

УДК 534.222

УПРУГИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

© 1997 г. И. Ю. Беляева, В. Ю. Зайцев

Институт прикладной физики РАН
603600 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46

Поступила в редакцию 04.07.96 г.

В работе рассматривается влияние внутренней структуры среды на ее нелинейные упругие свойства. Показано, что для существования высокого уровня нелинейности микронеоднородной среды принципиально необходимо наличие малого количества мягкой компоненты в упругом материале. Исследовано влияние иерархической структуры жестких и мягких элементов на параметры среды. Показано, что при многоуровневой структуре жестких элементов наличие внутренних уровней структуры не сказывается на дальнейшем увеличении нелинейности среды. При иерархической структуре мягких элементов, напротив, нелинейность среды может расти в геометрической прогрессии. Однако, для реальных физических сред в силу ограниченности диапазона изменения упругости компонент 3–4 порядками результирующее возможное возрастание коэффициента нелинейности по сравнению с однородной средой также оказывается ограниченным этим диапазоном.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы нелинейные упругие свойства твердых тел являются предметом интенсивного экспериментального и теоретического изучения. Традиционно происхождение упругой нелинейности связывалось с ангармонизмом межатомного взаимодействия [1], а описание нелинейных свойств изотропных сред проводилось в рамках пяти- или девятиконстантной теории упругости, учитывающей, соответственно, квадратичные и кубические поправки к линейному закону Гука [1]. В этом приближении в важном частном случае плоских деформаций связь между напряжением и деформацией имеет вид:

$$\sigma = M\varepsilon(1 + \gamma\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \dots), \quad (1)$$

где M – упругий модуль среды, $\gamma\varepsilon$, $\beta\varepsilon^2 \ll 1$, а коэффициенты γ и β часто называют квадратичными и кубическими нелинейными параметрами. Установленные экспериментально для ряда сред (стекло, полимерные материалы, некоторые металлы) значения γ и β порядка нескольких единиц оказались в хорошем соответствии с представлениями о слабой непараболичности межмолекулярного потенциала. Таким образом, нелинейность этих материалов могла заметно проявляться только при больших деформациях, близких к порогу разрушения материала $\varepsilon \sim 10^{-3} - 10^{-2}$.

В то же время были выявлены многочисленные факты, не укладывающиеся в рамки этих представлений. Так, для многих земных пород, поликристаллических металлов, строительных материалов, пористых, зернистых и трещиноватых сред экспериментально установленные зна-

чения квадратичного параметра нелинейности достигали $10^3 - 10^5$, а кубического – $10^5 - 10^8$ в широкой полосе частот от герцового до мегагерцового диапазона [2]. Интересно отметить также, что по своим линейным акустическим характеристикам эти среды не демонстрировали столь же необычного поведения [3].

В принципе стало понятно, что нелинейность таких сред как-то связана с особенностями их микроструктуры (наличием в них различных дефектов – трещин, пор, зерен и т.п.). Физические модели нелинейности, основанные на рассмотрении свойств таких включений, были построены для случаев жидкости с пузырьками газа и поросодержащих упругих резиноподобных сред [3], гранулированных материалов [4] и трещиноватых сред [5].

При всем разнообразии упомянутых выше примеров можно указать общую структурную особенность, обуславливающую высокую нелинейность таких сред: наличие в их структуре компонент с резко контрастными линейными упругими свойствами. Присутствие мягких дефектов-включений может приводить к возникновению локально высоких значений деформаций и напряжений, что в целом для образца означает появление аномально высокой нелинейности при малых средних деформациях [4].

Этот механизм возникновения структурно-обусловленной нелинейности был подробно рассмотрен в работах [6, 7] на примере обобщенной модели микронеоднородной среды, причем полученные ранее результаты для конкретных случаев [3–5] хорошо согласуются с предложенным в [6] описанием. Однако в модели [6] учитывался

только один уровень неоднородности микро-структуры: была рассмотрена двухкомпонентная среда, где компоненты, резко отличающиеся по сжимаемости, считались однородными. Вместе с тем, реальные микронеоднородные среды (земные породы, поликристаллические материалы) явно демонстрируют наличие нескольких ступеней иерархии внутренней структуры (носящей иногда фрактальный характер) в широком диапазоне масштабов (см., например, [8]). Естественно ожидать, что такая иерархичность может существенно сказываться на структурно-обусловленных локальных концентрациях деформаций и напряжений и влиять на нелинейные свойства среды. Этот вопрос требует специального анализа, который мы проведем, отталкиваясь от обобщенной модели [6] и рассмотрим в качестве конкретного примера случай многокомпонентной зернистой среды.

2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Начнем рассмотрение с одноуровневого приближения структурной неоднородности. Следуя [6], рассмотрим цепочку из сосредоточенных масс M , соединенных упругими элементами-пружинками, невозмущенная длина которых для простоты предполагается одинаковой и равной $L \ll \Lambda$, где Λ – длина акустической волны (см. рис. 1а). Для моделирования одного уровня структурной неоднородности среды предположим, что некоторые из пружинок имеют коэффициент упругости k_1 много меньший, чем коэффициент k у основной части пружинок: $k/k_1 = Q \gg 1$. Линейная плотность ячеек цепочки характеризуется величиной N , а концентрация мягких включений – значением N_1 . Предположим для удобства, что поперечное сечение цепочки имеет единичную площадь, так что величины N и N_1 могут рассматриваться как объемные концентрации в среде, а упругая сила, действующая между элементами, соответствует напряжению σ . Для определения нелинейных упругих свойств среды предположим, что материал каждой пружинки характеризуется малым отклонением от линейного закона Гука:

$$\sigma = M\epsilon[1 + f(\epsilon)], \tag{2}$$

$$\sigma = M_1\epsilon[1 + f_1(\epsilon)], \tag{3}$$

где M, M_1 – линейные модули упругости материала пружинок, причем относительно их соотношения мы уже предположили, что $M/M_1 = k/k_1 \equiv Q \gg 1$, а собственная нелинейность материала как жестких, так и мягких упругих элементов мала: $f(\epsilon) \sim f_1(\epsilon) \ll 1$.

Находя упругую энергию пружинок при их деформации и используя известную связь $\sigma = \partial W/\partial \epsilon$ упругой энергии с напряжением и деформацией,

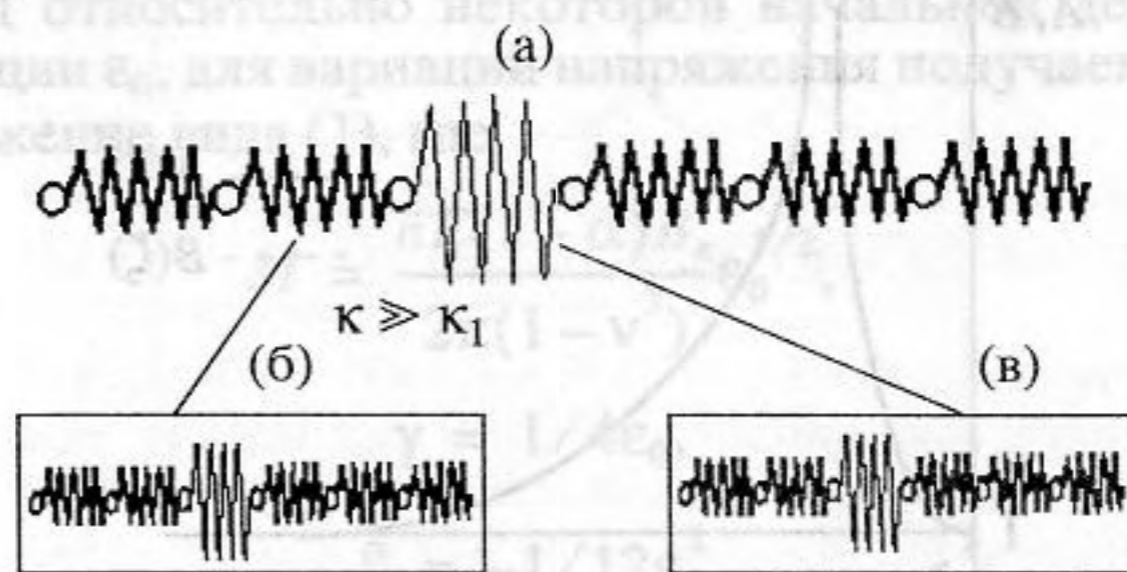


Рис. 1. Структура модельной микронеоднородной среды: а – одноуровневое приближение; б, в – иерархическая структура мягких и жестких элементов предыдущего уровня.

получаем выражение для соотношения средней деформации среды ϵ с упругим напряжением σ :

$$\sigma = \epsilon \frac{M}{1 + \zeta(Q-1)} \left\{ 1 + \frac{1-\zeta}{1 + \zeta(Q-1)} \times \right. \tag{4}$$

$$\left. \times f\left(\frac{\epsilon}{1 + \zeta(Q-1)}\right) + \frac{\zeta Q}{1 + \zeta(Q-1)} f_1\left(\frac{Q\epsilon}{1 + \zeta(Q-1)}\right) \right\}.$$

Из выражения (4) явно видно, что в случае малой концентрации дефектов $\zeta < Q^{-1}$ у функции f_1 аргумент $Q\epsilon/[1 + \zeta(Q-1)] \approx Q\epsilon$. Это означает, что деформация мягких включений, приблизительно в $Q \gg 1$ раз превышает среднюю деформацию среды ϵ , в связи с чем эти включения “переводятся” в сильно нелинейную область при малых средних деформациях, увеличивая нелинейность среды в целом.

Проанализируем подробнее выражение (4) для показательного случая степенного закона нелинейности $f(\epsilon) = f_1(\epsilon) = \Gamma^{(n)}\epsilon^{n-1}$, где $\Gamma^{(n)}$ – безразмерный коэффициент нелинейности n -го порядка, $n > 1$. В этом случае (4) принимает вид:

$$\sigma = \epsilon B M \{ 1 + \epsilon^{n-1} A \Gamma^{(n)} \}, \tag{5}$$

в котором коэффициенты A и B , характеризующие влияние дефектов, равны:

$$B = [1 + \zeta(Q-1)]^{-1}, \tag{6}$$

$$A = \frac{1 + \zeta(Q^n - 1)}{[1 + \zeta(Q-1)]^n}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) видно, что при очень малой плотности дефектов $\zeta Q^n \ll 1$, как линейная упругость среды, так и коэффициент нелинейности практически не чувствуют их присутствия ($A \approx B \approx 1$). Далее, когда $\zeta Q^n \gg 1$, но $\zeta Q \ll 1$, линейный модуль все еще остается практически неизменным $B \approx 1$, в то время как коэффициент нелинейности среды многократно ($A \approx \zeta Q^n \gg 1$) возрастает. С дальнейшим ростом концентрации дефектов ζ , когда $\zeta Q \gg 1$, но все еще $\zeta \ll 1$, уже уменьшается и линейная упругость среды ($B \approx (\zeta Q)^{-1} \ll 1$), однако значение

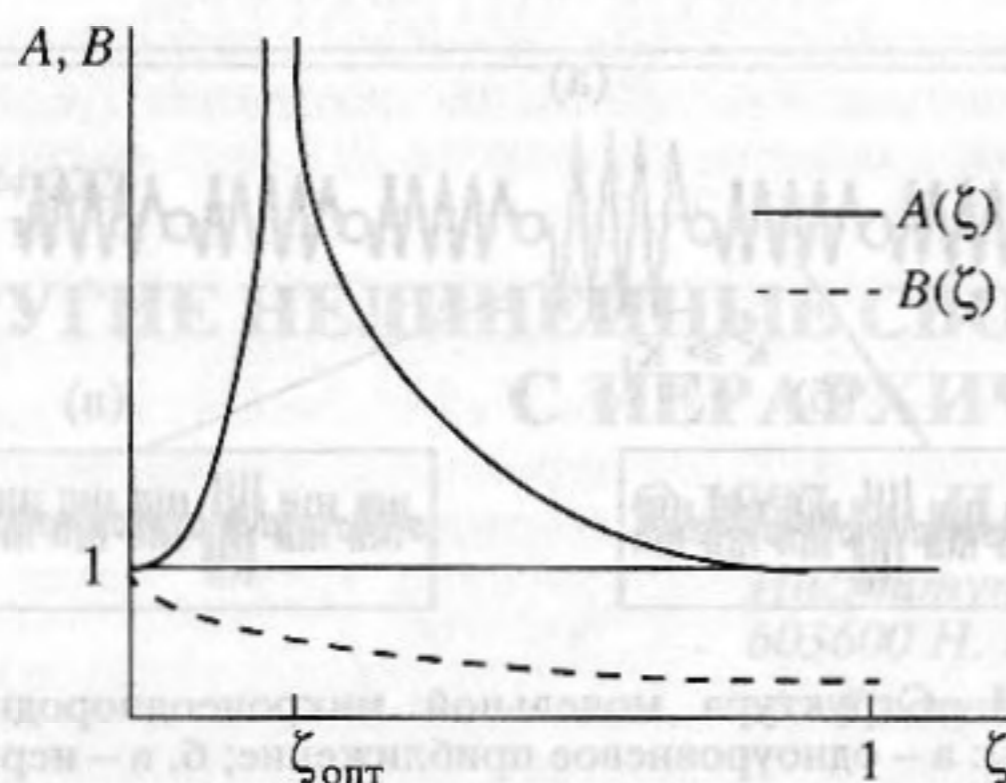


Рис. 2. Зависимости фактора возрастания нелинейности $A(\zeta)$ (сплошная линия) и коэффициента изменения упругого модуля $B(\zeta)$ (штриховая линия) от концентрации дефектов.

нелинейного коэффициента среды остается аномально высоким ($A \approx \zeta^{1-n} \gg 1$, так как показатель $n > 1$). Наконец, при $\zeta \rightarrow 1$ упругие свойства цепочки определяются, в основном, упругостью мягких включений ($B = Q^{-1}$, т.е. $M_{\text{сред}} = M/Q$), а значение коэффициента нелинейности возвращается к своей нормальной величине ($A = 1$).

Таким образом, значение коэффициента нелинейности $\Gamma^{(n)}$ проходит через максимум, который достигается при очень малой оптимальной концентрации включений:

$$\zeta_{\text{опт}} = (n-1)^{-1}(Q-1)^{-1} - n(n-1)^{-1}(Q^n-1)^{-1} \approx (n-1)^{-1}Q^{-1} \ll 1. \quad (8)$$

Фактор возрастания нелинейности при этом равен:

$$A(\zeta_{\text{опт}}) \approx (n-1)^{n-1}n^{-n}Q^{n-1} \gg 1, \quad (9)$$

в то время как изменение упругого модуля гораздо меньше:

$$B(\zeta_{\text{опт}}) \approx (n-1)/n \sim 1. \quad (10)$$

Качественно ход зависимостей $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ показан на рис. 2.

Итак, рассмотренная простая одноуровневая модель микронеоднородной среды наглядно иллюстрирует сделанное выше утверждение о роли мягких дефектов – включений: для сильного проявления эффекта возрастания нелинейности принципиально необходимо, чтобы включения были гораздо мягче окружающего материала, а их концентрация была малой.

Для учета иерархичности структуры среды предположим теперь, что каждый из элементов рассмотренной модели в свою очередь также характеризуется внутренней микронеоднородностью, как это показано на рис. 1б, 1в. Анализ влияния этого нового структурного уровня можно

провести, опираясь на уже полученные выражения для одноуровневой модели.

Отметим, во-первых, что в соответствии с рассмотренным выше механизмом исходная собственная нелинейность $f(\epsilon)$ жестких элементов в выражении (2) может быть сильно повышена за счет их внутренней неоднородности, показанной на рис. 1б. В частности, для квадратичного нелинейного параметра, согласно (9), при оптимальной концентрации дефектов (8) может быть достигнуто возрастание в $Q/4$ раз. Однако, включение этого звена в более крупномасштабную структуру, показанную на рис. 1а, в соответствии с формулой (4) не приведет к заметному изменению нелинейности среды в целом, поскольку коэффициент при функции f нелинейности жестких элементов является величиной порядка единицы: $(1-\zeta)/(1+\zeta(Q-1)) \sim 1$.

Существенно иной может быть ситуация, когда дополнительный структурный уровень (рис. 1в) имеют показанные на рис. 1а мягкие включения, исходная нелинейность которых за счет мелко-масштабной структуры также может повышаться в $Q/4$ раз. При этом, в отличие от случая структурированности жестких элементов, нелинейность крупномасштабной среды в целом может быть еще раз увеличена в $Q/4$ раз, как следует из вида множителя при нелинейной функции f_1 мягких элементов в (4).

Аналогичные выводы будут справедливы для каждой дополнительной степени иерархии структуры среды. Таким образом, многоуровневая структурированность жестких элементов не будет приводить к дополнительному росту нелинейности среды, в то время как многоступенчатость структуры мягких элементов может вести к росту нелинейности среды в геометрической прогрессии ($\Gamma^{(2)} \sim (Q/4)^k$, где $k \geq 1$ – число ступеней иерархии). Однако, для реальных физических сред полный диапазон изменения упругости компонент Q_{max} ограничен тремя–четырьмя порядками между всеми уровнями структуры. В связи с этим ограничением число контрастных по упругости структурных уровней, которое имеет смысл выделять в реальных средах, обычно не превышает трех–четырех с контрастом упругостей компонент порядка $Q_i \sim Q_{\text{max}}^{1/k}$ на каждом уровне. Следовательно, результирующее максимальное возрастание коэффициента нелинейности по сравнению с однородной средой в любом случае оказывается одного порядка $\prod_{i=1}^k Q_i \sim (Q_{\text{max}}^{1/k})^k = Q_{\text{max}}$ раз, т.е. все равно ограничено реальным предельным значением Q_{max} . Это хорошо объясняет тот факт, что экспериментально наблюдаемые значения коэффициента нелинейности $\Gamma^{(2)}$ даже для таких многоуровневых сред, как земные породы, не превышают 10^3 – 10^5 .

3. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ И КОНТАКТО-СОДЕРЖАЩИЕ СТРУКТУРЫ

Проведенное рассмотрение структурного механизма возникновения аномальной нелинейности, как показано в [6, 7], хорошо согласуется со следствиями из конкретных моделей упругой нелинейности пузырьковых жидкостей [3], пористых [9] и трещиноватых [5] сред при надлежащем выборе соответствия введенной выше пары характеристик Q и ζ с параметрами этих моделей.

Еще одну важную группу микронеоднородных сред составляют контакто-содержащие материалы, в частности, гранулированные среды. В этом случае жестким элементам сопоставляется материал в объеме зерен, а роль мягких включений играют межзеренные контакты.

Очевидно, что в таких средах может присутствовать несколько масштабов неоднородности структуры: поровое пространство между зернами может быть заполнено более мелкой зернистой фракцией, которая, в свою очередь, может содержать еще более мелкие зерна (подобная многофракционная структура характерна для многих реальных неконсолидированных сред). Интересно проанализировать, как такая многоуровневость скажется на нелинейных характеристиках среды.

Пусть агрегат зернистой среды единичного объема построен из сферических гранул различных размеров следующим образом. Наиболее крупные частицы одинакового радиуса R_1 упакованы случайно; частицы с радиусом $R_2 \ll R_1$ заполняют поровое пространство предыдущей фракции, и т.д. Доля пустоты в каждой фракции предполагается одинаковой (и равной для случайной упаковки $\alpha = 0.39$), следовательно, объемы, занимаемые фракциями разного порядка, относятся как

$$V_1 : V_2 : \dots : V_n = 1 : \alpha : \dots : \alpha^n, \quad (11)$$

где n — число уровней иерархии.

Запишем материальное уравнение зернистой среды с учетом ее многоуровневости. Следуя работе [4], для связи $\sigma(\epsilon)$ можно получить

$$\sigma(\epsilon) = \frac{\bar{n}E(1-\alpha)C_n}{3\pi(1-\nu^2)} \epsilon^{3/2}, \quad (12)$$

$$C_n = \sum_{i=1}^n \alpha^{-(i-1)/2} = \frac{\alpha^{-n/2} - 1}{\alpha^{-1/2} - 1}. \quad (13)$$

Отметим, что, как было показано в работе [4], уравнение (12) справедливо и в случае плоских деформаций. Таким образом, отличие (12) от рассмотренного в [4] однофракционного случая состоит в появлении множителя C_n , что означает увеличение упругости среды при появлении дополнительных мелкомасштабных фракций. Действительно, разлагая уравнение (12) в степенной

ряд относительно некоторой начальной деформации ϵ_0 , для вариаций напряжения получаем выражение вида (1), где

$$M = \frac{\bar{n}E(1-\alpha)B_n}{2\pi(1-\nu^2)} \epsilon_0^{1/2}, \quad (14)$$

$$\gamma = 1/4\epsilon_0, \quad (15)$$

$$\beta = -1/12\epsilon_0^2. \quad (16)$$

Таким образом, видно, что значения нелинейных параметров, выраженные через начальное поджатие среды, не изменяются при введении дополнительных ступеней иерархии упаковки. С другой стороны, само поджатие ϵ_0 определяется начальным статическим давлением, приложенным к среде, т.е. при одинаковом давлении в соответствии с (12), (13) начальное поджатие будет меньше в многофракционной среде, и, следовательно, параметры нелинейности такой среды увеличатся. В частности, нетрудно показать, что в среде с n фракциями при неизменном давлении квадратичный коэффициент нелинейности $\gamma(\sigma = \text{const}) \sim (\alpha^{-1/2} - 1)^{2/3}(\alpha^{-n/2} - 1)^{-2/3}$, что, например, для пяти фракций дает увеличение нелинейности примерно в 4 раза.

Интересно провести сопоставление полученных для зернистой среды результатов с выводами предыдущего раздела о возможности многократного увеличения нелинейности иерархически устроенной среды. Заметим вначале, что, как показано в [6], однофракционную зернистую среду можно сопоставить модели микронеоднородной среды (2)–(7), где параметры ζ и Q связаны с характеристиками зернистой среды следующим образом: $\zeta = \epsilon_0$, $Q = \epsilon_0^{-3/2}$, так что $\zeta Q = \epsilon_0^{-1/2} \gg 1$. Это означает, что в такой среде оптимальная для возрастания нелинейности концентрация контактов уже превышена, и возрастание коэффициента нелинейности γ определяется, согласно (7), $A(\zeta Q \gg 1) \approx \zeta^{-1} = \epsilon_0^{-1}$, что существенно меньше $A(\zeta_{\text{опт}} \approx Q^{-1}) \sim Q^{-1} \sim \epsilon_0^{-3/2}$.

Таким образом, отличительной особенностью зернистой среды является то, что сами параметры Q и ζ , характеризующие упругие свойства включений и их концентрацию, не являются независимыми, причем произведение ζQ лежит вне области, где может быть достигнуто максимальное возрастание нелинейности. На языке эквивалентных упругих элементов для описанного выше иерархического устройства зернистой среды эти особенности скажутся следующим образом. Из структуры полученных выражений (17)–(19) следует, что многофракционной зернистой среде можно сопоставить систему параллельно соединенных пружин, как это показано на рис. 3. Каж-

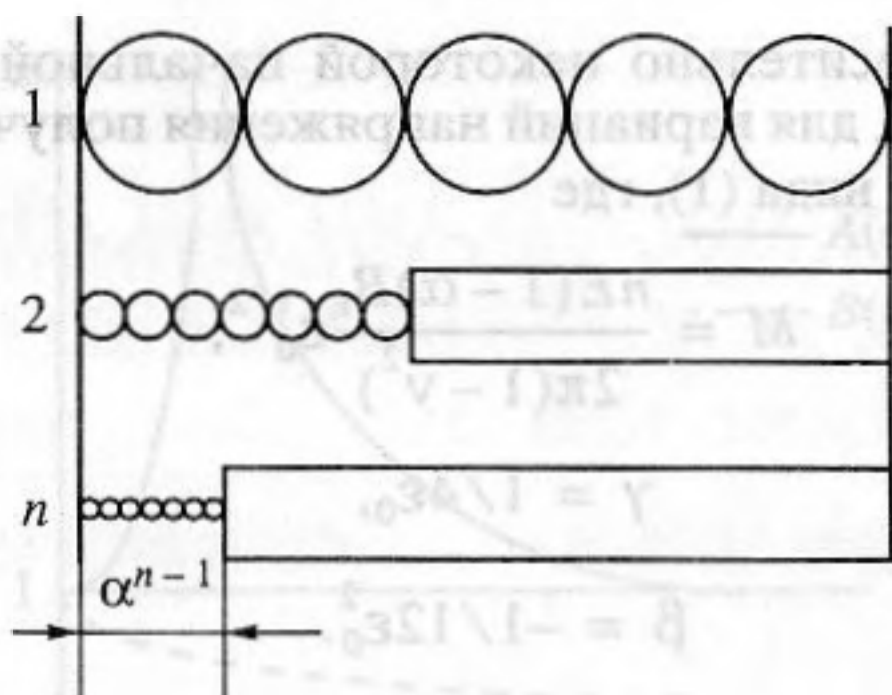


Рис. 3. Структура модельной многофракционной зернистой среды.

дая i -я пружина одинаковой единичной длины $L = 1$ характеризуется наличием мягкого участка (соответствующего мягким межзеренным контактам i -й фракции) и “абсолютно жесткого” участка длиной $(1 - \alpha^n)$ (соответствующего объему зерен всех предыдущих фракций, согласно (11)).

В случае параллельного соединения фракций-пружин абсолютные изменения их длин одинаковы и, соответственно, для i -й фракции

$$(\epsilon_0)_{i+1} = \alpha^{-i} (\epsilon_0)_1, \quad (17)$$

$$(\epsilon)_{i+1} = \alpha^{-i} (\epsilon)_1, \quad (18)$$

где $(\epsilon_0)_1 \equiv \epsilon_0$, $\epsilon_1 \equiv \epsilon$ — соответствуют начальной деформации и ее вариациям для среды в целом. Предположим, что для каждой пружинки на рис. 3 ее сжимаемый участок описывается следующей связью:

$$\sigma = K\epsilon^b, \quad (19)$$

где $K = \text{const}$, а показатель степени в случае контактов герцевского типа $b = 3/2$. Получая из уравнения (19) (аналогично тому, как это делалось для уравнения (12)) выражения для линейного модуля упругости и коэффициента нелинейности с учетом (17), (18), имеем:

$$M = Kb\epsilon_0^{b-1} \alpha^{-bi}, \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{(b-1)\alpha^i}{2\epsilon_0} \equiv \frac{(b-1)}{2\epsilon_0}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что наличие жесткого участка в структуре каждого i -го элемента приводит только к изменению его линейной упругости (в соответствии с (20)) и, в терминах начального поджатия ϵ_0 не сказывается на нелинейных свойствах, даже когда доля мягкого участка мала. Казалось бы, имеется противоречие с выводами первой части работы, где утверждалось, что появление мягкого включения в жесткой среде приведет к существенному возрастанию нелинейности. Напомним, однако, что этот вывод был получен для

независимо задаваемых величин относительной мягкости Q и концентрации ζ дефектов. В рассматриваемой модели упаковки зернистой среды, как отмечалось, эти параметры оказались связанными, причем таким образом, что это привело к независимости нелинейных характеристик от доли мягкого включения. Поскольку отдельные упругие элементы-фракции соединены параллельно, эти же выводы о неизменности нелинейных параметров справедливы и для среды в целом.

Проведенный анализ, с одной стороны, позволяет понять, каким образом должна быть “устроена” многокомпонентная зернистая среда, чтобы в ней мог проявиться рассмотренный в предыдущем разделе структурный механизм возрастания нелинейности. Во-первых, на уровне каждой фракции-пружины, состоящей из примерно одинаково нагруженных зерен одного размера могут встречаться сильно разгруженные контакты, для которых эффективная мягкость и концентрация не связаны ограничением $\zeta Q = \epsilon_0^{-1/2}$. В истинно одномерной среде такие зависшие контакты не могут существовать, но в объеме реальных зернистых сред межзеренные контакты могут находиться в сильно различающихся условиях нагружения (например, из-за несферичности гранул). Такие мягкие включения могут сильно увеличить нелинейность материала [10, 11].

Имеется и другая возможность возрастания нелинейности, более тесно связанная с многофракционностью. Действительно, соотношения (17), (18) для поджатий параллельно соединенных фракций-пружин (рис. 3) были записаны для случая, когда при наложении внешнего воздействия на среду все фракции начинают деформироваться одновременно. Если же некоторые из них начинают деформироваться только при достижении некоторого порогового уровня, то такие разгруженные фракции обладают существенно большей нелинейностью, в соответствии с (15), (16), и, следовательно, резко поднимают нелинейность среды в целом. Такие системы контактов могут реализовываться, например, в реальных неконсолидированных земных породах, состоящих из разноразмерных зерен неправильной формы. Кроме того, важным примером таких систем являются контактирующие шероховатые поверхности, например, поверхности трещин в упругом материале, часто имеющие фрактальную структуру [12].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, проведенное рассмотрение показывает, что для высокой нелинейности микронеоднородной среды принципиально необходимо наличие малого количества мягкой компоненты. На одном

структурном уровне такой неоднородности это может привести к возрастанию квадратичного нелинейного параметра $\Gamma^{(2)}$ примерно в $Q/4 \gg 1$ раз, где Q – показатель относительной мягкости включений. При иерархической структуре мягких элементов, в принципе, рассмотренный механизм может вести к росту нелинейности среды в геометрической прогрессии. Однако для реальных физических сред полный диапазон изменения упругости компонент ограничен, в связи с чем результирующее максимальное возрастание коэффициента нелинейности по сравнению с однородной средой также реально ограничено 3–4 порядками.

Понимание этих общих особенностей и ограничений структурного механизма роста нелинейности может облегчить построение физических моделей нелинейности конкретных микро неоднородных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 94-02 03508, 96-05-64459).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
2. Johnson P., Rasolofosaon P.N. Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // Nonlinear Processes in Geophysics. 1996. V. 32. P. 77–88.

3. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
4. Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Островский Л.А. Нелинейные акустоупругие свойства зернистых сред // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 25–32.
5. Сутин А.М., Назаров В.Е. Нелинейные акустические методы диагностики трещин // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 3–4. С. 169–187.
6. Zaitsev V.Yu. A model of anomalous acoustic nonlinearity of microinhomogeneous media // Acoustic Letters. 1996. V. 19. № 9. P. 186–201.
7. Zaitsev V.Yu. On the origin of anomalous elastic nonlinear properties of microinhomogeneous media // Preprint IAP RAS. № 398. Nizhny Novgorod, 1996.
8. Николаев А.В. Проблемы нелинейной сейсмологии // Проблемы нелинейной сейсмологии / Под ред. Николаева А.В., Галкина И.Н. М.: Наука, 1987.
9. Беляева И.Ю., Тиманин Е.М. Экспериментальное исследование нелинейных свойств поросодержащих упругих сред // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 1026–1028.
10. Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Тиманин Е.М. Экспериментальное исследование упругих нелинейных свойств зернистых сред с неидеальной упаковкой // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 893–899.
11. Зайцев В.Ю. Численное моделирование упругих нелинейных свойств зернистой среды с неидеальной упаковкой // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 439–445.
12. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San-Francisco, 1983.

Nonlinear Elastic Properties of Microinhomogeneous Hierarchically Structured Media

I. Yu. Belyaeva and V. Yu. Zaitsev

The paper examines the manner in which the internal structure of a medium can affect its nonlinear elastic properties. It is shown that for the elasticity of a microinhomogeneous medium to possess a high level of nonlinearity, there must be a small proportion of a soft component present in the material. The way that the hierarchical structure of the rigid and soft elements can influence the parameters of the medium is investigated. It is demonstrated that if the rigid elements are arranged in a hierarchical structure, the internal levels present in the structure will not tell on the further increase in the nonlinearity of the medium. On the contrary, if the soft elements are arranged in a hierarchical structure, then the nonlinearity of the medium can increase in a geometric progression. In real physical media, however, the range of variations in the elasticity of the components is limited to 3 or 4 orders of magnitude. Therefore, the ultimate increase in the nonlinearity coefficient compared to a homogeneous medium is likewise limited to the range stated.