

УДК 539.32

ВОЛНОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

© 1997 г. С. Г. Абаймов, С. А. Рыбак

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 04.07.96 г.

В ламинарном пограничном слое с профилем потока, имеющем точку перегиба, рассмотрены трехмерные волновые возмущения. Показано, что типичная структура дисперсионной зависимости частоты от волнового числа характеризуется наличием двух ветвей положительной и отрицательной энергии, смыкающихся в точке, где групповая скорость волнового возмущения обращается в бесконечность. Учтена диссипация в среде. Показано, что область волновой неустойчивости составляет лишь часть области существования волны отрицательной энергии.

Задачу генерации звука в турбулентном пограничном слое нельзя решить, не зная спектров пульсаций давления. Отсюда возникает необходимость изучения механизмов формирования спектров турбулентности начиная от волновых неустойчивостей в ламинарном пограничном слое. Среди множества альтернативных механизмов возникновения неустойчивости мы выбрали для исследования волновую неустойчивость, связанную с возбуждением волн отрицательной энергии в ламинарном пограничном слое с профилем скорости, имеющем точку перегиба. В работе [1] показано, что при наличии периодической структуры профиля скорости $U(y, z)$ неизбежно возникает волновая неустойчивость, приобретающая взрывной характер. Однако вопрос о механизме образования исходной структуры $U(y, z)$ остался открытым. По-видимому, структура образуется в результате развития неустойчивости первоначального профиля $U(y)$. Таким образом, имеется иерархия неустойчивостей. В данной работе мы исследуем начальную стадию процесса появления волн отрицательной энергии на фоне профиля $U(y)$, находим соответствующие дисперсионные зависимости $\omega(k)$ и определяем инкременты в бездиссипативном случае (уравнение Релея) и при наличии диссипации (уравнение Орра–Зоммерфельда). Следует отметить, что подобные проблемы обсуждались также в работах [2, 3].

Будем считать жидкость в ламинарном пограничном слое несжимаемой. Как известно, этого всегда можно достичь, положив скорость набегающего потока, а также фазовую и групповую скорости колебаний много меньше скорости звука [4].

Введем систему координат: пусть оси X и Z лежат в плоскости поверхности обтекаемого тела, а ось Y перпендикулярна последней. Пусть также скорость основного потока U параллельна оси X

и является функцией $U(y)$ только расстояния y до поверхности тела. Ниже профиль $U(y)$ будет конкретизирован, но пока только предполагается, что он удовлетворяет граничным условиям $U(0) = U_0$, $U(+\infty) = 0$ (система отсчета связана с набегающим потоком).

Будем искать колебания в виде волн, гармонических по осям X и Z и имеющих профиль $f(y)$ по оси Y :

$$\mathbf{v} = f(y)e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f^x(0) = f^y(0) = f^z(0) = f^x(+\infty) = \\ = f^y(+\infty) = f^z(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Применим к уравнению Навье–Стокса оператор rot . При этом обратится в нуль член уравнения, содержащий давление p , и уравнение Навье–Стокса превратится в векторное уравнение только для компонент полной скорости $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$, являющейся суммой колебательной скорости \mathbf{v} и скорости основного потока $\mathbf{U} = U(y)\nabla x$.

Будем предполагать, что колебательная скорость много меньше скорости основного потока. Тогда полученное уравнение можно линеаризовать по колебательной скорости, пренебрегая нелинейным членом $\text{rot}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, но оставляя взаимодействие колебаний и потока.

Выражая профиль колебательной скорости $f^z(y)$ из уравнения непрерывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ и $f^x(y)$ из второй компоненты преобразованного уравнения Навье–Стокса получим дифференциальное уравнение для профиля колебательной скорости $f^y(y)$:

$$\left(U - \frac{\hat{\omega}}{k_x}\right)\left(\frac{d^2 f^y}{dy^2} - \chi^2 f^y\right) - f^y \frac{d^2 U}{dy^2} = 0, \quad (3)$$

где $\hat{\omega} = \omega + iv(\chi^2 - \frac{d^2}{dy^2})$, $\chi^2 = k_x^2 + k_z^2$.

Аналогичные уравнения для двумерного случая можно найти в [4, 5].

Граничные условия для f^y имеют вид:

$$f^y(0) = f^y(+\infty) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{df^y}{dy}(0) = \frac{df^y}{dy}(+\infty) = 0. \quad (5)$$

Условия (5) являются следствием уравнения непрерывности и граничных условий (2) для f^x и f^z .

Очевидно, что уравнение (3) не противоречит теореме Сквайра [5] о том, что задача для трехмерных возмущений эквивалентна двумерной задаче. Действительно, вводя следующие преобразования $\tilde{k}_x = \chi$, $\frac{\tilde{\omega}}{k_x} = \frac{\omega}{k_x}$, $\frac{\tilde{v}}{k_x} = \frac{v}{k_x}$, получим уравнение (3), если положить в нем $k_z = 0$.

Известно, что если профиль основного потока $U(y)$ не имеет точки перегиба, т.е. производная $\frac{d^2U}{dy^2}$ нигде не обращается в нуль, мнимая часть частоты пропорциональна вязкости жидкости [4]. Подчеркнем, что наличие точки перегиба определяет только возможность, но не необходимость существования мнимой части частоты в отсутствие диссипации. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда профиль $U(y)$ имеет точку перегиба:

$$U(y) = U_0(1 + \beta y)e^{-\sigma y}. \quad (6)$$

Уравнение (3) будем решать методом Галеркина [6]. Изложим кратко суть метода применительно к нашему случаю. Пусть неизвестная функция $f^y(y)$ удовлетворяет в области $(0, +\infty)$ однородному уравнению (3) $\hat{L}f^y = 0$ и однородным краевым условиям (4), (5).

Выберем бесконечную последовательность координатных функций

$$\varphi_1 = y^2 e^{-\sigma y}, \quad \varphi_2 = y^3 e^{-\sigma y}, \dots, \quad (7)$$

которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $[0, +\infty]$ и которые удовлетворяют всем краевым условиям нашей задачи (поэтому последовательность начинается с y^2 , а не 1). Уравнение (3) линейное, краевые условия также линейны. Тогда функция

$$f_n^y(y) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(y), \quad (8)$$

где C_k — произвольно выбранные постоянные, удовлетворяет всем краевым условиям задачи.

По методу Галеркина коэффициенты C_k определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (3) стала после подстановки в нее $f_n^y(y)$ вместо $f^y(y)$ ортогональной к функциям $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, ..., $\varphi_n(y)$.

Метод Галеркина тем самым приводит к следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n C_k (\hat{L}\varphi_k, \varphi_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Ненулевое решение возможно только при детерминанте системы (9), равном нулю. Приравнивание детерминанта к нулю даст дисперсионное соотношение.

Уравнение (3) после подстановки оператора $\hat{\omega} = \omega + iv(\chi^2 - \frac{d^2}{dy^2})$ выглядит следующим образом:

$$U \left(\frac{d^2 f^y}{dy^2} - \chi^2 f^y \right) - \frac{\omega}{k_x} \left(\frac{d^2 f^y}{dy^2} - \chi^2 f^y \right) - f^y \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{iv\chi^2}{k_x} \left(\frac{d^2 f^y}{dy^2} - \chi^2 f^y \right) + \frac{iv}{k_x} \left(\frac{d^4 f^y}{dy^4} - \chi^2 \frac{d^2 f^y}{dy^2} \right) = 0. \quad (10)$$

Будем аппроксимировать $f^y(y)$ разложением (8), ограничиваясь двумя членами:

$$f^y = Ay^2 e^{-\sigma y} + By^3 e^{-\sigma y}. \quad (11)$$

Подставив (11) в уравнение (10), домножив его на $\varphi_1 = y^2 e^{-\sigma y}$ и проинтегрировав от 0 до $+\infty$, получим первое уравнение системы (9). Проделав то же самое с домножением на вторую координатную функцию $\varphi_2 = y^3 e^{-\sigma y}$, получим второе уравнение системы (9). Приравнивая детерминант системы к нулю, получим дисперсионное уравнение:

$$a \left(\frac{\omega + iv\chi^2}{k_x} \right)^2 + b \frac{\omega + iv\chi^2}{k_x} + c = 0. \quad (12)$$

Решение квадратного уравнения (12) можно записать в виде:

$$\omega = -iv\chi^2 + k_x \left\{ -4B_1 U_0 - 4B_v \frac{iv}{k_x} \pm \right. \quad (13)$$

$$\left. \pm 8 \sqrt{D_1 U_0^2 + D_v U_0 \frac{iv}{k_x} + D_v^2 \left(\frac{iv}{k_x} \right)^2} \right\} / a,$$

где все параметры являются полиномами по χ^2 и по β , а параметр a всегда положителен.

Исследуем полученное дисперсионное соотношение (13) первоначально для случая бесконечно малой вязкости.

При пренебрежении вязкостью дисперсионное уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\omega = k_x U_0 \frac{-4B_1 \pm 8\sqrt{\tilde{D}_1}}{a}, \quad (14)$$

или

$$\omega = k_x U_0 \frac{-4\tilde{B}_1 \pm 8\sqrt{\tilde{D}_1}}{\tilde{a}}, \quad (15)$$

где все параметры являются полиномами по $(\chi/\sigma)^2$ и по β/σ , а параметр a всегда положителен.

Очевидно, характер дисперсионной кривой $\omega(k_x, k_z, \sigma)$ зависит от знака подкоренного выражения \tilde{D}_1 . При знаке плюс кривая зависимости действительной части частоты от волнового числа имеет две ветви с нулевой мнимой частью частоты, при знаке минус обе ветви действительной части частоты сливаются в одну, а мнимые части частоты одинаковы по модулю, но имеют разные знаки. Точка равенства \tilde{D}_1 нулю является одновременно точкой, в которой производная по частоте от дисперсионного соотношения (12) $\partial Z/\partial \omega$ также равна нулю. Это означает, что в данной точке смыкаются дисперсионные кривые волн положительной и отрицательной энергии [4].

Исследуем поведение выражения \tilde{D}_1 . На рис. 1 показана зависимость \tilde{D}_1 от χ/σ при различных значениях параметра β/σ (кривая 1 для параметра β/σ , равного 0.5, и кривая 2 для параметра β/σ , равного 1.0). Видно, что для малых волновых чисел выражение \tilde{D}_1 отрицательно, при определенном значении χ/σ становится нулевым, после чего неограниченно возрастает, являясь положительным для больших волновых чисел. Из исследования профиля потока (6) следует, что точка перегиба лежит в области пограничного слоя при параметре β/σ , лежащем в области от 0.5 до 1. В дальнейшем исследование будет проводиться только в этой области. При параметре β/σ , равном 0, очевидно, профиль потока не будет иметь точки перегиба. Это означает, что мнимая часть частоты пропорциональна вязкости жидкости, т.е. в нашем случае бесконечно мала. Это возможно только если выражение \tilde{D}_1 всюду неотрицательно. Кривая 3 показывает зависимость \tilde{D}_1 от χ/σ при параметре β/σ , равном нулю. Очевидно, неотрицательность \tilde{D}_1 соблюдается.

Исследуем поведение действительной части частоты. Все кривые приведены только для случая $\chi = k_x, k_z = 0$, так как все остальные кривые мо-

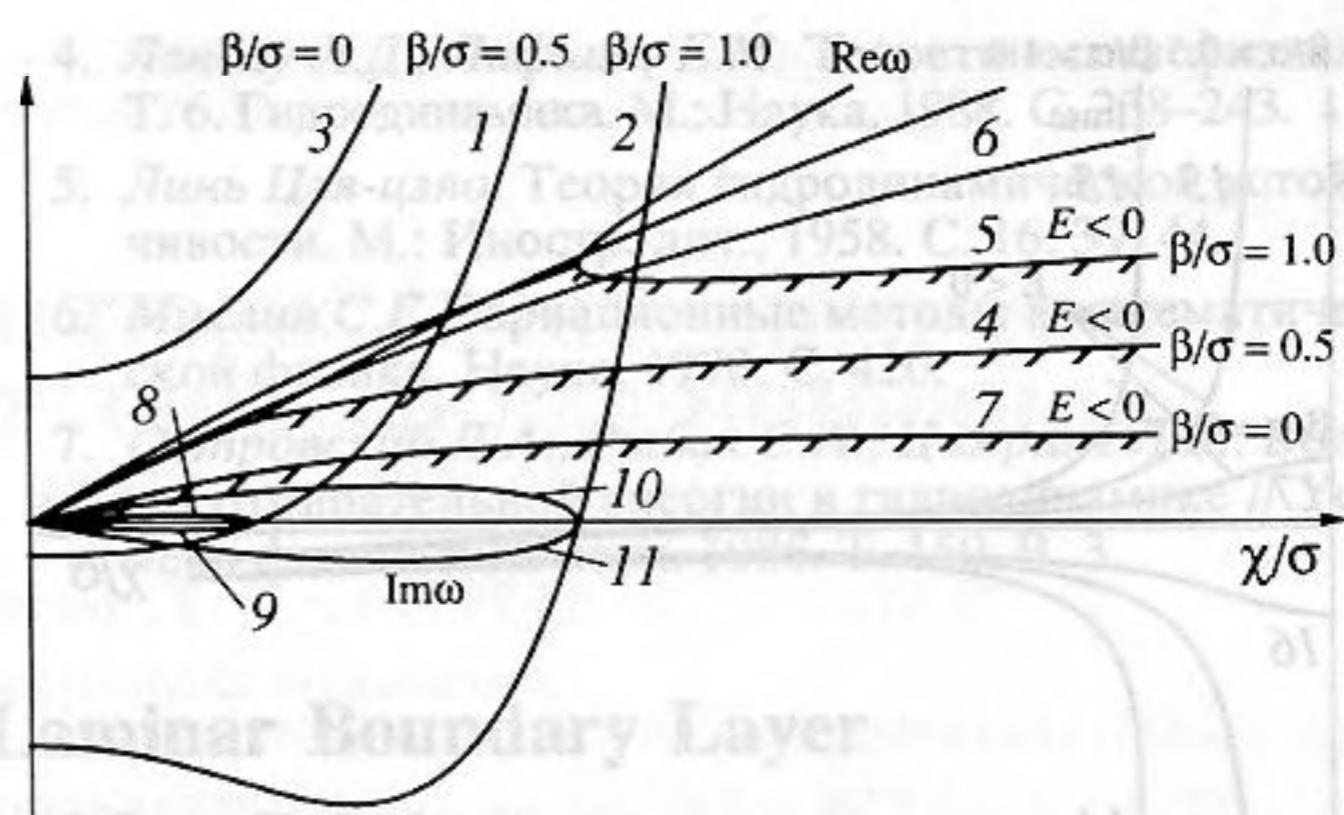


Рис. 1. Дисперсионная зависимость частоты от χ/σ .

гут быть получены из имеющихся умножением на k_x/χ , т.е. на косинус угла поворота кривой в плоскости тела. На рис. 1 показана зависимость действительной части частоты от χ/σ для параметра β/σ , равного 0.5 и 1. Видно, что после точки ветвления дисперсионная кривая разделяется на две ветви. Нижняя ветвь, соответствующая вычитанию корня в (15), является волной отрицательной энергии, что подтверждается тем, что групповая скорость на ней противоположна фазовой (кривая 4 для параметра β/σ , равного 0.5 и кривая 5 для параметра β/σ равного 1.0). Аналогичная картина наблюдалась в работе [1], когда поток не имел точки перегиба, но содержал структуру по оси Z . Кривые 6 и 7 соответствуют случаю, когда параметр β/σ равен нулю. В этом случае для всех волновых чисел дисперсионная кривая состоит из двух ветвей, нижняя из которых является волной отрицательной энергии (кривая 7). При χ/σ , стремящемся к 0 или $+\infty$, действительная часть частоты пропорциональна χ/σ с разными константами пропорциональности.

Энергия волны меняет знак при изменении знака частоты, либо при изменении знака производной по частоте от дисперсионного соотношения (12) $\partial Z/\partial \omega$ [7]. Последнее может произойти при обращении выражения $\partial Z/\partial \omega$ в нуль или в бесконечность. Выражение $\partial Z/\partial \omega$ обращается в нуль одновременно с \tilde{D}_1 , а в бесконечность — при $k_x = 0$. При этом всюду после точки ветвления оно положительно на верхней ветви и отрицательно на нижней. Единственными точками смыкания ветвей положительной и отрицательной энергии оказываются точка ветвления и линия $k_x = 0$, обеспечивающая смыкание двух ветвей при параметре β/σ , равном нулю, и слипание ветвей при повороте графика в плоскости тела на 90° . Других точек не будет, поэтому нижняя ветвь после точки ветвления остается волной отрицательной энергии до бесконечности.

На рис. 1 также показана зависимость мнимой части частоты от χ/σ при различных значениях

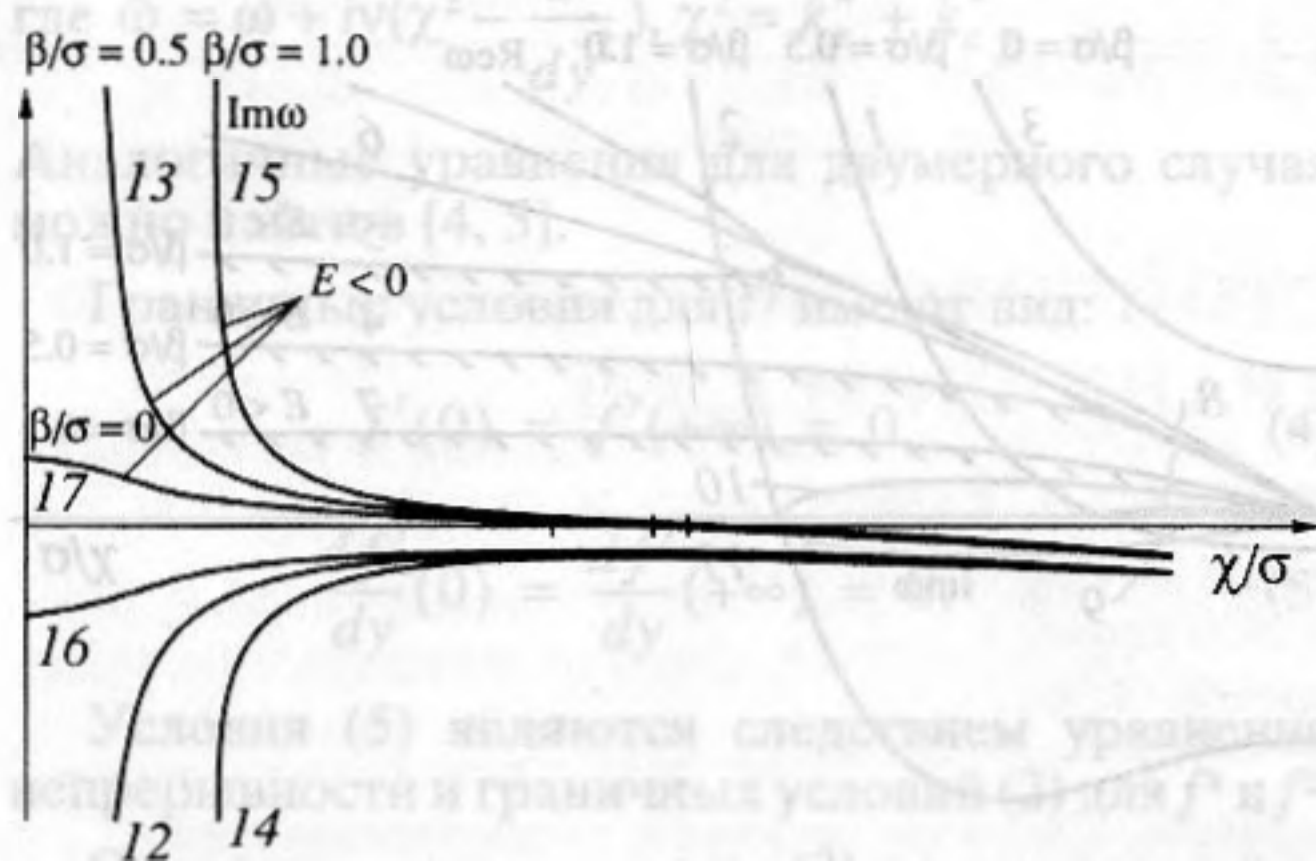


Рис. 2. Дисперсионная зависимость частоты от χ/σ при ненулевой вязкости.

параметра β/σ (кривые 8, 9 для параметра β/σ , равного 0.5, и кривые 10, 11 для параметра β/σ , равного 1.0). Кривые 8 и 10 показывают мнимую часть частоты, соответствующую верхней ветви, а кривые 9, 11 – нижней. Подчеркнем, что неустойчивой (т.е. имеющей положительную мнимую часть частоты) является верхняя ветвь. Таким образом, дисперсионная кривая делится на две части. До точки ветвления она имеет абсолютную неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца, а после нее делится на ветви положительной и отрицательной энергии.

Наличие вязкости может сказаться там, где зависимость действительной части частоты имеет две ветви, так как в данной области вязкость полностью определяет мнимую часть частоты. В силу малости вязкости разложим квадратный корень в (13) в ряд Тейлора с удержанием только линейного члена по вязкости. При этом из рассмотрения выпадает окрестность в непосредственной близости от точки, где выражение \tilde{D}_1 равно нулю. Дисперсионное уравнение (13) принимает при этом вид:

$$\omega = k_x U_0 \frac{-4\tilde{B}_1 \pm 8\sqrt{\tilde{D}_1}}{\tilde{a}} - iv\chi^2 + 4iv \frac{-B_v \pm \frac{D_v}{\sqrt{\tilde{D}_1}}}{a}, \quad (16)$$

или

$$\omega = k_x U_0 \frac{-4\tilde{B}_1 \pm 8\sqrt{\tilde{D}_1}}{\tilde{a}} - iv\sigma^2 \left(\left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 + 4 \frac{-B_v \pm \frac{D_v}{\sqrt{\tilde{D}_1}}}{\tilde{a}} \right), \quad (17)$$

где все параметры являются полиномами по $\left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2$ и по $\frac{\beta}{\sigma}$, а параметр \tilde{a} всегда положителен.

На рис. 2 приведена зависимость $\text{Im } \omega$, пропорциональной вязкости, от χ/σ при различных значениях параметра β/σ (кривые 12, 13 для параметра β/σ , равного 0.5, кривые 14, 15 для параметра β/σ , равного 1.0, и кривые 16, 17 для параметра β/σ , равного 0). Кривые 12, 14, 16 описывают мнимую часть частоты после точки ветвления для верхней ветви, а кривые 13, 15, 17 – для нижней. Видно, что волне с отрицательной энергией соответствует область неустойчивости. Это означает, что в отличие от случая положительной энергии, введение вязкости приводит не к затуханию, а к раскачке волны. Однако при больших волновых числах неустойчивость переходит в затухание, так как в (17) член, пропорциональный квадрату волнового числа, становится много больше оставшейся дроби, которая ведет себя при больших волновых числах как константа.

После расчета скорости колебаний можно вернуться к уравнению Навье–Стокса и вычислить пульсации давления $p(x, y, z, t)$. Очевидно, что в неустойчивом случае эти величины нарастают также экспоненциально с тем же инкрементом.

Итак, в ламинарном пограничном слое с профилем потока $U(y) = U_0(1 + \beta y)e^{-\sigma y}$ рассмотрены трехмерные волновые возмущения в бездиссипативном и диссипативном случаях. Для них выведены уравнения типа Релея и Орра–Зоммерфельда. Для получения дисперсионного соотношения использован метод Галеркина. Получено дисперсионное соотношение. Показано, что типичная структура дисперсионной зависимости частоты от волнового числа для профиля потока $U(y)$ с точкой перегиба характеризуется наличием двух ветвей положительной и отрицательной энергии, смыкающихся в точке, где групповая скорость волнового возмущения обращается в бесконечность. По другую сторону от этой точки имеет место абсолютная неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца. Учтена диссипация в среде и вычислены с помощью уравнения Орра–Зоммерфельда соответственно декремент для волны положительной энергии и инкремент для волны отрицательной энергии. Показано, что область волновой неустойчивости, т.е. диапазон волновых чисел, в котором имеется инкремент, составляет лишь часть области существования волны отрицательной энергии и чувствительна к изменению профиля $U(y)$.

Работа поддержана РФФИ № 96-02-16561.

