

УДК 534.222

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 1998 г. В. Ю. Зайцев, В. Е. Назаров

Институт прикладной физики РАН
603600 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46

Поступила в редакцию 05.07.96 г.

В работе рассматривается реологическая модель среды, обладающей нелинейной диссипацией, а именно, одномерная цепочка масс, взаимодействующих через линейные упругие и нелинейные неупругие элементы. В рамках модели получено нелинейное волновое уравнение и исследованы эффекты распространения и взаимодействия упругих волн: самовоздействие непрерывных гармонических и импульсных волн, генерация высших гармоник, влияние сильной волны на затухание слабых волн других частот.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в акустике интенсивно развивается направление, связанное с изучением нелинейных эффектов в так называемых структурно-неоднородных средах, характеризующихся, как правило, сильной (по сравнению с однородными материалами) акустической нелинейностью [1, 2]. Экспериментальные данные свидетельствуют, что нелинейность таких сред часто носит не столько реактивный (упругий), сколько диссипативный (неупругий) характер [3–6]. Теоретическое описание наблюдаемых эффектов в таких средах возможно, по-видимому, только в рамках феноменологических уравнений состояния, поскольку микроскопической теории трения твердых тел не существует.

В данной работе на основе феноменологических зависимостей нелинейного трения контактирующих твердых тел получено волновое уравнение с диссипативной нелинейностью и проведен анализ нелинейных эффектов при распространении и взаимодействии акустических волн.

2. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

При построении реологической модели среды с нелинейной диссипацией рассмотрим одномерную цепочку масс M и упругих элементов, параллельно которым добавим диссипативные элементы (рис. 1). Отдельным звеньям такой цепочки могут быть сопоставлены некоторые структурные блоки среды, например, гранулы, кристаллиты в поликристаллах, шероховатые поверхности трещин или контактирующих зерен.

Запишем уравнение движения для n -го элемента цепочки, смещение которого от положения равновесия обозначим $U(n)$. При описании сил, действующих на n -й элемент со стороны соседних,

ограничимся линейным приближением для упругой силы $F_1(n)$ и будем учитывать только нелинейность силы трения $F_2(n)$:

$$Md^2U(n)/dt^2 = F_1(n) + F_2(n), \quad (1)$$

$|U(n)| \ll a$, a – размер элемента цепочки.

Для упругой силы имеем известное выражение [7]:

$$F_1(n) = -\kappa[U(n) - U(n-1)] + \kappa[U(n+1) - U(n)], \quad (2)$$

где коэффициент κ характеризует упругость элемента цепочки.

Относительно диссипативной силы $F_{\text{dis}}(n)$, действующей между двумя соседними элементами цепочки, будем считать, что она является функцией (в общем случае нелинейной), зависящей от относительной скорости движения этих элементов $\Delta \dot{U}_{n+1,n} = \dot{U}(n+1) - \dot{U}(n)$. Для макроскопических элементов среды будем использовать известные аппроксимации зависимости $F_{\text{dis}}(\Delta \dot{U})$ [31], определяемые экспериментально. Тогда линейная составляющая силы трения $F_2^{\text{lin}} = F_{\text{dis}}^{\text{lin}}(\Delta \dot{U}_{n+1,n}) -$

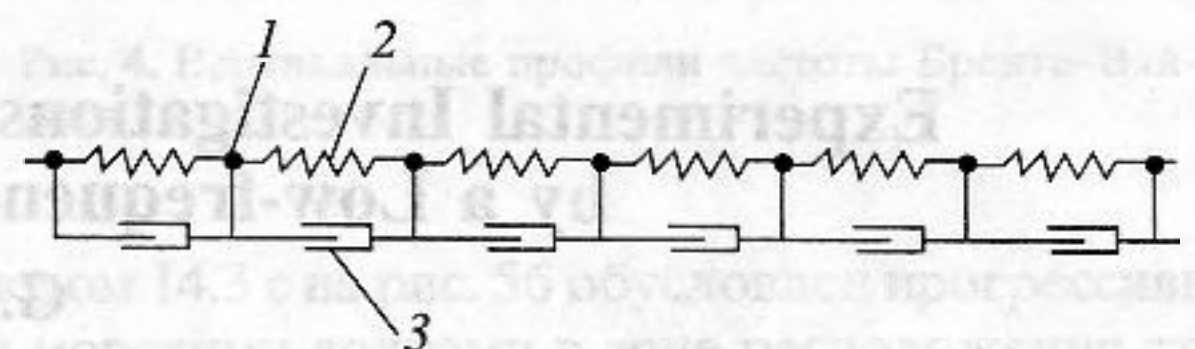


Рис. 1. Реологическая модель среды с нелинейной диссипацией: 1 – масса, 2 – упругий элемент, 3 – диссипативный элемент.

– $F_{\text{dis}}^{\text{lin}}(\Delta \dot{U}_{n,n-1})$, действующая на n -й элемент со стороны двух соседних, будет равна:

$$F_2^{\text{lin}}(n) = g\Delta \dot{U}_{n+1,n} - g\Delta \dot{U}_{n,n-1}, \quad g = \text{const.} \quad (3)$$

Нелинейную составляющую силы трения $F_{\text{dis}}^{\text{nl}}(\Delta \dot{U})$, также действующую против относительной скорости $\Delta \dot{U}(n)$, запишем в виде:

$$F_{\text{dis}}^{\text{nl}} = -\Phi(\Delta \dot{U}) \text{sign}(\Delta \dot{U}), \quad (4)$$

где $\Phi(\Delta \dot{U})$ – некоторая четная положительно-определенная функция.

Переходя в уравнениях (1)–(4) от дискретного номера n элемента цепочки к непрерывной координате $x = na$, в длинноволновом приближении получим:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = \alpha U_{xxt} + [\Phi(U_{xt}) \text{sign}(U_{xt})]_x, \quad (5)$$

где $c^2 = ka^2/M$, $\alpha = ga^2/M$. (Здесь для упрощения записи нормировка на массу M введена в функциональную зависимость $\Phi(U_{xt})$.)

Аналогичное уравнение было получено в работе [9], где сразу предполагалось, что напряжение σ в среде является суммой упругого σ_1 и неупругого σ_2 напряжений: $\sigma_1 = E\epsilon$ (E – модуль упругости, $\epsilon \equiv U_x$ – деформация), а вязкое напряжение σ_2 , кроме линейной компоненты, зависящей от скорости деформации $\dot{\epsilon} \equiv U_{xt}$, содержит и нелинейную, также зависящую от $\dot{\epsilon}$. В этой работе для нелинейного неупругого напряжения была выбрана степенная аппроксимация [8], которая, по-видимому, является достаточно общей:

$$\Phi(U_{xt}) = \gamma |U_{xt}|^m, \quad (6)$$

где γ и m – постоянные коэффициенты, причем размерность γ зависит от показателя степени m : $[\gamma] = \text{см}^2/\text{с}^{2-m}$.

При $m > 1$ эффективная вязкость среды растет с ростом скорости деформации, а при $m < 1$ – падает. Значение $m = 0$ соответствует случаю “сухого” (кулоновского) трения [8]. Распространение упругих волн в среде с $m = 0$ исследовалось также в работах [10, 11].

Отметим, что при $m < 0$ выражение (6), вообще говоря, не пригодно для описания нелинейного вязкого напряжения вблизи точки $\dot{\epsilon} \equiv U_{xt} = 0$, т.е. $\Phi(U_{xt} = 0) \rightarrow \infty$. Поэтому при $m < 0$, начиная с некоторой амплитуды скорости деформации $|\dot{\epsilon}| \leq \dot{\epsilon}_{\text{th}}$, нелинейное напряжение нужно ограничить, например, введением небольшого участка “сухого” трения:

$$\Phi(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} \Phi_0, & \text{при } |\dot{\epsilon}| < \dot{\epsilon}_{\text{th}}, \\ \gamma |\dot{\epsilon}|^m, & \text{при } |\dot{\epsilon}| \geq \dot{\epsilon}_{\text{th}}, \end{cases} \quad (7)$$

где константа Φ_0 определяется из условия непрерывности функции $\Phi(\dot{\epsilon})$ в точках $\dot{\epsilon} = \pm \dot{\epsilon}_{\text{th}}$: $\Phi_0 = \gamma \dot{\epsilon}_{\text{th}}^m$.

В случае гармонической зависимости $\epsilon = \epsilon_0 \cos \theta$, $\theta = \Omega t$, удобно ввести пороговую фазу (или угол отсечки) θ_{th} , определяемую из выражения $\dot{\epsilon}_{\text{th}} = \Omega \epsilon_0 \sin \theta_{\text{th}}$, или $\sin \theta_{\text{th}} = \epsilon_{\text{th}}/\epsilon_0$, где $\dot{\epsilon}_{\text{th}} = \Omega \epsilon_{\text{th}}$.

3. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ И ГЕНЕРАЦИЯ ЕЕ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

Эффекты самовоздействия гармонической волны и генерации ее высших гармоник в диссипативно-нелинейных средах, как будет показано ниже, имеют существенные отличия от обычно рассматриваемого случая реактивной квадратичной нелинейности [7].

Граничное условие для (5) зададим в следующем виде:

$$U(x=0, t) = U_0 \sin \Omega t. \quad (8)$$

Далее удобно от (5) перейти к уравнению:

$$U_x = (\alpha/2c^3) U_{\tau\tau} + (1/2c^2) (\Phi(U_{\tau\tau}/c) \text{sign}(U_{\tau\tau}/c)), \quad (9)$$

где введены “бегущая” и “медленная” переменные $\tau = (t - x/c)$ и $x' = x$. Решение уравнения (9) с граничным условием (8) ищем в виде:

$$U = U^{(1)} + \Delta U, \quad \epsilon = \epsilon^{(1)} + \Delta \epsilon, \quad (10)$$

$$U^{(1)} \equiv U^{(1)}(x) \sin \theta, \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}^{(1)} \equiv \Omega \epsilon_1(x) \sin \theta = \dot{\epsilon}_1(x) \sin \theta,$$

$$\Delta U \equiv \sum_{n=3} U^{(n)}(x) \sin(n\theta), \quad (12)$$

$$\Delta \dot{\epsilon} \equiv \Omega \sum_{n=3} n \epsilon_n(x) \sin(n\theta),$$

где $U^{(1)}$ – поле волны основной частоты, ΔU – малая поправка, связанная с искомым полем высших нечетных гармоник ($|\Delta \dot{\epsilon}| \ll |\dot{\epsilon}^{(1)}|$), $n = 3, 5, \dots$ – номер нечетной гармоники, $\theta = \Omega \tau$.

Поиск решения в виде (11), (12), не учитывающем нелинейные искажения фазы, оправдан тем, что диссипация не приводит к зависимости скорости распространения волны от ее амплитуды. Подставляя в уравнение (9) выражения (10)–(12) и выделяя в нелинейном слагаемом $F(U_{\tau\tau}) = \Phi(U_{\tau\tau}/c) \text{sign}(U_{\tau\tau})$ соответствующие Фурье-гар-

моники, получим систему связанных уравнений для амплитуд $U^{(i)}$ ($i = 1, 3, 5, \dots$):

$$U_x^{(i)} = -\beta U^{(i)} + \frac{1}{2} c^2 A^{(i)}, \quad (13)$$

где

$$\beta = \alpha \Omega^2 / 2c^3, \quad (14)$$

$$A^{(i)}(x) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F[U_{\tau\tau}(x)] \sin(n\theta) d\theta.$$

Для нахождения коэффициентов $A^{(i)}(x)$ разложим под интегралом (14) нелинейную функцию F в ряд Тейлора:

$$F(U_{\tau\tau}) = F(U_{\tau\tau}^{(1)}) + F'(U_{\tau\tau}^{(1)}) \Delta U_{\tau\tau} + \dots \quad (15)$$

Функции $F(U_{\tau\tau}^{(1)})$ и $F'(U_{\tau\tau}^{(1)})$ в выражении (15) представим в виде суммы Фурье-компонент, в результате чего из (13) получаем систему уравнений для амплитуд волны основной частоты и ее гармоник:

$$U_x^{(1)} = -\beta U^{(1)} - c^{-2} \frac{1}{2} c^2 B^{(1)}(U^{(1)}), \quad (16)$$

$$U_x^{(n)} = -(\Omega^2 n^2 / 2c^3) (\alpha + C^{(0)}(U^{(1)})) U^{(n)} - (1/2c^2) B^{(n)}(U^{(1)}), \quad (17)$$

где

$$B^{(1)}[U^{(1)}(x)] = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F[\Omega \varepsilon_1(x) \sin \theta] \sin \theta d\theta, \quad (18)$$

$$B^{(n)}[U^{(1)}(x)] = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F[\Omega \varepsilon_1(x) \sin \theta] \sin(n\theta) d\theta, \quad (19)$$

$$C^{(0)}[U^{(1)}(x)] = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F'[\Omega \varepsilon_1(x) \sin \theta] d\theta.$$

Кратко остановимся на эффекте самовоздействия, поскольку этот вопрос подробнее обсуждался в работе [9], а также [10, 11]. Согласно аппроксимации (7), с учетом введенных в (10), (12) обозначений, выражение (18) принимает вид:

$$B^{(1)} = \begin{cases} (4/\pi) \gamma (\Omega \varepsilon_{th})^m, & \text{при } \dot{\varepsilon}_1 \leq \dot{\varepsilon}_{th}, \\ (4/\pi) \gamma (\Omega \varepsilon_{th})^m \left[(1 - \cos \theta_{th}) + \left(\frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_{th}^m} \right)^{\pi/2} \int_{\theta_{th}}^{\pi/2} (\sin \theta)^{m+1} d\theta \right], & \text{при } \dot{\varepsilon}_1 > \dot{\varepsilon}_{th}. \end{cases} \quad (20)$$

Отметим, что для $m > -2$ в выражении (21) при стремлении $\dot{\varepsilon}_{th}$ (или угла отсечки θ_{th}) к нулю син-

гулярность не возникает, и потому при $\dot{\varepsilon}_{th} = 0$ выражение (20) и уравнение (16) могут быть приведены к более простой форме, полученной в [9] для случая $m > -2$ на основе аппроксимации диссипативной силы вида (6) без ограничения в нуле.

Для $m \leq -2$ выражение (20) легко анализируется при $\dot{\varepsilon}_1 \leq \dot{\varepsilon}_{th}$, а также при $\dot{\varepsilon}_1 \gg \dot{\varepsilon}_{th}$. В последнем случае при $m = -2$ уравнение (16) может быть приближенно приведено к виду

$$U_x^{(1)} = -\beta U^{(1)} - \delta \ln[2\Omega U^{(1)} / \pi c \varepsilon_{th}] (U^{(1)})^{-2}, \quad \delta = 2\gamma / \pi \Omega^4 c^2,$$

а при $m < -2$ к виду

$$U_x^{(1)} = -\beta U^{(1)} + \delta (U^{(1)})^{-2}, \quad \delta = \gamma m \Omega^{m-2} |\varepsilon_{th}|^{m+2} / \pi (m+2) c^2. \quad (21)$$

Интересно отметить, что амплитудная зависимость нелинейного слагаемого при $m < -2$ "насыщается", так что закон его спада становится универсальным ($\sim (U^{(1)})^{-2}$). Решение уравнений вида (21) имеет форму [12], которая справедлива при любых m :

$$U(x)^{1-m} = U_0^{1-m} \exp[-\beta x(1-m)] - (\delta/\beta) [1 - \exp[-\beta x(1-m)]]. \quad (22)$$

Из (22) следует, что при $m > 1$ волны с большей амплитудой затухают сильнее. (Такой эффект наблюдался в экспериментах с мрамором и гранитом [4, 5].) При $m < 1$ затухание волны уменьшается с ростом ее амплитуды. Такой эффект (самопросветление среды) наблюдался в экспериментах с сухим и сырым речным песком [4, 6].

Перейдем теперь к рассмотрению генерации высших гармоник. Из уравнения (17) следует, что поле исходной волны, во-первых, возбуждает n -ю нечетную гармонику за счет наличия составляющей в спектре вынуждающей силы (коэффициент $B^{(n)}[U^{(1)}(x)]$), и, во-вторых, изменяет коэффициент поглощения слабой волны (коэффициент $C^{(0)}[U^{(1)}(x)]$ в уравнении (17)). В результате, из уравнения (17) получаем выражение для амплитуды n -ой гармоники:

$$U^{(n)}(x) = \frac{1}{2c^2} \left\{ \int_0^x d\zeta B^{(n)}[U^{(1)}(\zeta)] \exp \left[\int_0^\zeta d\xi \Gamma^{(n)}(\xi) \right] \right\} \times \exp \left[- \int_0^x d\xi \Gamma^{(n)}(\xi) \right], \quad (23)$$

где коэффициент поглощения $\Gamma^{(n)}$ этой гармоники имеет вид

$$\Gamma^{(n)}(x) = (\Omega^2 n^2 / 2c^3) [\alpha + C^{(0)}[U^{(1)}(x)]].$$

Достаточно универсальной является асимптотика выражения (23) на начальном этапе генерации, когда можно пренебрегать поглощением в среде как волны основной частоты, так и ее гармоник. В этом приближении уровень n -ой гармоники будет линейно расти с расстоянием: $U^{(n)} \sim \chi B^{(n)} [U^{(1)}(x=0)]$. В случае степенной зависимости нелинейной диссипации при целых положительных и нечетных m в спектре вынуждающей силы будут присутствовать только нечетные гармоники с номерами $3 \leq n \leq m$, а при прочих положительных m возникнут все нечетные гармоники $n \geq 3$, причем $U^{(n)} \sim [U^{(1)}(x=0)]^m$. При отрицательных m из выражения (19) следует, что амплитуда вынуждающей силы уменьшается с ростом уровня волны основной частоты. Это существенно отличает рассматриваемый случай от традиционных задач нелинейной акустики, в которых упругая нелинейность проявляется в большей степени при увеличении амплитуды воздействия. При $-2 < m < 0$ интеграл (19) для вынуждающей силы сходится и имеет следующий вид:

$$B^{(n)} = 2\pi^{-1} \gamma \dot{\epsilon}_1^m \int_0^\pi \sin^m \theta \sin(n\theta) d\theta. \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что при стремлении $\dot{\epsilon}_1$ к нулю вынуждающая сила на частотах высших гармоник становится бесконечно большой. Выше для снятия такой расходимости при $m < -2$ была введена аппроксимация диссипативной силы (7). При малом угле отсечки ($\theta_{th} \ll 1$) ее использование для $m > -2$ дает тот же результат (24), полученный на основе (6), а при $m \leq -2$ нетрудно получить следующие приближенные выражения:

$$B^{(n)} \approx \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \gamma n \Omega^{-2} \epsilon_1^{-2} \left[\frac{1}{2} - \ln \frac{\epsilon_{th}}{\epsilon_1} \right], & m = -2 \\ -\frac{4}{\pi} \gamma n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right] \Omega^m \epsilon_{th}^m \left(\frac{\epsilon_{th}}{\epsilon_1} \right)^2, & m < -2. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом при большой амплитуде ($\dot{\epsilon}_1 \gg \dot{\epsilon}_{th}$) выражение (25) также демонстрирует уменьшение вынуждающей нелинейной силы с увеличением $\dot{\epsilon}_1$, хотя при $m < -2$ степень этого уменьшения "насыщается" ($B^{(n)} \sim \epsilon_1^{-2}$).

При малых амплитудах ($\dot{\epsilon}_1 \leq \dot{\epsilon}_{th}$) из (7) и (19) следует:

$$B^{(n)} = -4\Phi_0 / \pi n \equiv -4\gamma \Omega^m \epsilon_{th}^m / \pi,$$

так что вынуждающая сила не зависит от ϵ_1 и остается конечной при сколь угодно малой амплитуде исходной волны. Это означает, что аппроксимация (7) для определения нелинейной силы при малых (допороговых) значениях $\dot{\epsilon}_1$, меньших

$\dot{\epsilon}_{th}$, является, по-видимому, слишком грубой. Ее можно уточнить, положив, например:

$$\Phi(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} (\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_{th})^s \Phi_0, & \text{при } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{th}, \\ \gamma \dot{\epsilon}^m, & \text{при } \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_{th}, \end{cases} \quad (26)$$

где $s > 0$. При $s \rightarrow 0$ выражение (26) переходит в (7). В этом случае при малых амплитудах ($\dot{\epsilon}_1 \leq \dot{\epsilon}_{th}$) из выражения (19) следует:

$$B^{(n)} = \gamma \Omega^m \epsilon_{th}^m \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{th}} \right)^s A^{(n)},$$

$$A^{(n)} = \frac{(2/\pi) \sin(\pi n/2) \Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s+n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{s-n}{2} + 1\right)}.$$

Таким образом, в случае наличия падающего участка в функции $\Phi(\dot{\epsilon})$ амплитуда высших гармоник $U^{(n)}$ при малых амплитудах ($\dot{\epsilon}_1 < \dot{\epsilon}_{th}$) с ростом $\dot{\epsilon}_1$ сначала круто нарастает, далее при $\dot{\epsilon}_1 \sim \dot{\epsilon}_{th}$ достигает максимума, а затем при $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_{th}$ начинает плавно спадать.

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ СЛАБОЙ ВОЛНЫ В ПОЛЕ МОЩНОЙ ВОЛНЫ НАКАЧКИ

Рассмотрим теперь влияние сильной гармонической волны накачки $U_1(x, t) = U_1(x) \sin(\Omega t \pm Kx)$ с частотой Ω на затухание другой – слабой волны $U_2(x, t) = U_2(x) \sin(\omega t - kx)$ с несоизмеримой частотой ω ($\omega/\Omega \neq p/q$, где p и q – целые числа). В этом случае из (5) получаем уравнение для амплитуды U_2 слабой волны:

$$U_{2x} = -(\beta + \beta_{nl}(\dot{\epsilon}_1)) U_2, \quad (27)$$

где $\beta = \alpha \omega^2 / 2c^3$, $\beta_{nl}(\dot{\epsilon}_1) = (\omega^2 / 2c^3) C^{(0)}(\dot{\epsilon}_1)$,

$$C^{(0)}(\dot{\epsilon}_1) = (2/\pi) \int_0^{\pi/2} F'[\Omega \epsilon_1(x) \sin \theta] d\theta, \quad (28)$$

$$\theta = \Omega t \pm Kx$$

Появление слагаемого $\beta_{nl}(\dot{\epsilon}_1) U_2$ в уравнении (28) означает, что под действием сильной волны U_1 изменяется диссипация слабой волны U_2 , причем направление распространения этих волн (попутное или встречное) не играет роли. Рассмотрим случаи различных знаков показателя m в степенной аппроксимации диссипативной функции. В соответствии с (28), (6) для нелинейного коэффициента диссипации при $m \geq 0$ получаем:

$$\beta_{nl}(\dot{\epsilon}_1) = \frac{m \omega^2 \Gamma(m/2)}{4\pi^{1/2} c^3 \Gamma(m/2 + 1/2)} \dot{\epsilon}_1^{m-1}. \quad (29)$$

В частности,

$$\beta_{nl}(\dot{\epsilon}_1) = \begin{cases} 3\omega^2 \dot{\epsilon}_1^2 / 8c^3, & \text{при } m = 3, \\ \pi^{-1/2} \omega^2 \dot{\epsilon}_1 / c^3, & \text{при } m = 2. \end{cases} \quad (30)$$

Из (29) видно, что при положительных m коэффициент β_{nl} также положителен, то есть волна накачки увеличивает затухание слабой волны. Этот эффект наблюдался в некоторых металлах и горных породах [3, 5].

В случае падающего участка в зависимости F_{dis}^{nl} от ϵ коэффициент β_{nl} может быть отрицательным, что может привести к диссипативной неустойчивости слабой волны в поле сильной. Действительно, для коэффициента β_{nl} при $m \leq 0$ и выборе степенной аппроксимации диссипативной силы с ограничением в нуле (7) получаем, что в случае превышения $\dot{\epsilon}_1$ над пороговым значением $\dot{\epsilon}_{th}$ выражение для $C^{(0)}$ можно привести к следующему виду:

$$C^{(0)} = 2\pi^{-1} \gamma \dot{\epsilon}_1^{m-1} \left[\sin^m \theta_{th} + m \int_{\theta_{th}}^{\pi/2} \sin^{m-1} \theta d\theta \right]. \quad (31)$$

В частности, при некоторых целых значениях m получаем:

$$C^{(0)} = \begin{cases} 2\pi^{-1} \gamma \dot{\epsilon}_1^{-1}, & m = 0, \\ 2\pi^{-1} \gamma \dot{\epsilon}_1^{-2} \operatorname{tg}(\theta_{th}/2), & m = -1, \\ 2\pi^{-1} \gamma \dot{\epsilon}_1^{-3} [1/2 + \ln |\operatorname{tg}(\theta_{th}/2)|], & m = -2. \end{cases} \quad (32)$$

При $m < -2$, с учетом того, что основной вклад в интеграл (36) дает окрестность θ_{th} , можно получить приближенное выражение для $C^{(0)}$:

$$C^{(0)} = -2\pi^{-1} \gamma m (\dot{\epsilon}_{th}/\dot{\epsilon}_0)^{-3} \dot{\epsilon}_{th}^{m-1} / (m+2). \quad (33)$$

Из полученных выражений видно, что при достаточно большой крутизне падающего участка (когда показатель $m \leq -2$) коэффициент нелинейной диссипации, действительно, может стать отрицательным.

Таким образом, в соответствии с выражениями (32), (33), при наличии падающего участка абсолютная величина нелинейного отрицательного поглощения должна достигать максимума при не слишком больших $\dot{\epsilon}_1$, превышающих $\dot{\epsilon}_{th}$, а с дальнейшим увеличением амплитуды $\dot{\epsilon}_1$ будет происходить уменьшение $|C^{(0)}|$. Качественный ход зависимости $C^{(0)}$ от амплитуды $\dot{\epsilon}_1$, естественно, сохранит основные черты и при другом способе введения падающего участка в зависимость $\Phi(\dot{\epsilon})$.

5. ИМПУЛЬСНАЯ ТОМОГРАФИЯ ПАРАМЕТРА ДИССИПАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В связи с высокой чувствительностью как упругих, так и неупругих нелинейных параметров к изменениям структуры среды их пространственная реконструкция представляет практический интерес. Для реконструкции этих параметров были предложены схемы томографии, основанные на фазовой и амплитудной модуляции пробной волны при ее взаимодействии с другой мощной импульсной волной [13, 14]. Ниже на примере взаимодействия встречных плоских продольных волн (пробной непрерывной волны и импульса накачки) проанализирована возможность восстановления структуры неоднородности диссипативных нелинейных свойств среды, что может представлять интерес, например, для сейсмических приложений.

Пусть в среде с диссипативной нелинейностью навстречу друг другу распространяются мощный НЧ-импульс накачки $U_1(x, t)$ и слабая непрерывная ВЧ-волна $U_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= U_1 \Pi(x - D + ct) \sin[\Omega t + K(x - D)], \\ U_2(x, t) &= U_2(x) \sin(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\Pi(x - D + ct)$ — прямоугольная огибающая импульса, причем его длительность $T \gg (2\pi/\Omega)$; D — длина трассы зондирования, $\omega \neq n\Omega$ (n — целое число). Подставляя далее в уравнение (5) $U = U_1(x, t) + U_2(x, t)$ и учитывая, что $|\dot{\epsilon}_1| \gg |\dot{\epsilon}_2|$, аналогично (27), получим уравнение описывающее затухание пробной волны в поле мощного импульса накачки:

$$U_{2x} = -[\beta + \beta_{nl} \Pi(x - D + ct)] U_2,$$

где $\beta = \alpha \omega^2 / 2c^3$, $\beta_{nl} = (\omega^2 / 2c^3) C^{(0)}(\Omega \epsilon_1)$, а коэффициент $C^{(0)}(\Omega \epsilon_1)$ определяется выражениями (28)–(33).

Для неоднородной среды величины c , β и входящие в выражение для $C^{(0)}(\Omega \epsilon_1)$ коэффициенты γ и m зависят от координаты x . Полагая длину импульса cT малой по сравнению с характерными размерами неоднородностей среды, находим коэффициент нелинейного ослабления пробной волны под действием мощного импульса накачки:

$$\chi_0(x_0) = \beta_{nl}(x_0) cT, \quad x_0 = D - ct.$$

Это выражение определяет пространственное распределение коэффициента $m(x_0) = 1 - \exp[-\chi_0(x_0)]$ амплитудной модуляции пробной волны, для которого при $\chi_0(x_0) \ll 1$ получаем:

$$m(x_0) = 1 - \exp[-\chi_0(x_0)] \approx \chi_0(x_0).$$

Таким образом, параметром, характеризующим неоднородность среды, является величина $\beta_{nl} = \omega^2 C^{(0)}(\Omega \epsilon_1) / 2c^3$, а сигналом, несущим информацию о ее неоднородности — коэффициент амплитудной модуляции пробной волны. Различные среды характеризуются различием как скоростей распространения волн, так и параметров диссипа-

тивной акустической нелинейности, причем типичные величины изменения скорости составляют единицы, реже – десятки процентов, в то время как параметры нелинейности различных сред отличаются на порядки. Это обеспечивает высокий контраст реконструируемого распределения.

6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С ДИССИПАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим теперь искажение формы импульсных пакетов, обусловленное зависимостью коэффициента поглощения среды от амплитуды возмущения. Граничное условие в этом случае зададим в виде

$$U_0(x=0, t) = A_0 \exp(-t^2/T^2) \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 T \gg 1. \quad (35)$$

В линейном приближении ($\Phi = 0$) решение уравнения (9) имеет вид [7]

$$U_l(x, \tau) = (4\pi\delta x)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\tau') \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')^2}{4\delta x}\right) d\tau', \quad (36)$$

где $\delta = \alpha/2c^3$.

Подставляя выражение (35) в (36), получаем: $U_l(x, t) = A(x, \tau) \cos \omega t$,

$$A(x, \tau) = \frac{A_0}{(1 + \mu x)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{T^2} \frac{1}{1 + \mu x}\right) \times \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \delta x}{1 + \mu x}\right),$$

где $\mu = 4\pi\delta/T^2$, $\omega = \omega_0/(1 + \mu x)$.

Решение нелинейного уравнения (9) будем искать в виде

$$U(x, \tau) = U_l(x, \tau) F(x, \tau), \quad (37)$$

где неизвестная “медленная” функция модуляции $F(x, \tau)$ положительна и удовлетворяет граничному условию $F(x=0, \tau) = 1$. Подставляя (37) в (9) и учитывая, что $U_l(x, \tau)$ является решением в линейном приближении, получаем уравнение для $F(x, \tau)$:

$$U_l(x, \tau) F_x(x, \tau) = (\gamma/2c^2) (|U_l F|)^m \text{sign}(U_l F)_\tau. \quad (38)$$

Учитывая медленность огибающей импульса ($T\omega_0 \gg 1$), после несложных преобразований, получаем уравнение для $F(x, \tau)$:

$$F_x = -\nu F^m A^{m-1}, \quad (39)$$

где $\nu = \gamma\omega^m b/c^2$, а множитель b – коэффициент Фурье при первой гармонике в правой части уравнения (38). В частности, при $m > -2$:

$$b = -\pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{m+1} \theta d\theta = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma[m/2 + 1]}{\Gamma[m/2 + 3/2]}.$$



Рис. 2. Искажение огибающей импульса в среде нелинейной диссипацией: а – при $m > 1$, б – при $m < 1$. Штриховые линии соответствуют среде с линейной диссипацией ($m = 1$).

При $m \leq -2$, необходимо, как и ранее (см. выражение (7)), вводить ограничение диссипативной силы в окрестности $\epsilon = 0$. В этом случае изменение коэффициента b не имеет принципиального значения, и мы отдельно на нем останавливаться не будем.

Решение уравнения (39), с учетом условия $F(x=0, \tau) = 1$, имеет вид:

$$F = \left[1 - \mu(1 - m) \int_0^x A^{m-1}(x, \tau) dx \right]^{1/(1-m)}, \quad (40)$$

а огибающая импульса $B(x, \tau)$ описывается выражением

$$B(x, \tau) = A(x, \tau) F(x, \tau) = A(x, \tau) \left[1 - \mu(1 - m) \int_0^x A^{m-1}(x, \tau) dx \right]^{1/(1-m)}.$$

В общем случае проанализировать это решение не удастся, поэтому мы рассмотрим случай $\mu x \ll 1$, когда можно пренебречь линейным уширением импульса и сдвигом его несущей частоты, то есть когда

$$A(x, \tau) = A_0 \exp(-(\tau/T^2)) \exp(-\delta\omega_0^2 x). \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в уравнение (40), получаем:

$$F^{1-m}(x, \tau) = 1 + (\nu A_0 / \omega_0^2 \delta) \times \exp(-(\tau/T^2)(m-1)) [1 - \exp(-\omega_0^2 \delta x(m-1))].$$

Из этого выражения нетрудно получить представление о поведении огибающей импульса $B(x, \tau)$. А именно, в среде с $m > 1$ будет происходить нелинейное ограничение амплитуды и относительное уширение импульса из-за более интенсивной диссипации в окрестности его максимума. При $m < 1$ будет наблюдаться относительное обострение импульса за счет повышенного поглощения (и обращения в нуль на конечном расстоянии) поля малой амплитуды на крыльях импульса. Схематически эти искажения показаны на рис. 2.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оценок амплитуд волны, при которых могут наблюдаться отмеченные эффекты явления, воспользуемся экспериментальными данными по исследованию трения твердых тел [8], которые показывают, что характерная пороговая скорость V_{th} (перед началом падающего участка) лежит в диапазоне от $(10^{-7}-10^{-4})$ см/с, чему соответствуют $\epsilon_{th} \sim 10^{-13}-10^{-9}$. Относительные скорости структурных блоков среды размера a имеют величину порядка $(Ka)V^{(1)}$, где $V^{(1)}$ – амплитуда скорости в волне на основной гармонике. Так, например, при $(Ka) \sim 10^{-2}$ получаем оценку амплитуд ϵ_0 волны, при которых начинается падающий участок: $\epsilon_0 \sim V^{(1)}/c \sim (Ka)^{-1}V_{th}/c \sim 10^{-11}-10^{-7}$, что соответствует экспериментально реализуемым амплитудам акустических волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-02-06411 и 96-05-64459).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ostrovsky L.A.* Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 90. № 6. P. 3332–3338.
2. *Johnson P.A., Rasolofosaon P.N.J.* Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 1996. № 3. P. 77–88.
3. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* Диссипативная акустическая нелинейность меди // *Физика металлов и металловедение*. 1992. № 3. С. 62–65.
4. *Nazarov V.E., Zimenkov S.V.* Self-action of acoustic waves in rocks // *Acoustic Letters*. 1993. V. 16. № 10. P. 218–221.
5. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород // *Физика Земли*. 1993. № 1. С. 13–18.
6. *Назаров В.Е.* Экспериментальное исследование нелинейного акустического просветления в сыром песке // *Акуст. журн.* 1994. Т. 40. № 1. С. 104–106.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков С.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
8. *Крагельский И.В., Гитис Н.В.* Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 184 с.
9. *Назаров В.Е.* Самовоздействие акустических волн в средах с нелинейной диссипацией // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 2. С. 349–352.
10. *Пальмов В.А.* Распространение вибраций в нелинейной диссипативной среде // *ПММ*. 1967. Т. 31. № 4. С. 749–755.
11. *Николаевский В.Н.* Монохроматические волны в упругой среде с локальным проявлением сухого трения // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1968. № 4. С. 85–92.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
13. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Сутин А.М.* Томография упругих нелинейных параметров земных пород в задачах сейсмологии и сейсморазведки // *Физика Земли*. 1994. № 12. С. 44–51.
14. *Назаров В.Е.* Сейсмо-акустическая томография параметра диссипативной нелинейности // *Физика Земли*. 1994. № 4. С. 82–83.

Elastic Waves in Media with Nonlinear Dissipation

V. Yu. Zaitsev and V. E. Nazarov

The paper presents a rheological model which treats a medium with nonlinear dissipation as a unidimensional chain of masses interacting through linear and nonlinear inelastic links. In the framework of this model, we derived a nonlinear wave equation and studied such effects of propagation and interaction of elastic waves as self-action of continuous harmonic and pulse waves, generation of higher order harmonics, and the effect of a strong wave on the attenuation of weak waves of other frequencies.