

УДК 534.321

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ЖЕСТКОЙ ОТКРЫТОЙ ОБОЛОЧКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

© 1997 г. В. Г. Басовский, И. В. Вовк

Институт гидромеханики НАН Украины
252057 Киев, ул. Желябова, 8/4

Поступила в редакцию 26.06.96 г.

Дано строгое решение задачи об излучении звука жесткой открытой оболочкой конечной длины, совершающей произвольные радиальные колебания. На основе использования априорных данных об особенностях поведения поля в окрестности концов оболочки построен эффективный численный алгоритм для оценок ближнего и дальнего полей, создаваемых оболочкой. Проведен количественный анализ, на основе которого установлен ряд ранее неизвестных особенностей характеристик поля осциллирующей и пульсирующей оболочек.

Изучению звукового поля, создаваемого конечным отрезком жесткой открытой цилиндрической оболочки, уделялось сравнительно много внимания (см., например, [1–5] и библиографию в них). Характерной чертой всех этих работ является то, что в них рассматривается частный случай, когда оболочка совершает только пульсирующие (осесимметричные колебания). Вместе с этим определен теоретический и практический интерес представляет изучение звуковых полей, создаваемых открытыми оболочками, совершающими более сложные колебания (см., например, [6]).

Ниже предлагается решение задачи об излучении звука жесткой открытой оболочкой без ограничений на форму ее радиальных колебаний и приведены количественные характеристики поля для случая, когда оболочка совершает осциллирующие или пульсирующие колебания.

Настоящая работа основывается на результатах работы [4] и фактически является ее обобщением на случай произвольных радиальных колебаний оболочки. Поэтому мы не будем подробно останавливаться на методе решения задачи излучения и по мере необходимости некоторые формулы будут заимствованы из [4].

Рассмотрим жесткую цилиндрическую оболочку конечной длины (рис. 1), погруженную в идеальную сжимаемую жидкость с волновым сопротивлением $\rho_0 c_0$. Толщиной стенок оболочки пренебрегаем и считаем, что оболочка совершает гармонические колебания, при которых точки ее внутренней и внешней стенок, лежащие на одном радиусе, колеблются синфазно с одинаковыми радиальными скоростями.

Акустический потенциал $\Phi(r, \varphi, z)$ (здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается) звукового поля, создаваемого оболочкой, должен удовлетворять уравнению Гельмгольца и граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{s_1} = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{s_2} = v_0 f(\varphi_0, z_0), \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi, \quad (1)$$

$$|z_0| < H/2,$$

а также условию излучения на бесконечности и условию конечности акустической энергии в окрестности концов оболочки. При записи граничных условий (1) приняты следующие обозначения:

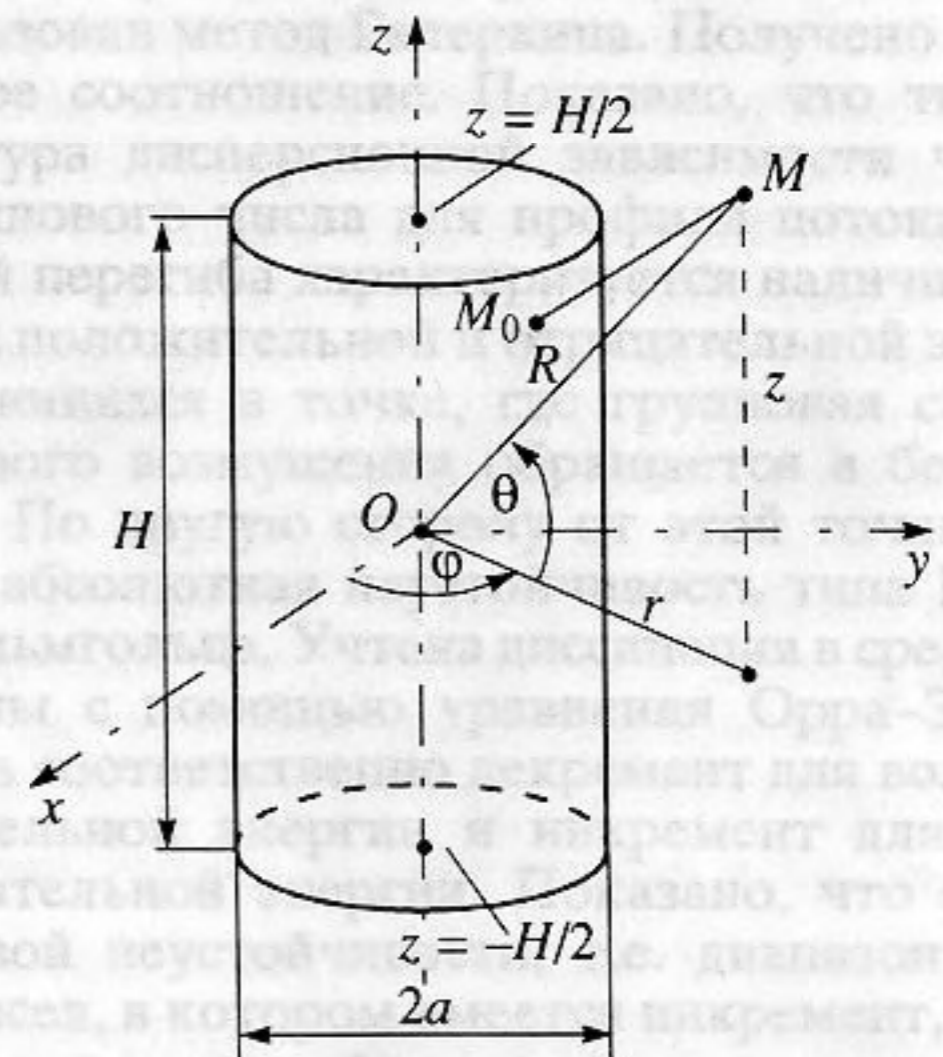


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат. (r, φ, z) – цилиндрические и (R, θ, φ) – сферические координаты. $M(\varphi_0, z_0)$ – точка на поверхности оболочки.

ния: S_1 и S_2 – соответственно поверхности внутренней и внешней стенок оболочек; $f(\varphi, z)$ – безразмерная известная функция, характеризующая распределение радиальной составляющей колебательной скорости по поверхности оболочки; v_0 – некий размерный множитель.

Решение поставленной краевой задачи строим по методу частичных областей [7], разделяя акустическое пространство на две подобласти: I – $r < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| < \infty$ и II – $r > a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| < \infty$. Пусть распределение радиальной составляющей скорости по поверхности оболочки симметрично относительно нулевого меридиана оболочки. Тогда, учитывая осевую симметрию задачи, потенциалы колебательной скорости в подобластях I и II представим в виде рядов Фурье по косинусам:

$$\Phi_j(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_j^{(m)}(r, z) \cos m\varphi, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

с коэффициентами

$$\Phi_j^{(m)}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_m(\alpha) J_m(qr), \quad j = 1 \\ B_m(\alpha) H_m^{(1)}(qr), \quad j = 2 \end{array} \right\} \exp(i\alpha z) d\alpha. \quad (3)$$

Здесь $q = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ для $k \geq |\alpha|$ и $q = i\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ для $k < |\alpha|$; $k = \omega/c_0$ – волновое число; J_m и $H_m^{(1)}$ – соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка m ; $A_m(\alpha)$ и $B_m(\alpha)$ – неизвестные плотности соответствующих интегралов Фурье.

Представления (2) с коэффициентами (3) позволяют удовлетворить уравнению Гельмгольца в каждой из частичных подобластей и условию излучения на бесконечности. Для определения неизвестных плотностей $A_m(\alpha)$ и $B_m(\alpha)$ необходимо использовать условия непрерывности звукового поля на границе частичных подобластей ($r = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| > H/2$) по давлению ($\Phi_1(a, \varphi, z) = \Phi_2(a, \varphi, z)$) и нормальной составляющей колебательной скорости ($\partial\Phi_1/\partial r = \partial\Phi_2/\partial r$), а также граничное условие (1). Условие непрерывности по скорости с учетом равенства радиальных составляющих колебательных скоростей на внутренней и внешней стенках оболочки в силу свойств рядов и интегралов Фурье дает связь между искомыми плотностями:

$$B_m(\alpha) = A_m(\alpha) J'_m(qa) / H_m^{(1)'}(qa). \quad (4)$$

Здесь и далее штрих у функции означает дифференцирование по полному аргументу.

Учитывая соотношения (2)–(4), а также вронскиан для функций $J_m(qa)$ и $H_m^{(1)}(qa)$ [8], условие

непрерывности по давлению на границе частичных подобластей приводим к виду:

$$-\frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\alpha) \frac{\exp(i\alpha z)}{qa H_m^{(1)'}(qa)} d\alpha = \begin{cases} 0, & |z| > H/2, \\ \Delta\Phi^{(m)}(z), & |z| \leq H/2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь на отрезке $|z| \leq H/2$ определены новые неизвестные функции $\Delta\Phi^{(m)}(z) = \Phi_2^{(m)}(a, z) - \Phi_1^{(m)}(a, z)$, которые по сути являются коэффициентами разложения скачка потенциала скорости на внешней и внутренней стенках оболочки в ряд Фурье по косинусам относительно координаты φ . Очевидно, что таким образом введенные функции вследствие непрерывности давления на концах оболочки должны удовлетворять условиям:

$$\Delta\Phi^{(m)}(-H/2) = \Delta\Phi^{(m)}(H/2) = 0. \quad (6)$$

Применяя теперь к обеим частям равенства (5) обратное преобразование Фурье, получим связь между плотностью $A_m(\alpha)$ и функцией $\Delta\Phi^{(m)}(z)$:

$$A_m(\alpha) = \frac{iq a H_m^{(1)'}(qa)}{4} \int_{-H/2}^{H/2} \Delta\Phi^{(m)}(z) \exp(-i\alpha z) dz. \quad (7)$$

Последнее выражение с помощью формулы интегрирования по частям и условий (6) можно переписать в виде:

$$A_m(\alpha) = \frac{qa H_m^{(1)'}(qa)}{4\alpha} \int_{-H/2}^{H/2} \Delta\Phi^{(m)'}(z) \exp(-i\alpha z) dz \quad (8)$$

с условием, что

$$\int_{-H/2}^{H/2} \Delta\Phi^{(m)'}(z) dz = 0, \quad (9)$$

которое непосредственно следует из (6).

Искомые функции $\Delta\Phi^{(m)}(z)$ найдем, удовлетворяя граничным условиям задачи. Пользуясь представлениями (2), (3) и (8) граничное условие (1) на внутренней стенке оболочки для m -й окружной моды можно записать в виде:

$$\int_{-H/2}^{H/2} \Delta\Phi^{(m)'}(z) K^{(m)}(z_0, z) dz = v_0 f^{(m)}(z_0), \quad (10)$$

$$|z_0| < H/2,$$

где

$$K^{(m)}(z_0, z) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2 a}{\alpha} J'_m(qa) H_m^{(1)'}(qa) \times \exp\{i\alpha(z_0 - z)\} d\alpha; \quad (11)$$

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{1}{\pi \epsilon_m} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0, z_0) \cos m\varphi_0 d\varphi_0,$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases}$$

Учитывая асимптотику

$$\frac{q^2 a}{\alpha} J'_m(qa) H_m^{(1)'}(qa) = \frac{i \operatorname{sign}(\alpha)}{\pi} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

для $|\alpha| \gg m$

и значение следующего нерегулярного интеграла в пространстве обобщенных функций [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\alpha) \exp\{i\alpha(z_0 - z)\} d\alpha = \frac{2i}{z_0 - z},$$

выделим регулярную и нерегулярную части в ядре (11) и запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-H/2}^{H/2} \frac{\Delta\Phi'(z)}{z_0 - z} dz + \int_{-H/2}^{H/2} \Delta\Phi'(z) K_{reg}^{(m)}(z_0, z) dz = v_0 f^{(m)}(z_0), \quad |z_0| < H/2, \quad (12)$$

где регулярное ядро имеет вид

$$K_{reg}^{(m)}(z_0, z) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q^2 a}{\alpha} J'_m(qa) H_m^{(1)'}(qa) - \frac{i}{\pi} \right\} \times \sin \alpha(z_0 - z) d\alpha;$$

символ \int означает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [10].

Итак, исходная краевая задача для каждой окружной моды m сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода относительно неизвестной функции $\Delta\Phi^{(m)}(z)$. Следует отметить, что если использовать при удовлетворении граничных условий представление (7) для плотности $A_m(\alpha)$ непосредственно через функцию $\Delta\Phi^{(m)}(z)$, то в результате получим (как в [5]) гиперсингулярное интегральное уравнение, теория и эффективные численные схемы которого в настоящее время недостаточно изучены.

Чтобы удовлетворить условию конечности энергии вблизи концов оболочки, решение уравнения (12) следует искать в классе функций [7]:

$$\Delta\Phi^{(m)}(z) = v_0 a \gamma^{(m)}(z) / \sqrt{(H/2)^2 - z^2}, \quad (14)$$

где безразмерная функция $\gamma^{(m)}(z)$ удовлетворяет условию Гельдера [10] на отрезке $-H/2 \leq z \leq H/2$. Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [10], такое решение имеет индекс единицу и для его единственного выделения необходимо иметь еще одно дополнительное условие на функцию $\Delta\Phi^{(m)}(z)$. В нашем случае в качестве такого дополнительного условия можно принять условие (9). Таким образом, окончательно для каждой окружной моды m необходимо решить сингулярное уравнение (12) относительно неизвестной функции $\Delta\Phi^{(m)}(z)$ с дополнительным условием (9).

Опишем теперь численный метод для нахождения решения уравнения (12). Особенностью предлагаемого подхода является то, что искомое решение представляется в виде (14), что позволяет не только выделить единственное физически правильное решение уравнения (12), но и построить эффективный численный алгоритм его решения. При иных подходах к решению такого рода проблем [7] это достигается путем улучшения сходимости вблизи угловых точек соответствующих медленно сходящихся рядов или несобственных интегралов.

Дискретизация интегральных уравнений (9) и (12) осуществляется путем замены интегралов в этих уравнениях квадратурными формулами интерполяционного типа для функций с порядком особенности $1/2$ на концах интервала интегрирования. Сингулярный интеграл заменим квадратурной формулой [11] с весовыми коэффициентами π/N , внутренними $z_j = (H/2)\tau_j$ и внешними $z_{0p} = (H/2)\tau_{0p}$ узлами, где $\tau_j = \cos\{\pi(2j-1)/2N\}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) и $\tau_{0p} = \cos\{\pi p/N\}$ ($p = 1, 2, \dots, N-1$) — соответственно корни полиномов Чебышева первого и второго рода степени N . Регулярные интегралы заменим N -точечной квадратурной формулой типа Гаусса [8] с весовыми коэффициентами π/N и узлами z_j , которые определены выше. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j^m \left\{ \frac{1}{2\pi(\bar{z}_{0p} - \bar{z}_j)} + K_{pj}^m \right\} = f_p^m, \quad (15)$$

$$p = 1, 2, \dots, N-1, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_j^m = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\bar{z}_j = z_j/a$, $\bar{z}_{0p} = z_{0p}/a$, $\gamma_j^m = \gamma_j^{(m)}(\bar{z}_j)$, $K_{pj}^m = a K_{reg}^{(m)}(\bar{z}_{0p}, \bar{z}_j)$,

$f_p^m = f^{(m)}(\bar{z}_{0p})$. После решения системы (15) – нахождения величин γ_j^m , удобно для дальнейших вычислений представить функцию $\gamma^{(m)}(z)$ в виде интерполяционного многочлена по полиномам Чебышева первого рода [12]:

$$\gamma^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(m)} T_n\left(\frac{2}{H}z\right), \quad (16)$$

где

$$C_n^{(m)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j^m T_n(\tau_j).$$

Здесь T_n – многочлены Чебышева первого рода степени n . Заметим, что суммирование в представлении (16) начинается с $n = 1$, поскольку, как следует из последнего уравнения системы (15), $C_0^{(m)} = 0$.

Пользуясь теперь представлениями (8), (14) и (16), искомые плотности $A_m(\alpha)$ можно выразить через коэффициенты $C_0^{(m)}$.

$$A_m(\alpha) = \frac{v_0 a^2 \pi q}{4\alpha} H_m^{(1)}(qa) \sum_{n=1}^{N-1} (-i)^n C_n^{(m)} J_n\left(\frac{H}{2}\alpha\right). \quad (16a)$$

Таким образом, в рамках принятых допущений получено строгое решение задачи об излучении звука жесткой оболочкой конечной длины. Решение аналитически удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям излучения на бесконечности и конечности энергии вблизи концов оболочки, а также условиям сопряжения звукового поля на границе частичных подобластей. Решение также удовлетворяет и граничным условиям на поверхностях оболочек, однако реализация этого удовлетворения обеспечивается численно с необходимой степенью точности. Анализ погрешности выполнения граничных условий был проведен для пульсирующей ($f(\varphi, z) = 1$) и осциллирующей ($f(\varphi, z) = \cos \varphi$) оболочек. Установлено, что если при дискретизации уравнений (9) и (12) порядок соответствующих квадратурных формул удовлетворяет условию $3 \leq N \leq 15$, то для значений $0 < H/2a \leq 5$ и $0 < ka \leq 10$ относительная погрешность в удовлетворении граничных условий не превышает 3% по всей длине оболочки, включая ее концы. Что касается интегральной погрешности, то расчеты показывают: значения мощности излучения оболочки, вычисленные в ближнем и дальнем поле, отличаются лишь в пятом знаке.

Характеристики дальнего поля определяются таким же образом, как и в работах [2, 4]. Используя интеграл Гельмгольца, нетрудно показать, что

потенциал скорости в дальнем поле определяется следующим простым аналитическим выражением:

$$\Phi(R, \theta, \varphi) \approx \frac{v_0 \pi k H a^2 \exp(ikR)}{4R} \sum_{m=0}^{\infty} D^{(m)}(\theta, \varphi), \quad (17)$$

$$kR \gg 1,$$

где функция $D^{(m)}(\theta, \varphi)$, равная

$$D^{(m)}(\theta, \varphi) = (-i)^m \cos \theta J'_m(ka \cos \theta) \cos m\varphi \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N-1} (-i)^{n+1} C_n^{(m)} \frac{J_n\left(\frac{kH}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kH}{2} \sin \theta}, \quad (18)$$

есть диаграмма направленности оболочки для m -й окружной моды. Выражения (17) и (18) по сути являются обобщением выражения (15) в [4] на случай, когда оболочка обладает направленными свойствами в горизонтальной плоскости (в плоскости $z = 0$).

Используя соотношения (2)–(4) и (16a), можно получить выражение для такой важной акустической характеристики ближнего поля, как импеданс излучения оболочки, колеблющейся на m -й окружной моде:

$$Z^{(m)} = -\rho_0 c_0 S \frac{ika \epsilon_m}{2H |f^{(m)}(0)|^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{C_n^{(m)}}{n} \times$$

$$\times \int_{-H/2}^{H/2} \sin \left\{ n \arccos \frac{2z}{H} \right\} f^{(m)*}(z) dz, \quad (19)$$

где $S = 2\pi a H$; звездочка означает знак комплексного сопряжения. Выражение (19) фактически является обобщением формулы (16) в [4]. Если $f^{(m)}(z) = 1$, то значение интеграла под знаком суммы в (19) при $n > 1$ равно нулю, а при $n = 1$ равно $\pi H/4$. Следовательно, в этом случае величина $Z^{(m)}$ полностью определяется только коэффициентом $C_1^{(m)}$: $Z^{(m)} = -\rho_0 c_0 S (i\pi k a \epsilon_m / 8) C_1^{(m)}$.

Перейдем к анализу количественных данных, полученных на основе изложенной выше расчетной схемы для случая, когда открытая оболочка совершает осциллирующие колебания. Анализ будем проводить путем сопоставления акустических свойств осциллирующей оболочки с акустическими свойствами пульсирующей оболочки, которые в известной мере изучены [1–5].

На рис. 2 приведены частотные зависимости мнимой и действительной частей импеданса излучения для осциллирующей оболочки, а на рис. 3 – для пульсирующей оболочки. Как нетрудно заметить, соответствующие кривые на рис. 2 и 3 качественно ведут себя достаточно сходно, и по

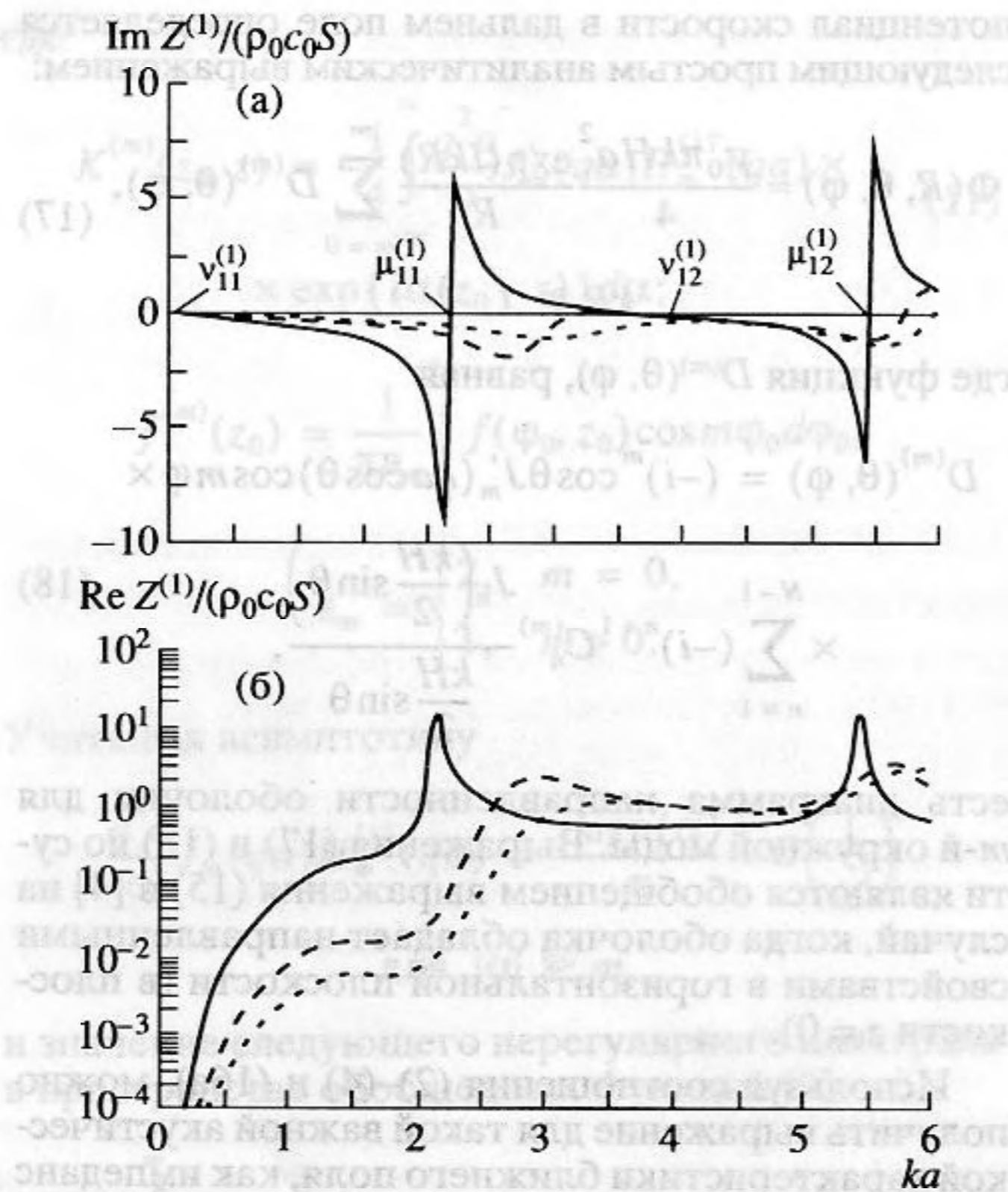


Рис. 2. Частотные зависимости мнимой (а) и действительной (б) частей удельного импеданса излучения осциллирующей оболочки. Сплошные кривые — $H/2a = 1.0$; штриховые кривые — $H/2a = 0.42$; пунктирные кривые — $H/2a = 0.3$. $v_{np}^{(1)}$ — частоты резонансов; $\mu_{np}^{(1)}$ — частоты антирезонансов.

крайней мере в области $0 < ka < 6$ все характерные черты поведения импеданса излучения пульсирующей оболочки присущи и импедансу излучения осциллирующей оболочки. Действительно, на низких частотах величины $\text{Im} Z^{(m)}$ имеют характер массы, а с ростом частоты возникают антирезонанс¹, затем резонанс, снова антирезонанс и т.д. Как известно [1–5], на частотах антирезонансов резко возрастает амплитуда колебаний жидкости внутри пульсирующей оболочки, растет значение $\text{Re} Z^{(0)}$ и как следствие мощность излучения (см. рис. 3б и 4б). Аналогичные эффекты характерны и для осциллирующей оболочки (см. рис. 2б и 4а).

¹ Здесь и далее мы будем использовать терминологию Е. Скучика. В силу теоремы Форстера (см. с. 57 в [13]) в любой сложной колебательной системе резонансы (нули $\text{Im} Z_{\text{изл}}$) и антирезонансы (полюсы $\text{Im} Z_{\text{изл}}$) последовательно чередуются. При этом, если при $\omega \rightarrow 0$ величина $\text{Im} Z_{\text{изл}} \rightarrow 0$, то формально в точке $\omega = 0$ мы имеем резонанс. Поэтому первый переход через ось абсцисс величины $\text{Im} Z_{\text{изл}}$ (при $\omega \neq 0$) мы будем интерпретировать как антирезонанс.

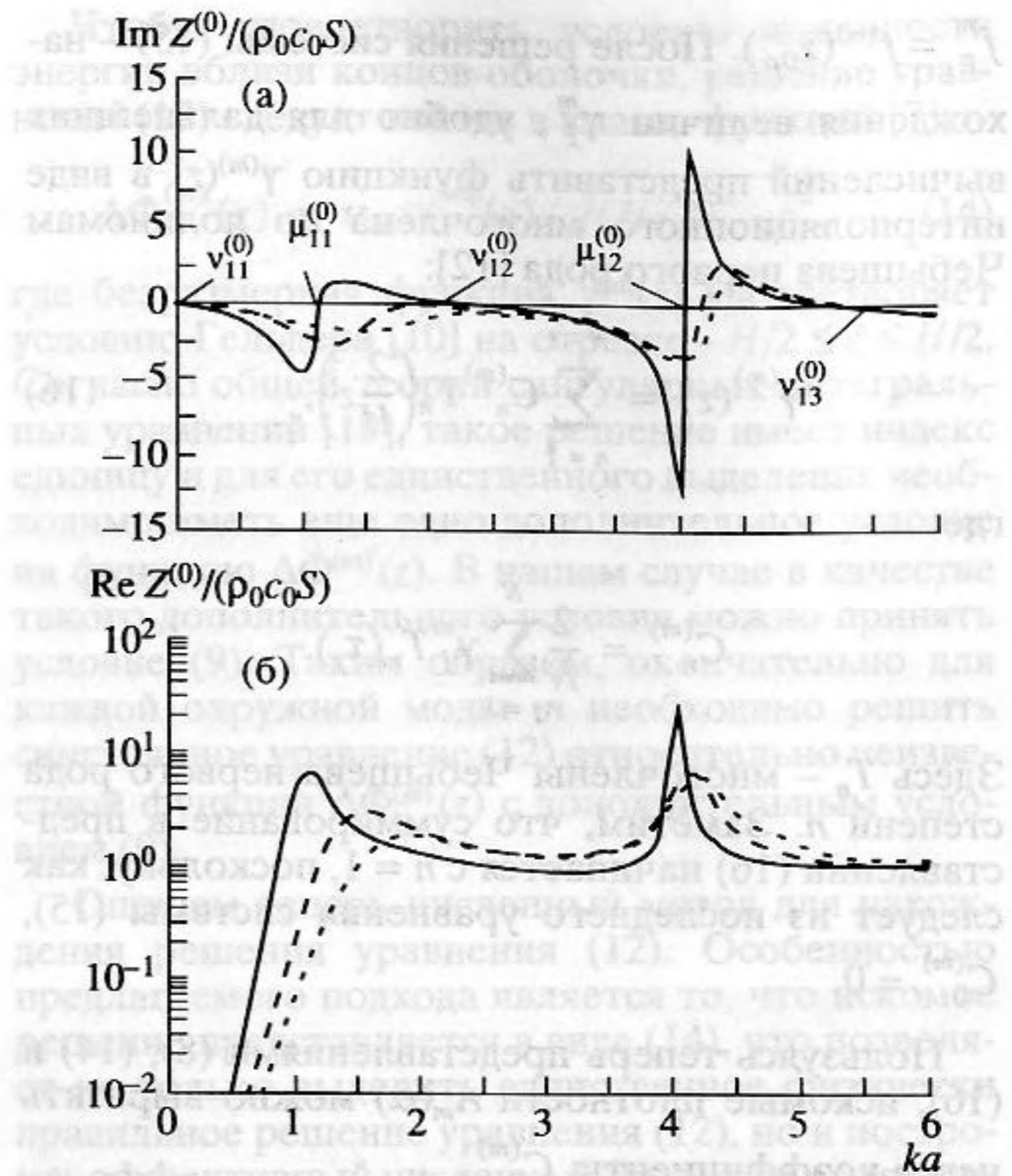


Рис. 3. Частотные зависимости мнимой (а) и действительной (б) частей удельного импеданса излучения пульсирующей оболочки. Сплошные кривые — $H/2a = 1.0$; штриховые кривые — $H/2a = 0.66$; пунктирные кривые — $H/2a = 0.5$. $v_{np}^{(0)}$ — частоты резонансов; $\mu_{np}^{(0)}$ — частоты антирезонансов.

Наряду с качественным подобием поведения импедансов излучения осциллирующей и пульсирующей оболочек имеются и существенные их различия количественного характера. Прежде всего частоты резонансов и антирезонансов у осциллирующей оболочки существенно (на ~ 0.5 – 1.0 октавы) сдвинуты в область более высоких частот по сравнению с соответствующими частотами пульсирующей оболочки (по крайней мере в рассматриваемом диапазоне значений ka). Кроме этого, на низких частотах (до первого антирезонанса) с энергетической точки зрения осциллирующая и пульсирующая оболочки ведут себя по разному. Если у пульсирующей оболочки звуковую энергию излучает только ее внутренняя стенка, а внешняя стенка поглощает энергии, то у осциллирующей оболочки излучает энергию внешняя стенка, а внутренняя ее поглощает. Начиная же с частоты первого антирезонанса и выше для обеих оболочек характерными особенностями являются: на частотах антирезонансов — преимущественное излучение энергии внутренней стенкой, в зоне частот между антирезонансами — внешней поверхностью. Такое “разделение

труда” между внутренней и внешней стенками является одной из самых примечательных особенностей открытых оболочек в отличие от закрытых оболочек². Заметим, что на этот эффект ранее уже было обращено внимание в [1–4, 14].

Обратимся еще раз к рис. 2 и 3 и проследим как изменяется частотная зависимость мнимой части импеданса с изменением отношения $H/2a$. При относительно больших значениях $H/2a$ ($H/2a > 0.42$ для осциллирующей оболочки) в рассматриваемом диапазоне частот наблюдаются два антирезонанса и один резонанс между ними, о чем свидетельствует четкое пересечение сплошными кривыми (на рис. 2а и 3а) оси ka . При $H/2a = 0.42$ и $H/2a = 0.66$ (соответственно для осциллирующей и пульсирующей оболочек) первый антирезонанс и последующий за ним резонанс вырождаются в один “квазирезонанс”. Мы намеренно используем термин “квазирезонанс”, поскольку штриховые кривые на рис. 2а и 3а при значениях $ka \approx 3.38$ и $ka \approx 1.92$ соответственно не пересекают ось ka , а только касаются ее. Иными словами, смены знака величины $\text{Im}Z^{(m)}$ не происходит, и в зоне частот до второго антирезонанса величина $\text{Im}Z^{(m)}$ имеет характер массы. При дальнейшем уменьшении отношения $H/2a$ исчезает и “квазирезонанс”. При этом падает значение $\text{Re}Z^{(m)}$, что непосредственно следует из анализа кривых на рис. 2б и 3б.

Таким образом, резонансные свойства открытых оболочек существенным образом связаны с отношением $H/2a$. Чтобы иметь возможность более наглядно наблюдать динамику этой связи, на рис. 5 в плоскости $(H/2a, ka)$ представлены низкочастотные ветви спектральных кривых для осциллирующей и пульсирующей оболочек. Задавая конкретным значением $H/2a$ можно легко определить значения частот нескольких первых резонансов и антирезонансов оболочек. Как видно, качественный характер расположения низкочастотных ветвей спектральных кривых для обеих оболочек в определенной степени сходен. Однако в количественном смысле имеются весьма существенные отличия. Во-первых, спектральные кривые осциллирующей оболочки находятся заметно выше над осью $H/2a$, чем спектральные кривые пульсирующей оболочки, а это указывает на то, что частоты резонансов и антирезонансов осциллирующей оболочки располагаются выше соответствующих частот пульсирующей оболочки. Во-вторых, при увеличении отношения $H/2a$ значение частоты первого антирезонанса для осциллирующей оболочки асимптотически стремится к предельному значению $ka = 1.841$ (на рис. 5а это значение отмечено штриховой прямой линией). Таким образом, в области более низких частот ($ka < 1.841$) осциллирующая оболочка не

² Закрытая оболочка не имеет внутри акустической среды, и ее торцы закрыты заглушками.

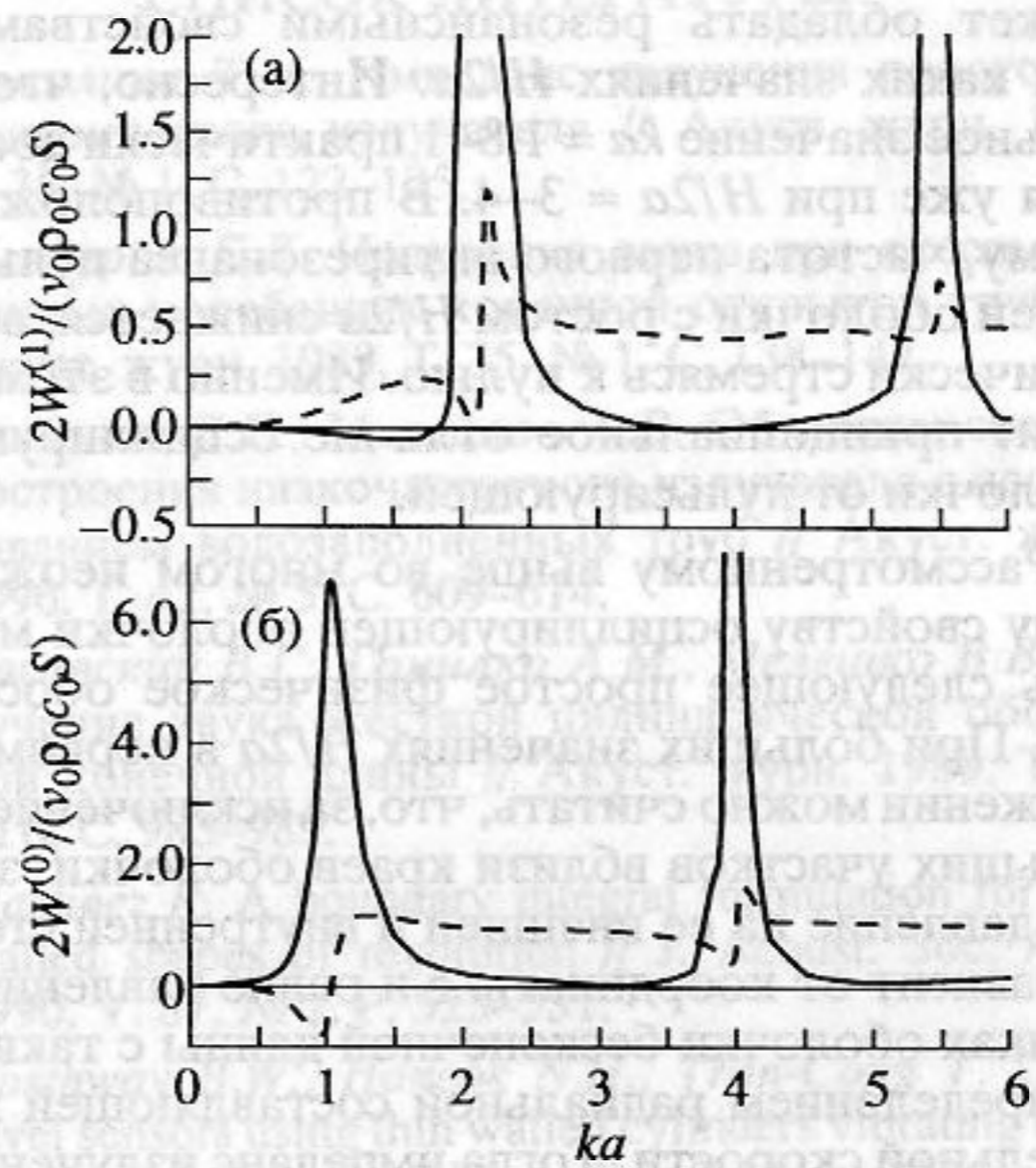


Рис. 4. Мощность излучения внутренней (сплошная кривая) и внешней (штриховая кривая) осциллирующей (а) и пульсирующей (б) оболочек при $H/2a = 1.0$.

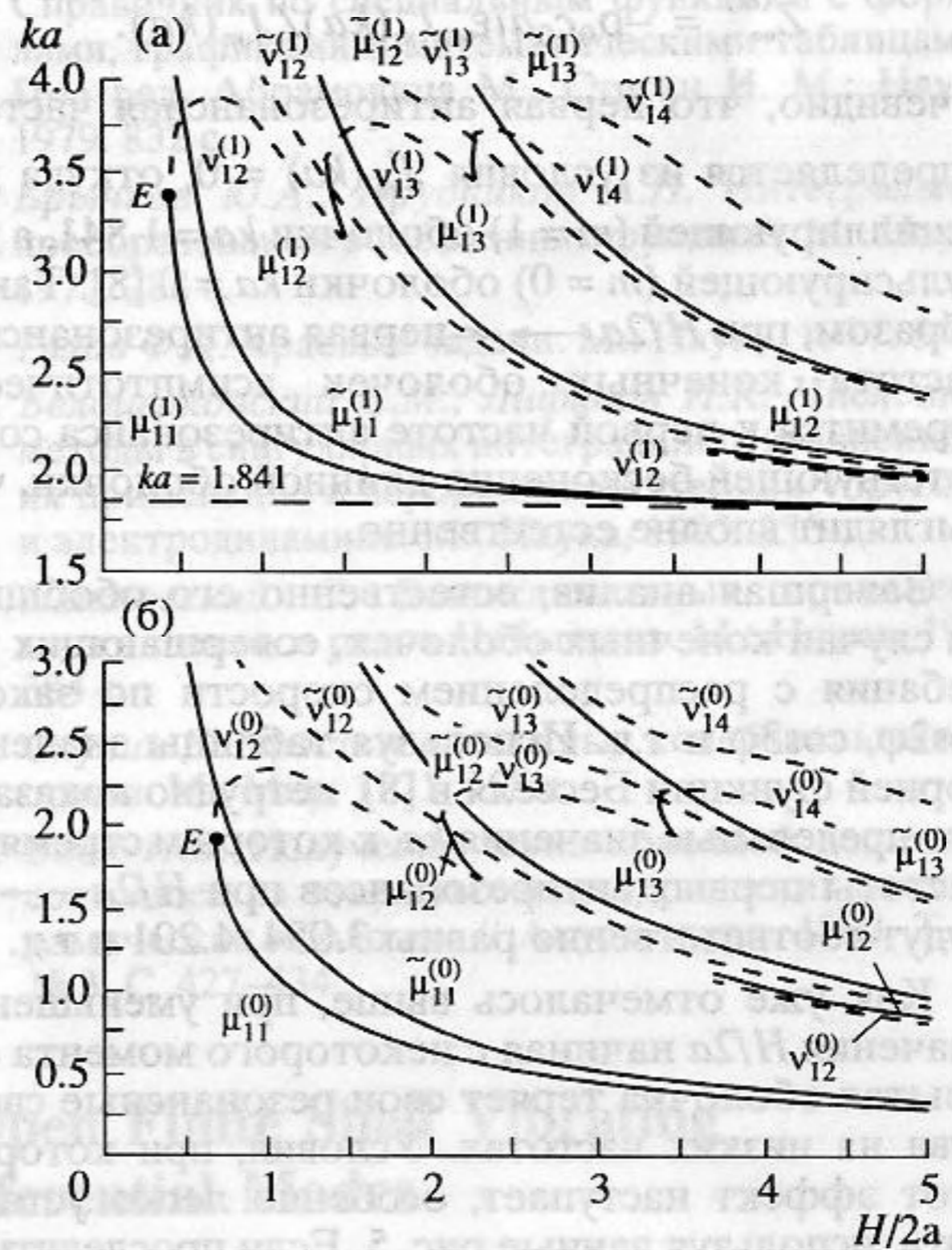


Рис. 5. Низкочастотные спектральные кривые открытой (кривые $\mu_{np}^{(m)}$ и $\nu_{np}^{(m)}$) и закрытой с акустически мягкими торцевыми крышками оболочек (кривые $\tilde{\mu}_{np}^{(m)}$ и $\tilde{\nu}_{np}^{(m)}$). Сплошные кривые – ветви антирезонансов; штриховые кривые – ветви резонансов. а – осциллирующая оболочка ($m = 1$); б – пульсирующая оболочка ($m = 0$).

может обладать резонансными свойствами ни при каких значениях $H/2a$. Интересно, что предельное значение $ka = 1.841$ практически достигается уже при $H/2a \approx 3-4$. В противоположность этому, частота первого антирезонанса пульсирующей оболочки с ростом $H/2a$ снижается, асимптотически стремясь к нулю. Именно в этом и состоит принципиальное отличие осциллирующей оболочки от пульсирующей.

Рассмотренному выше во многом неожиданному свойству осциллирующей оболочки можно дать следующее простое физическое обоснование. При больших значениях $H/2a$ в первом приближении можно считать, что, за исключением небольших участков вблизи краев оболочки, звуковое давление на ее внешней и внутренней стенках не зависит от координаты z и равно давлениям на стенках оболочки бесконечной длины с таким же распределением радиальной составляющей колебательной скорости. Тогда импеданс излучения на единицу длины внутренней стенки³ бесконечно длинной оболочки, совершающей колебания с распределением скорости $\cos m\varphi$, определяется формулой:

$$Z_{\infty}^{(m)} = -\rho_0 c_0 a i \epsilon_m J_m(ka) / J'_m(ka).$$

Очевидно, что первая антирезонансная частота определяется из условия $J'_m(ka) = 0$, откуда для осциллирующей ($m = 1$) оболочки $ka = 1.841$, а для пульсирующей ($m = 0$) оболочки $ka = 0$ [8]. Таким образом, при $H/2a \rightarrow \infty$ первая антирезонансная частота конечных оболочек асимптотически стремится к первой частоте антирезонанса соответствующей бесконечно длинной оболочки, что выглядит вполне естественно.

Завершая анализ, естественно его обобщить на случаи конечных оболочек, совершающих колебания с распределением скорости по закону $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$ и т.д. Используя таблицы значений корней функций Бесселя в [8], нетрудно показать, что предельные значения ka , к которым стремятся частоты первых антирезонансов при $H/2a \rightarrow \infty$, будут соответственно равны 3.054, 4.201 и т.д.

Как уже отмечалось выше, при уменьшении значения $H/2a$ начиная с некоторого момента открытая оболочка теряет свои резонансные свойства на низких частотах. Условия, при которых этот эффект наступает, особенно легко установить, используя данные рис. 5. Если проследить за ходом кривых, характеризующих значение частоты первого антирезонанса и следующего за ним резонанса, то легко установить, что с уменьшением значения $H/2a$ (в зоне $0 < H/2a < 1$) эти частоты сближаются и при $H/2a = 0.42$ (для осцилли-

³ Учитывать импеданс излучения внешней поверхности оболочки (при оценке антирезонанса) нет необходимости, так как при любых ka его значение остается конечным.

рующей оболочки) и $H/2a = 0.66$ (для пульсирующей оболочки) сливаются в одну точку, которая на рис. 5 обозначена буквой E и которую выше определили как "квазирезонанс". При дальнейшем уменьшении значения $H/2a$ оболочка полностью теряет свои резонансные свойства на низких частотах.

В заключение остановимся на одном упрощенном подходе, с помощью которого можно оценить приближенные значения нескольких первых резонансов и антирезонансов оболочки. Как подмечено в [4, 14], резонансные свойства открытых оболочек в основном определяются динамикой внутреннего объема жидкости. Имея это в виду, предположим, что акустическая среда заполняет только внутренний объем оболочки, а внешняя стенка оболочки ненагружена (находится в вакууме). Кроме этого, будем также считать, что торцы оболочки закрыты акустически мягкими плоскими крышками. При этих условиях нахождение звукового поля внутри оболочки, генерируемого колебаниями ее внутренней стенки, представляется тривиальной задачей. Поэтому выпишем сразу формулу для определения импеданса излучения внутренней стенки оболочки, когда на ней задано распределение радиальной составляющей скорости типа $\cos m\varphi$:

$$\tilde{Z}^{(m)} = -\rho_0 c_0 S \frac{4ika^3 \epsilon_m}{H^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_n^2 \sqrt{\alpha_n^2 - (ka)^2}} \frac{I_m(\sqrt{\alpha_n^2 - (ka)^2})}{I'_m(\sqrt{\alpha_n^2 - (ka)^2})}, \quad ka \leq \alpha_n \\ \frac{1}{\alpha_n^2 \sqrt{(ka)^2 - \alpha_n^2}} \frac{J_m(\sqrt{(ka)^2 - \alpha_n^2})}{J'_m(\sqrt{(ka)^2 - \alpha_n^2})}, \quad ka \geq \alpha_n \end{array} \right\} \quad (20)$$

где $\alpha_n = (2n - 1)\pi a/H$. Ввиду отсутствия излучения звука во внешнюю среду и потерь в среде $\tilde{Z}^{(m)}$ является чисто мнимой величиной. Из (20) непосредственно следует, что в диапазоне частот $0 \leq ka \leq \alpha_1$ резонансные явления во внутреннем объеме жидкости отсутствуют, поскольку в этом диапазоне частот могут существовать только неоднородные (нераспространяющиеся) волны. Используя (20), легко определить частоту антирезонанса $((ka)_{\text{антирез}} = \tilde{\mu}_{pn}^{(m)} = \sqrt{\mu_p^{(m)} + \alpha_n^2}$, где $\mu_p^{(m)}$ — p -й корень функции $J_m(ka)$) и следующего за ним резонанса $((ka)_{\text{рез}} = \tilde{\nu}_{pn+1}^{(m)}$ — соответствующий нуль величины $\tilde{Z}^{(m)}$) объема жидкости внутри закрытой оболочки. На рис. 5 представлены кривые, характеризующие низкочастотные ветви спектральных кривых для такой оболочки, рассчитанные по

формуле (20). Сравнивая эти кривые с соответствующими кривыми для открытой оболочки, не трудно убедиться, что оценки резонансных и антирезонансных частот по приближенной формуле (20) дают вполне удовлетворительные результаты по крайней мере в области $H/2a > 1$, $ka < 3$ (для осциллирующей оболочки) и $H/2a > 1.5$, $ka < 1.8$ (для пульсирующей оболочки).

Полученные выше результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. На основе использования априорной информации об особенностях поведения звукового поля вблизи концов оболочки построен эффективный численный алгоритм для оценок ближнего и дальнего полей открытой оболочки конечной длины, совершающей произвольные радиальные колебания.

2. Проведенный количественный анализ позволил установить ряд особенностей, присущих осциллирующей и пульсирующей оболочкам. В частности, показано, что:

а) осциллирующая открытая оболочка в области первого антирезонанса является весьма эффективным источником звука, обладающим направленностью излучения не только в вертикальной плоскости, но и в горизонтальной;

б) в отличие от открытой пульсирующей оболочки, у которой с увеличением отношения $H/2a$ неограниченно снижается частота первого антирезонанса, у осциллирующей оболочки существует предельное значение $ka = 1.841$, ниже которого принципиально невозможно снизить частоту первого резонанса за счет увеличения $H/2a$. Аналогичное предельное значение имеет место и для распределений скорости типа $\cos m\varphi$, где $m = 2, 3, \dots$. При этом численное значение предела увеличивается с ростом m .

3. Полученные результаты могут служить основой для оценки акустических характеристик открытых кольцевых пьезокерамических преобразователей, совершающих осциллирующие колебания за счет секционирования электродов и подачи на них электрических напряжений с противоположными фазами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томилина Т.М. Импеданс излучения полого цилиндрического излучателя // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 122–125.
2. Шендеров Е.Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138–147.
3. Глазанов В.Е., Михайлов А.В. Об одном способе построения низкочастотного излучателя с использованием водозаполненных труб // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 609–614.
4. Басовский В.Г., Гомилко А.М., Мелешко В.В. Излучение звука жесткой цилиндрической оболочкой конечной длины // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 983–989.
5. Martinez R. A boundary integral formulation for thin-walled shapes of revolution // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 87. № 2. P. 523–531.
6. Northway B.W., Hancock N.H., Tran-Cong T. Liquid level sensors using thin walled cylinders vibrating in circumferential modes // Meas. Sci. Technol. (UK). 1995. V. 6. № 1. P. 85–93.
7. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 240 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
9. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
11. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости и электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
12. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
13. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 558 с.
14. Вовк И.В. Излучение звука конечной решеткой, состоящей из открытых цилиндрических пьезокерамических оболочек // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 427–434.

Radiation of Sound by a Stiff Open Finite Shell Vibrating in Arbitrary Circumferential Modes

V. G. Basovskii and I. V. Vovk

A rigorous solution is developed for the radiation of sound by a stiff open finite shell vibrating in arbitrary circumferential modes. An efficient numerical algorithm for estimating near and far fields produced by the shell is developed with the use of prior data on the field profile near a shell end. A qualitative analysis revealed some so far unknown features of the field characteristics of vibrating and fluctuating shells.