю. А. Лавров

Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения
190031 Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Поступила в редакцию 28.02.96 г.

Поиску частот собственных стационарных колебаний упругой цилиндрической оболочки, перекрытой жесткими днищами и заполненной акустической средой, посвящено множество работ. В число построенных решений входят приближенные [1], сводящиеся к поиску нулей бесконечного определителя [1–4], либо трансцендентной функции [5, 6]. В ряде работ (например, [7]) уравнение для частот содержит комплексные корни характеристического уравнения оболочки, поиск которых трудоемок. Отыскание таких корней не требуется в [6]; численных результатов работа не содержит. Сопоставление формул для частот, полученных применением различных теорий, различными авторами, ведется в [8]. Соответствие теоретических исследований экспериментальным данным изучалось в [9].

Способ решения задачи, предлагаемый в настоящей работе, позволяет построить частотное уравнение осесимметричных колебаний в компактном виде, удобном для численных экспериментов и построения приближенных формул.

Пусть идеальная сжимаемая жидкость заполняет цилиндрический объем $0 \leq r < R$, $-H < z < H$. Акустическое давление в жидкости $P(r, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)P(r, z) = 0, \quad (1)$$

ω – круговая частота, c – скорость звука в жидкости. Зависимость процессов от времени предполагается гармонической. Внеутренняя поверхность плоских стенок – идеально жесткая:

$$\frac{\partial P(r, \pm H)}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r < R. \quad (2)$$

Осевое $U(z)$ и изгибное $W(z)$ смещения цилиндрической оболочки удовлетворяют уравнениям

Сандерса [10]

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \lambda^2 U(z) + \frac{\sigma}{R} \frac{dW(z)}{dz} = 0, \quad -H < z < H, \quad (3)$$

$$\frac{12\sigma}{Rh^2} \frac{dU(z)}{dz} + \frac{d^4 W(z)}{dz^4} + \mu^4 W(z) = \frac{P(R, z)}{D}, \quad (4)$$

$$-H < z < H.$$

Условие безотрывности колебаний на поверхности контакта оболочки с жидкостью имеет вид

$$W(z) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial P(R, z)}{\partial r}, \quad -H < z < H. \quad (5)$$

Здесь применены обозначения: $\lambda^2 = (1 - \sigma^2)\rho\omega^2/E$, σ – модуль Пуассона, ρ – плотность материала оболочки, E – модуль Юнга, $\mu^4 = 12/(R^2 h^2) - \kappa^4$, $\kappa^4 = \rho h \omega^2/D$, $D = Eh^3/(12(1 - \sigma^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки, h – ее толщина, ρ_0 – плотность жидкости.

Будем считать, что кромки упругой оболочки жестко прикреплены к плоским стенкам резонатора:

$$U(\pm H) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dW(\pm H)}{dz} = 0, \quad (7)$$

$$W(\pm H) = 0. \quad (8)$$

Искомыми являются формы колебаний давления $P(r, z)$ и оболочки $U(z)$, $W(z)$. Процедура построения точного решения задачи опирается на идеи, изложенные в [11, 12].

Для симметричных по координате z процессов воспользуемся представлением

$$P(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n J_0(\xi_n r) \cos(p_n z),$$

$$U(z) = U_0(z) + U_1(z),$$

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z),$$

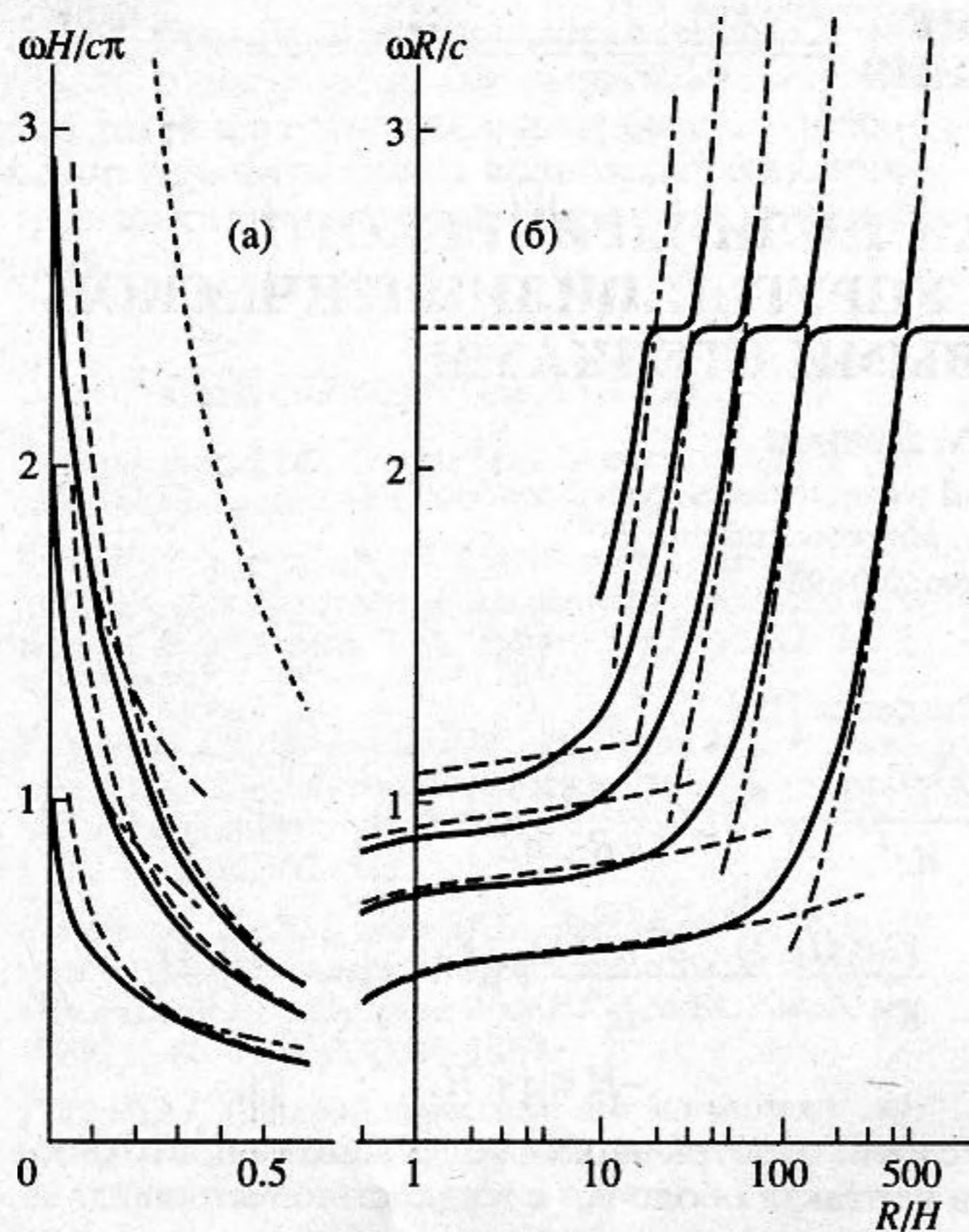


Рис. 1. Зависимости низших собственных частот от радиуса резонатора (сплошные линии), $h/H = 0.001$. Действие приближенных формул показано линиями: (13) – пунктирными, (12) – штрих-пунктирными (часть а), (14) – штрих-пунктирными (часть б). Короткий пунктир отвечает частоте Ω_{001} .

$$U_0(z) = -\frac{H\sigma}{2\rho_0\omega^2 R} \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \sin(\alpha_j z)}{\sin(\alpha_j H)(\alpha_j^2 - \lambda^2)},$$

$$W_0(z) = \frac{H}{2\rho_0\omega^2} \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \cos(\alpha_j z)}{\alpha_j \sin(\alpha_j H)},$$

$$U_1(z) = -\frac{\sigma}{DR} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n \sin(p_n z)}{y_n(p_n^2 - \lambda^2)} J_0(\xi_n R) s_n,$$

$$W_1(z) = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(p_n z)}{y_n} J_0(\xi_n R) s_n.$$

Здесь $J_m(x)$ – функция Бесселя порядка m , $\xi_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - p_n^2}$, $p_n = q_n/H$, $q_n = \pi n$, $U_1(z)$, $W_1(z)$ – частотное решение неоднородной системы (3)–(4), $U_0(z)$, $W_0(z)$ – общее решение соответствующей однородной системы, $\alpha_j = -\alpha_{j+3}$, $j = 1, 2, 3$ – корни

алгебраического уравнения

$$f(\alpha) = 0, \tag{9}$$

$$f(x) = x^6 - x^4\lambda^2 + x^2(4\beta^4 - \kappa^4) - \lambda^2\mu^4,$$

$$\beta^4 = \frac{3(1-\sigma^2)}{R^2 h^2}, \quad y_n = \frac{f(p_n)}{p_n^2 - \lambda^2}.$$

Предложенные выражения для полей удовлетворяют условиям (1)–(4). Коэффициенты s_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, B_j , $j = 1, 2, 3$, пока не определены.

Соблюдая требование (5), имеем

$$s_n = (-1)^n \frac{v_n y_n}{\xi_n J_1(\xi_n R) \Delta_n} \sum_{j=1}^3 \frac{B_j}{p_n^2 - \alpha_j^2},$$

$$v_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad v_0 = 1/2,$$

$$\Delta_n = y_n + \frac{\rho_0 \omega^2 J_0(\xi_n R)}{D \xi_n J_1(\xi_n R)}.$$

Подстановка $B_j = (\alpha_j^2 - \lambda^2)(\alpha_{j+2}^2 - \alpha_{j+1}^2)C$, где C – произвольная константа, позволяет выполнить гранично-контактные условия (6), (7) и избавиться от чисел α_j . Таким образом, отпадает необходимость анализировать перемещение корней характеристического уравнения (9) по комплексной плоскости с изменением частоты.

Наложение последнего условия (8) дает уравнение для собственных частот

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\Delta_n} = 0. \tag{10}$$

Результаты поиска чисел ω_k ($k = 1, 2, \dots$) – корней уравнения (10), для системы “сталь–вода” представлены на рис. 1–3.

В задании границ применимости обсуждаемых далее приближенных формул участвуют частоты $\Omega_{mkn} = c \sqrt{p_k^2 + j_{mn}^2} / R^2$ свободных колебаний идеального резонатора с жесткими торцевыми стенками. Здесь $k, n = 0, 1, 2, \dots$, $J_m(j_{mn}) = 0$, $m = 0$ для мягкой, $m = 1$ для жесткой цилиндрической стенки.

Обратимся к случаю $R/H \ll 1$ в области $\omega \ll \Omega_{001}$. В отличие от [11, 12], у рассматриваемого резонатора нет собственных частот, спадающих к нулю при сужении акустического пространства между упругими стенками. По мере уменьшения диаметра резонатора нарастает статистическая жесткость оболочки, колебательные процессы уподобляются таковым для резонатора с идеально жесткими стенками (рис. 3а).

Справедливо соотношение:

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{v_n}{\Delta_n} \Big|_{\omega = p_k c} \approx_{R \rightarrow 0} \frac{H}{8\beta^3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, собственная частота может быть приближенно найдена из конечного уравнения

$$\Delta_k + \frac{8\beta^3}{H} = 0, \quad (11)$$

либо из явной итерационной формулы

$$\omega_k \approx p_k c \left(1 + \frac{\rho_0 c^2}{2RD} \left(y_k \Big|_{\omega = p_k c} + \frac{8\beta^3}{H} \right)^{-1/2} \right) \quad (12)$$

Перейдем к случаю средних значений радиуса резонатора ($R/H \geq 1$) в области $\omega \ll \Omega_{001}$, $\omega \ll \Omega_{110}$. Соотношение

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{v_n}{\Delta_n} \Big|_{\omega = w_k} \approx_{h \rightarrow 0} \frac{H}{8\beta^3}, \quad \text{где } w_k^2 = \frac{h E p_k I_1(p_k R)}{R^2 \rho_0 I_0(p_k R)}$$

$J_m(x)$ – модифицированная функция Бесселя порядка m , вновь приводит к уравнению (11) либо к явной формуле

$$\omega_k^2 \approx w_k^2 \left(1 + \frac{2}{\beta H} \right) \quad (13)$$

В зоне действия формулы (13) собственные процессы имеют выраженный “поверхностный” характер (рис. 3б). Вдоль образующей оболочки акустическое давление колеблется с широким размахом, тогда как у оси цилиндра давление низко и практически не зависит от координаты z .

Следует отметить эффективность уравнения (11) как для малых R/H , так и h/H . Найденные в границах рис. 1а частоты из уравнений (10) и (11) имеют относительное расхождение менее 0.01.

Кривые собственных частот для больших R/H в области $\omega \ll \Omega_{110}$ (рис. 1б) состоят из сменяющих друг друга участков, где $\omega \approx \text{const}$ и $\omega R \approx \text{const}$. Зависимость давления от координаты z для участков первого типа (рис. 3в) наблюдается лишь в тесной близости к оболочке. Частоты таких колебаний могут быть найдены по формуле

$$\omega_k^2 \approx \frac{D \gamma_k^5}{\rho_0 H^5} \quad (14)$$

γ_k ($k = 1, 2, \dots$) – корни уравнения [11]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{q_n^5 - \gamma} = 0 \quad (15)$$

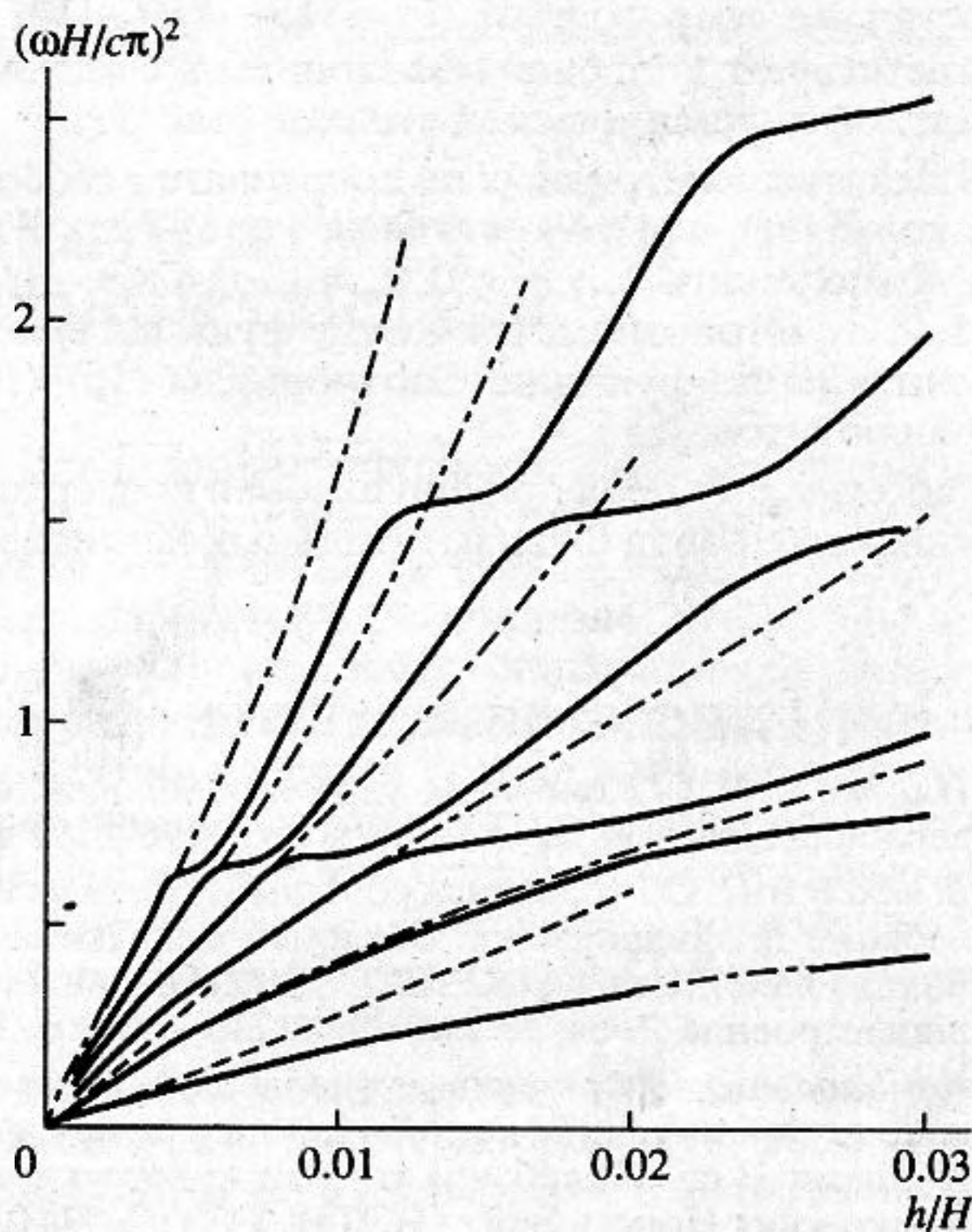


Рис. 2. Зависимости низших собственных частот от толщины оболочки (сплошные линии), $R/H = 1$. Действие соотношений (13), (11) выражено пунктирными и штрих-пунктирными линиями соответственно.

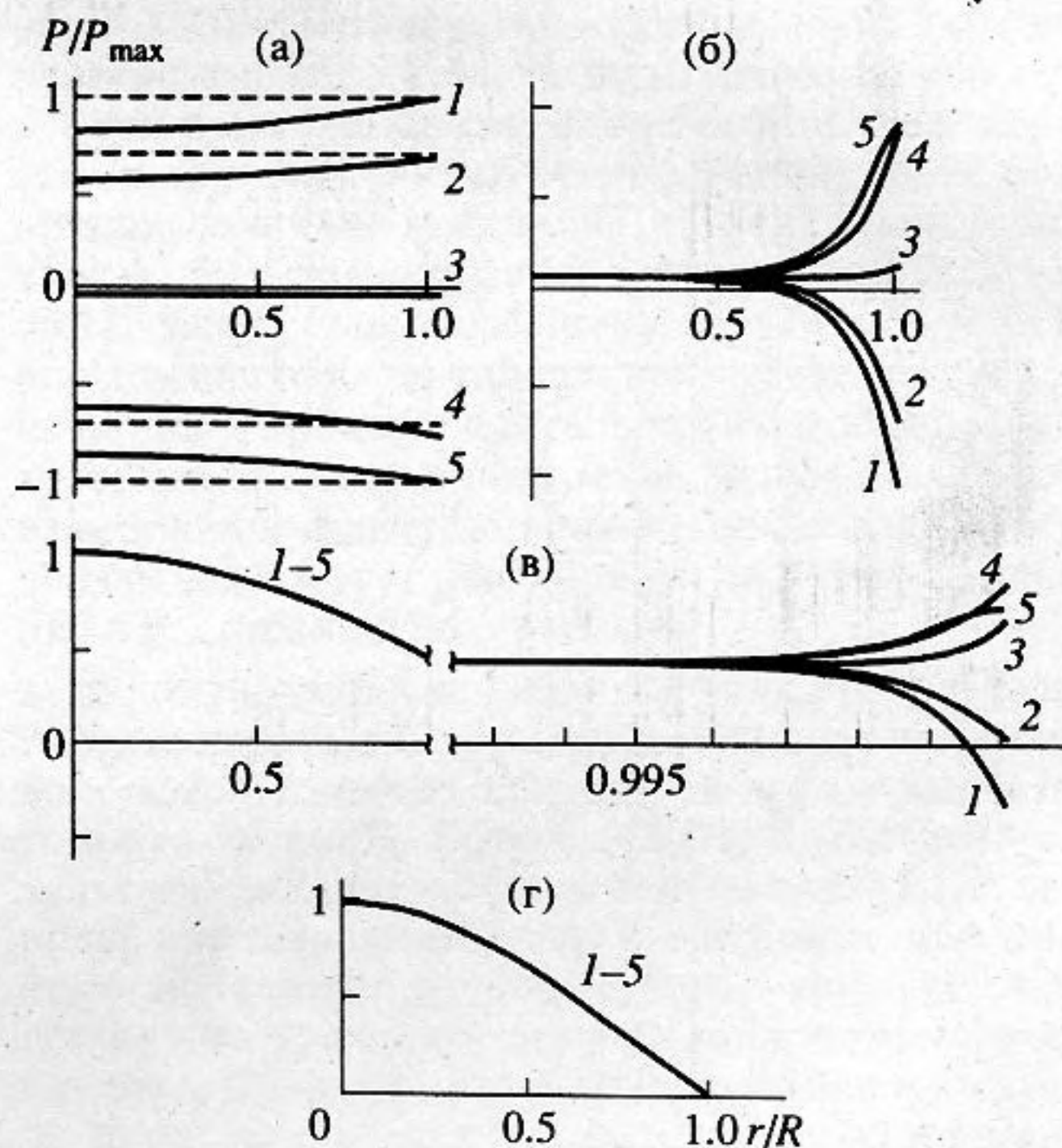


Рис. 3. Формы колебаний давления на первой собственной частоте для различных значений размера R/H : 0.3 (а), 3 (б), 300 (в), 500 (г); $h/H = 0.001$. Линии 1–5 соответствуют радиальным сечениям $z/H = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. Пунктирной линией (часть а) выражены формы для резонатора с жесткими стенками.

Участки же второго типа ($\omega \approx \Omega_{00k}$, $k = 1, 2, \dots$) соответствуют колебаниям резонатора с идеально мягкой цилиндрической стенкой (рис. 3г).

Для антисимметричных по координате z свободных колебаний в выражениях для $P(r, z)$, $U(z)$, $W(z)$ следует положить $v_0 = q_0 = 0$, $v_n = 1$, $q_n = \pi(n - 1/2)$, $n = 1, 2, \dots$, а тригонометрические функции всюду заменить на ко-функции. Соотношения (10)–(15) сохраняют силу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-02-04346).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 184 с.
2. Шмаков В.П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким наполнителем // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 170–174.
3. Камалов А.З. Собственные колебания сжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке с упругими днищами. В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: НЭТИ, 1973. С. 97–107.
4. Галиев Ш.У. Колебания сжимаемой жидкости в упругой цилиндрической оболочке // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 1. (КФТИ АН СССР). Казань: 1969. С. 27–36.
5. Камалов А.З. Собственные колебания цилиндрической оболочки с жесткими днищами // Некоторые вопросы теории пластин и оболочек. Материалы конференции Казанского физико-технического института; май, 1967. Казань: 1967. С. 38–43.
6. Георгиевский В.П., Малютин П.С., Тарасова А.Г. Матрица Грина динамической задачи для цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую среду, при произвольных граничных условиях // Акуст. журн. 1988. Т. 34. Вып. 6. С. 1016–1019.
7. Бабайлов Э.П. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки конечной длины с учетом реакции среды внутри нее // Акуст. журн. 1994. Т. 40. Вып. 1. С. 17–23.
8. Gupta R.K. Free vibrations of cylindrical containers // J. Sound and Vibr. 1995. Vol. 180. № 3. P. 387–395.
9. Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N. Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid // Journal of the Aerospace Sciences. 1962. Vol. 29. № 9. P. 1052–1059.
10. Kraus H. Thin elastic shells. New York: Wiley, 1967. P. 59–65.
11. Лавров Ю.А., Лукьянов В.Д., Никитин Г.Л. О собственных частотах прямоугольного акустического резонатора с упругими стенками // Акуст. журн. 1989. Т. 35. Вып. 2. С. 302–307.
12. Лавров Ю.А. О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругими торцевыми стенками // Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 9. С. 53–59.