КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.284:519.8

КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ КОНСТРУКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА АКУСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е. Л. Гусев

Институт физико-технических проблем Севера ЯНЦ СО РАН
677007 г. Якутск, ул. Октябрьская, 1

Поступила в редакцию 08.11.95 г.

В последние десятилетия значительное внимание уделяется вопросам оптимального проектирования неоднородных структур [1–11]. При исследовании волновых процессов в неоднородных структурах центральной проблемой является проблема конструирования неоднородной структуры с требуемыми свойствами. Данная проблема заключается в таком выборе структуры неоднородной среды, при котором ее энергетические характеристики будут наиболее близки к заданным зависимостям. Для исследования потенциальных возможностей неоднородных структур по управлению параметрами акустического поля необходимо рассматривать в качестве варьируемых совокупность всех переменных, определяющих структуру конструкции, а именно: физические свойства материалов слоев, толщины слоев, число слоев, а также общую толщину системы слоев. Включение в число варьируемых лишь части параметров, определяющих структуру акустической системы, например, толщин слоев, позволяет свести задачу синтеза к задаче нелинейного программирования. Вследствие существенной многоэкстремальности волновых задач синтеза исследование предельных возможностей неоднородных структур по управлению параметрами волнового поля представляет значительные сложности даже в упрощенной постановке, когда в число варьируемых включена лишь часть параметров, определяющих структуру конструкции. Включение же в число варьируемых всей совокупности параметров, определяющих структуру конструкции, приводит к качественному усложнению рассматриваемых задач синтеза.

Применение для исследуемых задач синтеза методов нелинейного программирования, принципа максимума Л.С. Понтрягина [2, 6–11], вследствие существенной многоэкстремальности позволяет находить лишь локально-оптимальные решения. В ряде случаев нахождение более эффективных решений может быть достигнуто на основе применения методов случайного поиска [5]. Но тем не менее применение методов случайного поиска не гарантирует нахождение глобально-оптимальных решений.

В данной статье исследуются качественные закономерности взаимосвязи структуры оптимальных конструкций и свойств исходного набора материалов. Знание таких закономерностей позволяет существенно уменьшить множество допустимых вариантов, анализируемых на оптимальность.

Будем рассматривать случай наклонного падения плоской немонохроматической акустической волны на многослойную плоскую структуру, состоящую из слоев с различными физическими свойствами. Ось z направлена внутрь конструкции перпендикулярно поверхности. Плоскость xy совмещена с наружной поверхностью конструкции. Плоскость падения совпадает с плоскостью xz. Ограничимся рассмотрением только таких дискретных наборов материалов, в которых сдвиговые волны не возбуждаются. В этом случае распространение плоских акустических волн в слоистой среде может быть описано следующей краевой задачей:

$$\dot{f}(z) = \rho(z)g(z),$$
$$\dot{g}(z) = -\omega^2\mu[\rho(z)]f(z), \quad 0 \le z \le l,$$
$$g(0) = \frac{ik_{н}(\omega)\cos\vartheta_0}{\rho_{н}}(2 - f(0)), \qquad (1)$$
$$g(l) = \frac{ik_{в}(\omega)\cos\vartheta_{в}}{\rho_{в}}f(l).$$

Здесь $f(z)(0 \le z \le l)$ – комплексная амплитуда акустической волны, $\rho(z)(0 \le z \le l)$ – распределение плотности по толщине конструкции, $k_{н}(\omega) = \omega/c_{н}$, $k_{в}(\omega) = \omega/c_{в}$, $\rho_{н}$, $c_{н}$ – плотность и скорость распространения волны в полупространстве, откуда приходит волна; $\rho_{в}$, $c_{в}$ – плотность и скорость распространения волны в полупространстве, в которое переходит волна при выходе из конструкции, $\vartheta_{в}$ – угол, под которым волна выходит из конструкции, $\mu(z) = (c^{-2}(z) - c_{н}^{-2}\sin^2\vartheta_0)/\rho(z)$, $c(z)(0 \le z \le l)$ распределение скорости акустической волны в конструкции. Физические параметры слоистой структуры связаны между собой функциональной зависимостью $c = c(\rho)$, позволяющей однозначно восстановить скорость акустической волны в материале по его плотности. Пусть задан дискретный набор материалов Λ. Для каждого $z \in [0, l]$ выполнено включение:

$$\rho(z) \in \Lambda. \quad (2)$$

Энергетический коэффициент пропускания акустической волны определяется выражением:

$$T = \frac{c_н \rho_н \cos\vartheta_в}{c_в \rho_в \cos\vartheta_0} |f(l)|^2.$$

Требуется спроектировать слоистую структуру, обладающую высоким отражением акустических волн в одних участках спектра и низким – в других, т.е. необходимо так подобрать физические свойства материалов слоев, толщины слоев, число слоев, а также общую толщину системы слоев из заданного диапазона толщин $[l_{\min}, l_{\max}]$, чтобы функционал качества

$$J = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega)|f(l, \omega)|^2 d\omega \quad (3)$$

принял наименьшее значение. Здесь $\tau(\omega)(-1 \le \le \tau(\omega) \le 1)$ – весовая функция. Функция Гамильтона для рассматриваемой задачи оптимального управления имеет вид:

$$H(f(z), \dot{f}(z), \psi(z), \dot{\psi}(z); \rho) = \mu(\rho)A(z) + \rho B(z), \quad 0 \le z \le l. \quad (4)$$

В этих обозначениях $\psi(z)(0 \le z \le 1)$ есть решение сопряженной краевой задачи:

$$A(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \alpha(z, \omega) d\omega, \quad B(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \beta(z, \omega) d\omega,$$

$$\alpha(z, \omega) = -\frac{1}{\mu(z)} \mathrm{Re}(\dot{\psi}(z, \omega) f(z, \omega)), \quad (5)$$

$$\beta(z, \omega) = \frac{1}{\rho(z)} \mathrm{Re}(\dot{f}(z, \omega)\psi(z, \omega)).$$

Обозначим

$$\bar{\rho} = \arg\max_{\rho \in \Lambda} \frac{\mu(\rho)}{\rho}, \quad \bar{\bar{\rho}} = \arg\min_{\rho \in \Lambda} \frac{\mu(\rho)}{\rho}. \quad (6)$$

($\bar{x} = \arg\max(\min) A(x)$, если $A(\bar{x}) = \max(\min) A(x)$).

Тогда качественный анализ необходимых условий оптимальности позволяет установить следующее.

Свойство 1. В случае, когда оптимальная толщина $l^* \in (l_{\min}, l_{\max})$, оптимальная акустическая система может состоять не более чем из двух материалов допустимого набора Λ с плотностями $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$ (6).

В случае нормального падения акустической волны на многослойную структуру ($\vartheta_0 = 0$)

$$\bar{\rho} = \arg\min_{\rho \in \Lambda} Z(\rho), \quad \bar{\bar{\rho}} = \arg\max_{\rho \in \Lambda} Z(\rho), \quad (7)$$

где $Z(\rho) = \rho c(\rho)$ – волновое сопротивление.

Рассмотрим вопрос о возможных расширениях исходного набора физических свойств материалов Λ, которые не приводят к нарушению оптимальности конструкции. Пусть областью управления для физических свойств материалов допустимого набора является прямоугольник

$$D_0 = \{(\rho, c)\colon \rho_{\min} \le \rho \le \rho_{\max}, c_{\min} \le c \le c_{\max}\}. \quad (8)$$

В этом случае физические свойства материалов допустимого набора считаются независимыми.

Анализ структуры функций Гамильтона (4) и необходимых условий оптимальности позволяет установить следующее

Свойство 2. Если оптимальная толщина $l^* \in \in (l_{\min}, l_{\max})$, то оптимальная конструкция состоит из двух материалов с физическими свойствами $(\rho_{\min}, c_{\min})$ и $(\rho_{\max}, c_{\max})$.

Пусть задан некоторый конечный набор материалов Λ. Физические свойства материалов допустимого набора по-прежнему считаем зависимыми, т.е. на множестве Λ задана зависимость $c = c(\rho)$.

Свойство 3. Путь на исходном наборе материалов Λ выполнено условие

$$\min_{\rho \in \Lambda} c(\rho) = c(\rho_{\min}), \quad \max_{\rho \in \Lambda} = c(\rho_{\max}). \quad (9)$$

Если оптимальная толщина $l^* \in (l_{\min}, l_{\max})$, то оптимальная конструкция будет состоять из двух материалов с физическими свойствами $(\rho_{\min}, c_{\min})$ и $(\rho_{\max}, c_{\max})$ не только для исходного набора Λ, но и при расширении его до прямоугольника D_0 (8), когда физические свойства материалов будут независимы. При таком расширении допустимого набора материалов оптимальность конструкции не нарушается.

Таким образом, если физические свойства материалов допустимого набора удовлетворяют экстремальным соотношениям (9), то оптимальность конструкции, состоящей из двух материалов допустимого набора сохраняется при достаточно значительном расширении физических свойств материалов допустимого набора.

Данные результаты позволяют сделать вывод о том, что при конструировании эффективных преобразователей волновой энергии существенную роль играют материалы с максимально различающимися волновыми сопротивлениями.

Свойство 4. Физические свойства материалов слоев оптимальной акустической системы являются элементами множества:

$$D = \left\{\rho^*\colon \rho^* = \arg\max_{\rho \in \Lambda} \left(\frac{\mu(\rho)}{\rho}\alpha + \rho\beta\right), |\alpha| + |\beta| = 1\right\}.$$

Справедливость данного свойства непосредственно следует из структурных особенностей функции Гамильтона (4) и необходимых условий оптимальности.

Введем функцию $\varphi(\rho, \tau) = \dfrac{\mu(\rho)}{\rho} + \tau\rho$, где τ – вещественный параметр ($-\infty < \tau < \infty$). Обозначим

$$\rho^{+}(\tau) = \arg\max_{\rho \in \Lambda} \varphi(\rho, \tau),$$

$$\rho^{-}(\tau) = \arg\min_{\rho \in \Lambda} \varphi(\rho, \tau),$$

$\rho^{+}(\tau)$ – монотонно возрастающая, а $\rho^{-}(\tau)$ – монотонно убывающая функция аргумента τ. В силу дискретности множества Λ функции $\rho^{+}(\tau)$, $\rho^{-}(\tau)$ кусочно-постоянны. В оптимальную акустическую систему могут входить только те материалы, физические свойства которых принадлежат областям значений этих функций. Поэтому анализ функций $\rho^{+}(\tau)$, $\rho^{-}(\tau)$ дает существенную информацию о структуре оптимальной конструкции.

Конструктивный анализ необходимых условий оптимальности и свойств краевой задачи (1) позволяет установить следующее.

Свойство 5. Число различных материалов, составляющих оптимальную акустическую систему, не может превосходить $p + q$, где p и q – число точек разрыва функций $\rho^{+}(\tau)$ и $\rho^{-}(\tau)$ соответственно.

Введем функцию:

$$L(\alpha, \beta) = \frac{\mu(\beta) - \mu(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \alpha, \beta \in \Lambda.$$

Через m обозначим число материалов допустимого набора. Материалы, входящие в множество Λ, будем считать упорядоченными в порядке возрастания их плотностей:

$$\Lambda = \{\rho_{\min} = \rho^{1} < \rho^{2} < \ldots < \rho^{m} = \rho_{\max}\}.$$

Свойство 6. Физические свойства материалов, входящих в состав оптимальной акустической системы, удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$L(\rho^{j^{+}_{r-1}}, \rho^{j^{+}_{r}}) = \min_{\rho^{j^{+}_{r-1}} < \rho < \rho_{\max}} L(\rho^{j^{+}_{r-1}}, \rho), \tag{10}$$

$$(r = \overline{1, p};\ j^{+}_{0} = 1,\ j^{+}_{p} = m),$$

$$L(\rho^{j^{-}_{r-1}}, \rho^{j^{-}_{r}}) = \max_{\rho^{j^{-}_{r-1}} < \rho \le \rho_{\max}} L(\rho^{j^{-}_{r-1}}, \rho), \tag{11}$$

$$(r = \overline{1, q};\ j^{-}_{0} = 1,\ j^{-}_{q} = m).$$

Введем множества:

$$\Lambda^{+} = \left\{\rho^{j^{+}_{0}}, \rho^{j^{+}_{1}}, \ldots, \rho^{j^{+}_{p}}\right\},$$

$$\Lambda^{-} = \left\{\rho^{j^{-}_{0}}, \rho^{j^{-}_{1}}, \ldots, \rho^{j^{-}_{q}}\right\}, \tag{12}$$

$$\Lambda^{*} = \Lambda^{+} \cup \Lambda^{-}.$$

Выполняются условия

$$\rho_{\min} = \rho^{j^{+}_{0}} < \rho^{j^{+}_{1}} < \ldots < \rho^{j^{+}_{p}} = \rho_{\max},$$

$$\rho_{\min} = \rho^{j^{-}_{0}} < \rho^{j^{-}_{1}} < \ldots < \rho^{j^{-}_{q}} = \rho_{\max}.$$

Свойство 7. Физические параметры материалов, входящих в состав оптимальной акустической системы, могут быть только элементами множества Λ^{*} (12).

Система рекуррентных соотношений (10), (11) позволяет осуществлять эффективное сжатие исходного множества допустимых материалов Λ. При этом открываются новые возможности для прогнозирования физических свойств материалов, включение которых в исходный набор приводит к значительному улучшению функциональных характеристик проектируемых слоистых структур.

Свойство 8. Физические параметры материалов соседних слоев оптимальной акустической системы являются соседними в последовательности:

$$\ldots, \rho^{j^{+}_{0}}, \rho^{j^{+}_{1}}, \ldots, \rho^{j^{+}_{p}}, \rho^{j^{-}_{q}}, \rho^{j^{-}_{q-1}}, \ldots, \rho^{j^{-}_{0}}, \rho^{j^{+}_{0}}, \rho^{j^{+}_{1}}, \ldots. \tag{13}$$

Данное свойство устанавливает характер сочленения материалов слоев с различными физическими свойствами на оптимальном решении. Слоистые структуры, для которых порядок чередования материалов слоев отличен от (13), не оптимальны, а, следовательно, могут быть улучшены.

Установленные закономерности структуры оптимальных акустических систем позволяют значительно сократить количество допустимых вариантов многослойных конструкций, анализируемых на оптимальность. Знание таких закономерностей позволяет повысить эффективность различных методов поиска оптимального решения и расширить пределы применимости различных подходов.

Для случая монохроматического акустического воздействия могут быть установлены дополнительные качественные закономерности структуры оптимальной конструкции.

Свойство 9. В случае монохроматического акустического воздействия на слоистую структуру оптимальная конструкция может состоять не более чем из двух материалов независимо от количества материалов, составляющих дискретный набор. При этом в состав оптимальной конструкции входят материалы, плотности которых являются соседними в последовательности (13).

Согласно установленным свойствам, при проектировании оптимальных акустических систем из дискретного набора материалов при определенных условия оптимальная конструкция должна состоять не более чем из двух материалов допустимого набора и выделены данные условия. При этом в ряде случаев установлено какими именно должны быть данные материалы (свойства 1–3). При этом оказывается, что существенную роль при проектировании оптимальных акустических систем играют материалы с максимально различающимися волновыми сопротивлениями, т.е. слоистая структура должна состоять из последовательно чередующихся слоев с максимально различающимися волновыми сопротивлениями для того, чтобы интерференция акустических волн являлась существенным фактором в управления энергетическим спектром акустических волн.

В общем случае оптимальная акустическая система может состоять из нескольких материалов дискретного набора, при этом оказывается, что материалы допустимого набора, входящие в оптимальную акустическую систему, могут быть выделены априори (свойство 7). Структура оптимальной акустической системы, характеризуемая характером сочленения слоев с различными физическими свойствами, оказывается также может быть установлена заранее (свойство 8).

Установленные качественные закономерности, характеризующие структуру оптимальных акустических систем и позволяющие априори существенно уменьшить количество допустимых вариантов, анализируемых на оптимальность, могут быть чрезвычайно полезными при решении широкого круга проблем, связанных с разработкой акустических систем, со свойствами, предельно достижимыми к требуемым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Han-Pin K., Ravi D.* Composite sandwich panel design // Aerosp. Eng. 1995. V. 15. № 4. P. 33–37.
2. *Кусяков А.Ш.* Многослойные композиционные оболочки минимального веса. Пермь, ПГУ, 1995. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 13.12.95 № 3290-В95.
3. *Sotrikhin S.Y., Shupikov A.N.* Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads // Int. J. Solids. and Struct. 1995. V. 32. № 8–9. P. 1247–1258.
4. *Huang C., Kroplin B.* On the optimization of composite laminated plates // Eng. Comput. 1995. V. 12. № 5. P. 403–414.
5. *Ichiro N., Akio N.* Review of optimum design in dynamics // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. 1995. V. 61. № 587. P. 2645–2652.
6. *Лурье К.А., Мачевариани М.М.* Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном коэффициенте отражения монохроматической волны // ПМТФ. 1969. № 1. С. 44–50.
7. *Дорот И.Л., Мачевариани М.М.* Аппроксимация распределения показателя преломления в неоднородном слое, близком к оптимальному в заданной полосе частот // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 576–583.
8. *Диденко Н.И., Мачевариани М.М.* Минимизация толщины неоднородного согласующего слоя при заданном модуле коэффициента отражения монохроматической волны // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 1. С. 104–109.
9. *Мачевариани М.М., Миронова В.Д.* Минимизация толщины неоднородного поглощающего слоя при заданном модуле коэффициента отражения монохроматической волны // ПМТФ. 1973. № 1. С. 146–161.
10. *Мачевариани М.М., Миронова В.Д.* Оптимальное распределение показателя преломления в неоднородном слое, обеспечивающее заданную звукоизоляцию монохроматической волны // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 4. С. 583–590.
11. *Sharnhorst K.P.* Optimal distribution of density and dilatation modulus in inhomogeneous layers // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. № 3. P. 1526–1535.