

УДК 517.947:534.414

## О ВЛИЯНИИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СТЕНКИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

© 1998 г. Ю. А. Лавров

Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения

190031 Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Поступила в редакцию 07.04.97 г.

Решена задача об определении собственных частот и форм собственных колебаний прямоугольного акустического резонатора с двумя жесткими и двумя упругими стенками, совершающими как изгибные, так и продольные колебания. Исследована зависимость собственных частот от механических свойств упругих пластин и геометрических размеров резонатора.

В работе [1] изучены свободные процессы в прямоугольном акустическом резонаторе, две упругие стенки которого способны только к изгибным (антисимметричным) колебаниям. Важность изучения продольных (симметричных) колебаний подтверждена работами [2–4], где рассматривалось глушение звука бесконечной упругой плоской пластиной. Учет продольных колебаний стенок при построении модели свободных процессов в замкнутом акустическом резонаторе обогащает верхнюю часть спектра его собственных частот и вносит коррективы в низкочастотную область спектра. В целом в литературе не уделялось значительного внимания такому учету.

Пусть плоский прямоугольный резонатор  $0 < x < L$ ,  $0 < y < H$  заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Две горизонтальные стенки ( $y = \pm H$ ,  $-L < x < +L$ ) — идеально жесткие, тогда как две другие ( $x = \pm L$ ,  $-H < y < +H$ ) являются одинаковыми тонкими упругими пластинами. Акустическое давление  $P(x, y)$  в жидкости, изгибные смещения пластин  $W_{\pm}(y)$  в направлении внешней нормали, смещения в том же направлении  $V_{\pm}(y)$  внутренних поверхностей пластин, обусловленные их продольными движениями, подчиняются условиям [1, 2]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)P(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P(x, \pm H)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{d^4}{dy^4} - \kappa^4\right)W_{\pm}(y) = \frac{\nu}{\rho_0 \omega^2} P(\pm L, y), \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2\right)V_{\pm}(y) + \frac{1}{E_1} F_{\pm}(y) = 0, \quad (4)$$

$$W_{\pm}(y) + V_{\pm}(y) = \pm \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial P(\pm L, y)}{\partial x}. \quad (5)$$

Применимы обозначения:  $\omega$  — круговая частота,  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $c$  — скорость звука в ней,  $\kappa^4 = \rho h \omega^2 / D$ ,  $\rho$  — плотность материала пластин,  $h$  — их толщина,  $D = E_1 h^3 / 12$  — изгибная жесткость,  $E_1 = E / (1 - \sigma^2)$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — модуль Пуассона,  $\nu = \rho_0 \omega^2 / D$ ,  $\lambda^2 = \rho \omega^2 / E_1$ .

Выражение для величины  $F_{\pm}(y)$  построено в [3] для случая плоской акустической волны. Выражение это согласуется с установленной ранее в [2] связью  $F_{\pm}(y)$  и произвольного поля давлений в жидкости. Применительно к рассматриваемой задаче связь такова:

$$F_{\pm}(y) = \frac{h}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 (1 - \sigma_1^2) \right) P(\pm L, y),$$

$\sigma_1 = \sigma / (1 - \sigma)$ . Результаты исследования [2] в работе [3] не использованы.

Гранично-контактные условия

$$\frac{dW_{\pm}(+H)}{dy} = \frac{dW_{\pm}(-H)}{dy} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dV_{\pm}(+H)}{dy} = \frac{dV_{\pm}(-H)}{dy} = 0, \quad (7)$$

$$W_{\pm}(+H) = W_{\pm}(-H) = 0, \quad (8)$$

выражают отсутствие поворота (6), продольного [2]

$$U_{\pm}(y) = \frac{1}{\sigma_1 \rho \omega^2} \frac{\partial P(\pm L, y)}{\partial y} + \frac{2}{\sigma_1 h \lambda^2} \frac{dV_{\pm}(y)}{dy}$$

смещения (7) и изгибного смещения (8) пластин в точках жесткого закрепления  $y = \pm H$  их краев.

В уравнениях (3)–(8) и выражениях для  $F_{\pm}(y)$ ,  $U_{\pm}(y)$  верхние знаки соответствуют смещениям и нагрузкам правой ( $W_{+}(y)$ ,  $V_{+}(y)$ ,  $F_{+}(y)$ ,  $x = +L$ )

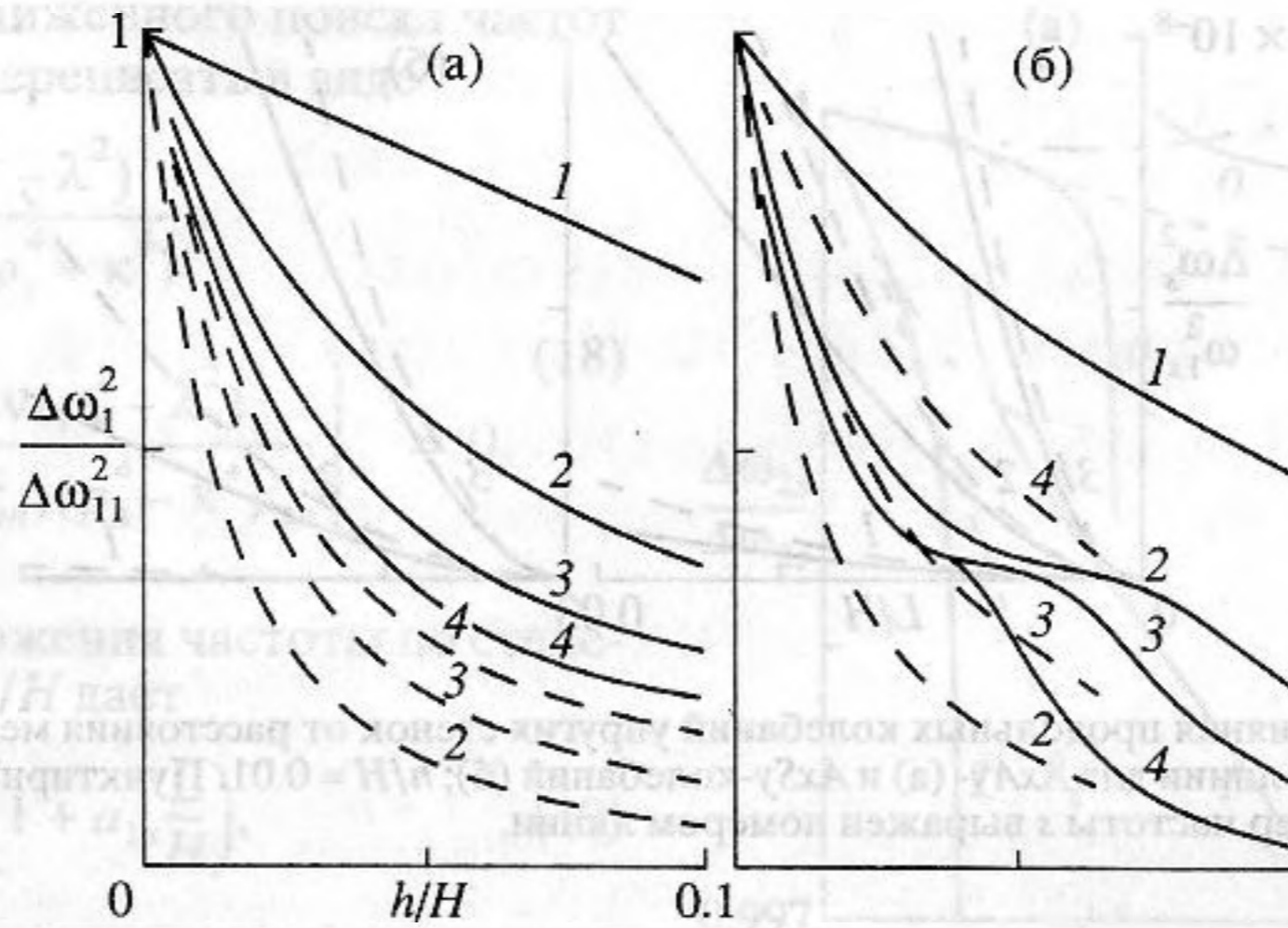


Рис. 1. Зависимость показателя действия приближенной формулы (15) от толщины упругих стенок,  $L/H = 0.05, 0.25, 0.5, 1$ , линии 1-4 соответственно, а – сплошные для  $SxAy$ - и пунктирные для  $AxAy$ -колебаний; б – сплошные для  $SxSy$ - и пунктирные для  $AxSy$ -колебаний.

упругой стенки, нижние – левой ( $W_-(y), V_-(y), F_-(y), x = -L$ ) стенки.

В дальнейшем символикой  $Sx, Ax, Sy, Ay$  обозначается симметрия ( $S$ ), антисимметрия ( $A$ ) поля давлений по координатам  $x, y$ . При построении решения применены идеи, изложенные в [1].

Формы свободных  $AxAy$ -колебаний, удовлетворяющих условиям (1)–(7), имеют вид

$$P(x, y) = C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu_n \psi(p_n y) \frac{\varphi(\xi_n x) p_n^2 - \lambda^2}{\varphi(\xi_n L) \zeta_n}, \quad (9)$$

$$W_{\pm}(y) = C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu_n \psi(p_n y) \times \quad (10)$$

$$\times \frac{\xi_n g(\xi_n L)(p_n^2 - \lambda^2) - \alpha(p_n^2 - \lambda^2(1 - \sigma_1^2))}{\zeta_n},$$

$$V_{\pm}(y) = C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu_n \psi(p_n y) \frac{\alpha(p_n^2 - \lambda^2(1 - \sigma_1^2))}{\zeta_n}. \quad (11)$$

Здесь  $C$  – произвольная константа,  $\mu_n = 1, n = 0, 1, 2, \dots, p_n = q_n/H, q_n = \pi(n + 1/2), \xi_n = \sqrt{p_n^2 - \omega^2/c^2}, \alpha = \nu h^4/48,$

$$\zeta_n = (p_n^2 - \lambda^2)(\xi_n g(\xi_n L)(p_n^4 - \kappa^4) - \nu) - \alpha(p_n^2 - \lambda^2(1 - \sigma_1^2))(p_n^4 - \kappa^4). \quad (12)$$

Использованы функции:  $\varphi(z) = \text{sh}z$  и  $g(z) = \text{cth}z$  для  $Ax$ -симметрии,  $\psi(z) = \sin z$  для  $Ay$ -симметрии.

Наложение требования (8) позволяет построить уравнение для поиска собственных частот

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \times \quad (13)$$

$$\times \frac{\xi_n g(\xi_n L)(p_n^2 - \lambda^2) - \alpha(p_n^2 - \lambda^2(1 - \sigma_1^2))}{\zeta_n} = 0.$$

При обсуждении частот свободных колебаний, антисимметричных по координате  $x$ , резонатор можно считать разделенным идеально мягкой стенкой вдоль сечения  $x = 0$  на два идентичных независимых резонатора.

Корни уравнения (13) распадаются на две группы. Корни первой группы  $\omega_{1s}, s = 1, 2, 3, \dots$ , соответствующие колебаниям с преимущественно изгибными движениями пластин, будут сравнены с частотами  $\Omega_{1s}$  задачи [1] – решениями уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{\xi_n g(\xi_n L)}{\xi_n g(\xi_n L)(p_n^4 - \kappa^4) - \nu} = 0. \quad (14)$$

Численные результаты построены на рис. 1–3 для резонатора, заполненного водой, материал упругих стенок – сталь.

Поправка  $\Delta\omega_s^2 = -(\omega_{1s}^2 - \Omega_{1s}^2)$  оценивается в низкочастотной части спектра  $0 < \omega_{1s}H/c < \pi/2$ , где резонатор с четырьмя идеально жесткими стенками собственных частот не имеет.

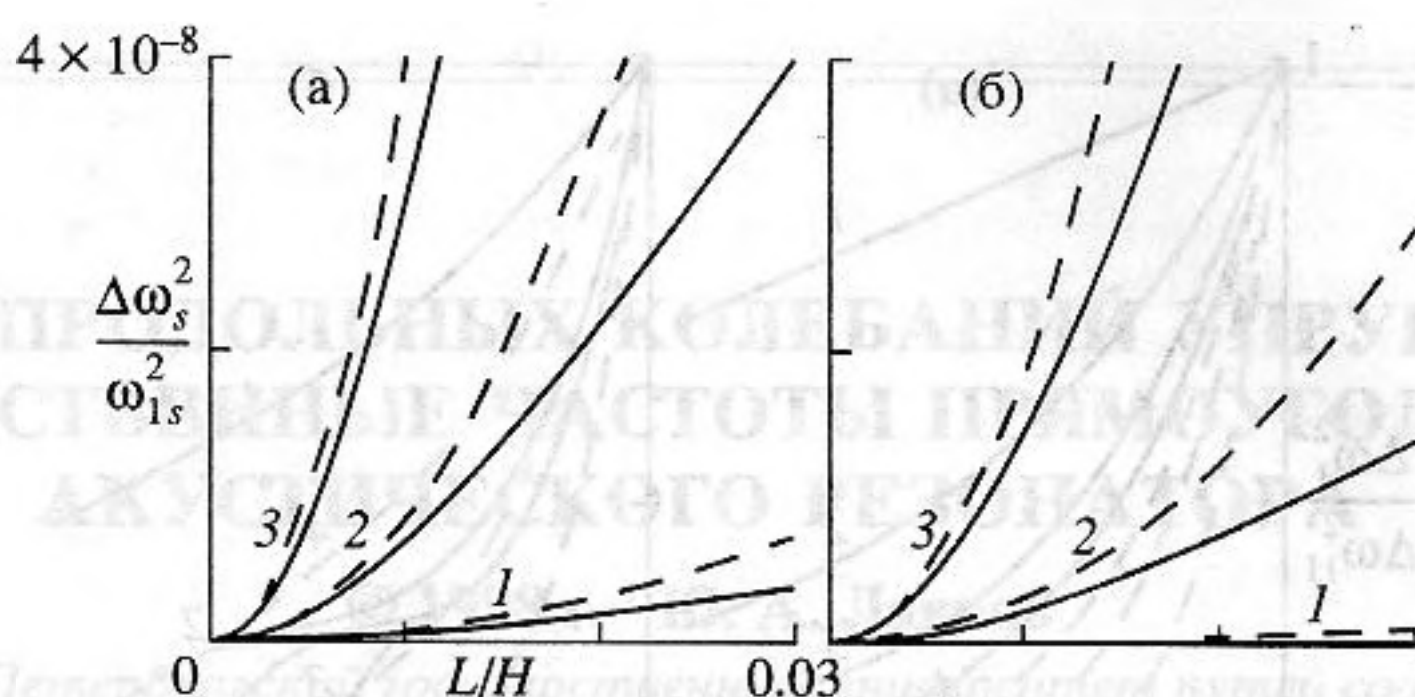


Рис. 2. Зависимость меры влияния продольных колебаний упругих стенок от расстояния между ними для низших собственных частот. Сплошные линии для AxAy- (а) и AxSy-колебаний (б);  $h/H = 0.01$ . Пунктирные линии – результат применения формулы (17). Номер частоты  $s$  выражен номером линии.

Разложение  $\Delta\omega_s^2$  по степеням малого параметра  $h/H$  дает

$$\Delta\omega_s^2 = \omega_{1s}^2 f_s \left(\frac{L}{H}\right) \left(\frac{h}{H}\right)^4 + O\left(\left(\frac{h}{H}\right)^5\right),$$

$$\Delta\omega_s^2 \Big|_{h/H \rightarrow 0} \approx \Delta\omega_{1s}^2 = \omega_{1s}^2 f_s \left(\frac{L}{H}\right) \left(\frac{h}{H}\right)^4. \tag{15}$$

Здесь

$$f_s(l) = \frac{1}{48} \frac{r_{02}(l, \chi_s)}{r_{12}(l, \chi_s)},$$

$$r_{ij}(l, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{(q_n g(q_n l))^i}{(q_n g(q_n l) - \chi)^j}, \tag{16}$$

$\chi_s = \chi_s(l)$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$  – положительные корни уравнения  $r_{11}(l, \chi) = 0$ .

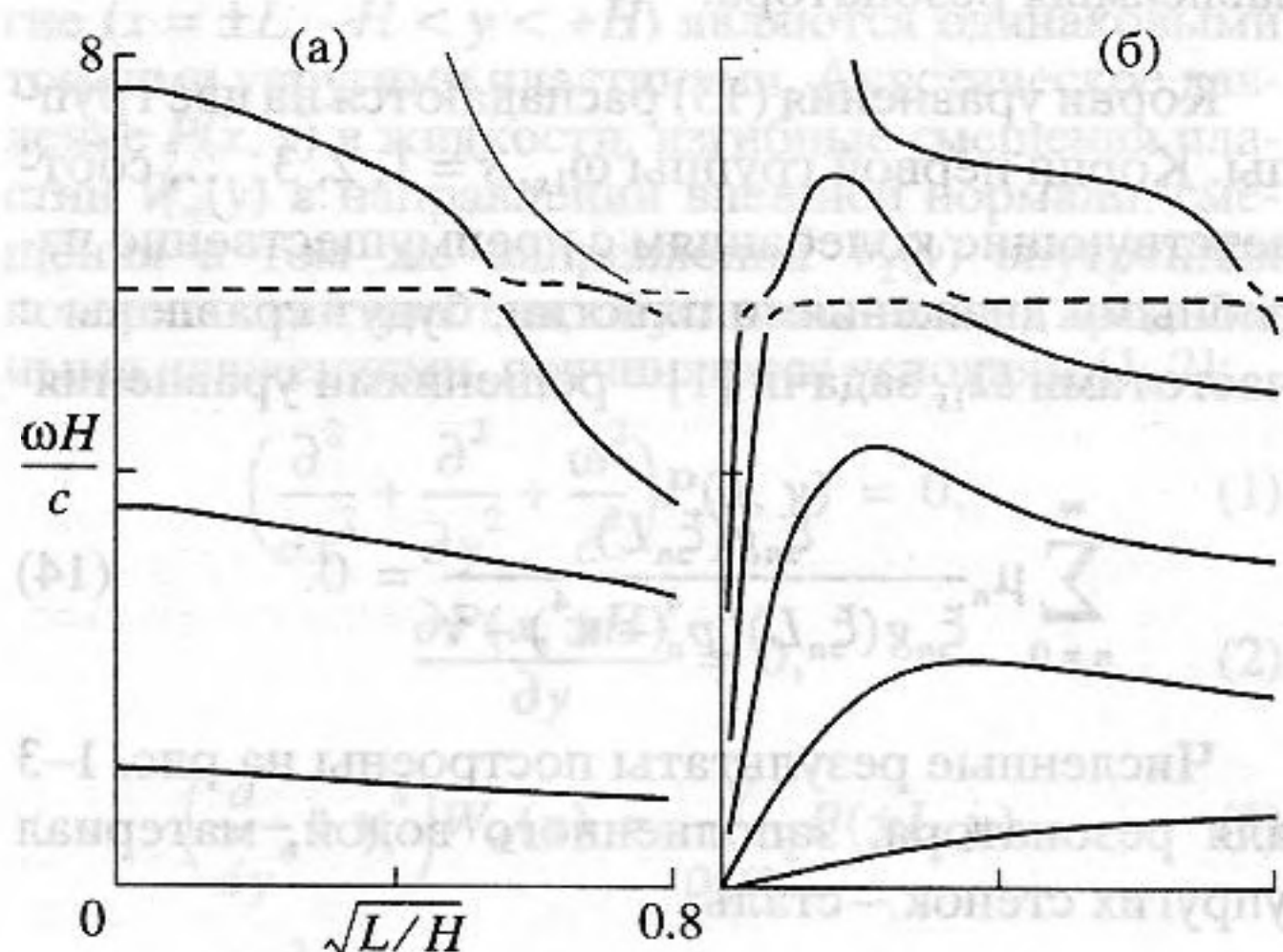


Рис. 3. Зависимости низших собственных частот от длины резонатора для AxAy- (а) и SxAy-колебаний (б);  $h/H = 0.07$ . Сплошные участки линий – общие для уравнений (13) и (14). Пунктирные участки характерны только для уравнения (13).

Соотношение (15) применимо при  $L \gg h$  (рис. 1). В случае, если  $L$  – величина одного порядка с  $h$ , разложение  $\Delta\omega_s^2$  следует вести по степеням  $L/H$

$$\Delta\omega_s^2 = \left[ \omega_{1s}^2 \frac{\vartheta_s^4 \rho_0^2 h^2}{48 \rho^2 H^2} + O\left(\frac{h^4}{H^4}\right) \right] \left(\frac{L}{H}\right)^2 + O\left(\left(\frac{L}{H}\right)^3\right).$$

Для тонкостенного резонатора (рис. 2)

$$\Delta\omega_s^2 \Big|_{L/H \rightarrow 0} \approx \omega_{1s}^2 \frac{\vartheta_s^4 \rho_0^2 h^2}{48 \rho^2 H^2} \left(\frac{L}{H}\right)^2, \tag{17}$$

здесь числа  $\vartheta_s$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$  – нули функции [5]

$$\Phi(\vartheta) = -4\vartheta^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n^4 - \vartheta^4} = \text{th } \vartheta - \text{tg } \vartheta.$$

Таким образом, сохраняет силу приближенное равенство

$$\omega_{1s}^2 = \frac{2\vartheta_s^4}{H^3} \frac{D}{m + m_0} + O\left(\left(\frac{L}{H}\right)^2\right) \Big|_{L/H \rightarrow 0} \approx \frac{2\vartheta_s^4}{H^3} \frac{D}{m + m_0}$$

частоты свободных колебаний изолированной пластины массой  $m = 2\rho hH$ , которая нагружена равномерно распределенной по ее поверхности массой  $m_0 = 2\rho_0 LH$  прилегающего слоя жидкости, частоте рассматриваемого резонатора [1].

Корни уравнения (13) второй группы  $\omega_{2s}$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , соответствующие процессам с преимущественно продольными движениями пластин, будут сравнены с частотами  $\Omega_{2s} = q_s/H \sqrt{E_1/\rho}$  свободных продольных колебаний изолированной пластины. При малых  $L/H$  частоты второй группы находятся в тесной близости с корнями функ-

ции  $\zeta_s = \zeta_s(\omega)$ . Для приближенного поиска частот уравнение (13) следует переписать в виде

$$\zeta_s + \frac{\mu_s v(p_s^2 - \lambda^2)}{\xi_s g(\xi_s)(p_s^4 - \kappa^4)} \times$$

$$\times \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{p_n^4 - \kappa^4} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{\mu_n v(p_n^2 - \lambda^2)}{\xi_n g(\xi_n)(p_n^4 - \kappa^4) \zeta_n} \right)^{-1} = 0. \quad (18)$$

Подстановка в (18) разложения частоты по степеням малого параметра  $L/H$  дает

$$\omega_{2s}^2 \Big|_{L/H \rightarrow 0} \approx \Omega_{2s}^2 \left( 1 + a_{1s} \frac{L}{H} \right), \quad (19)$$

$$\omega_{2s}^2 \Big|_{L/H \rightarrow 0} \approx \Omega_{2s}^2 \left( 1 + a_{1s} \frac{L}{H} + a_{2s} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right), \quad (20)$$

здесь

$$a_{1s} = -\frac{q_s^2}{4} \sigma_1^2 \frac{\rho_0 h}{\rho H},$$

$$a_{2s} = \frac{q_s^2}{4} \sigma_1^2 \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \left( \frac{q_s^2 h^2}{4 H^2} (2\sigma_1^2 - 1) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + 4 \left( \sqrt[4]{12} \sqrt{q_s \frac{H}{h}} \Phi \left( \sqrt[4]{12} \sqrt{q_s \frac{H}{h}} \left( 1 - \frac{q_s^2 h^2}{12 H^2} \right) \right) \right)^{-1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{q_s^2 h^2}{12 H^2} \right)^{-1} \right).$$

Для анализа соотношения (19) полезно рассмотреть зависимость

$$P(\pm L, y) = \rho_0 \omega^2 L V(y), \quad (21)$$

которая выражает чисто "массовую" реакцию тонкого слоя жидкости, прилегающего к продольно колеблющейся пластине. Собственные частоты  $\Omega_{3s}$  вспомогательной задачи, собранной из требований (4), (7), (21), являются корнями уравнения

$$\lambda^2 (1 - \alpha L) - p_s^2 (1 - \alpha (1 - \sigma_1^2) L) = 0.$$

Оценка

$$\omega_{2s}^2 = \Omega_{3s}^2 + O\left(\left(\frac{L}{H}\right)^2\right) \Big|_{L/H \rightarrow 0} \approx \Omega_{3s}^2$$

( $\Omega_{3s}^2 = O((L/H)^0)$ ) вновь позволяет объяснять процессы на собственной частоте  $\omega_{2s}$  влиянием массы жидкости, нагружающей пластину.

Предложенная классификация собственных частот уместна только при малых  $L/H$ , где величины  $\omega_{1s}$ ,  $\omega_{2s}$  сближаются соответственно с частотами

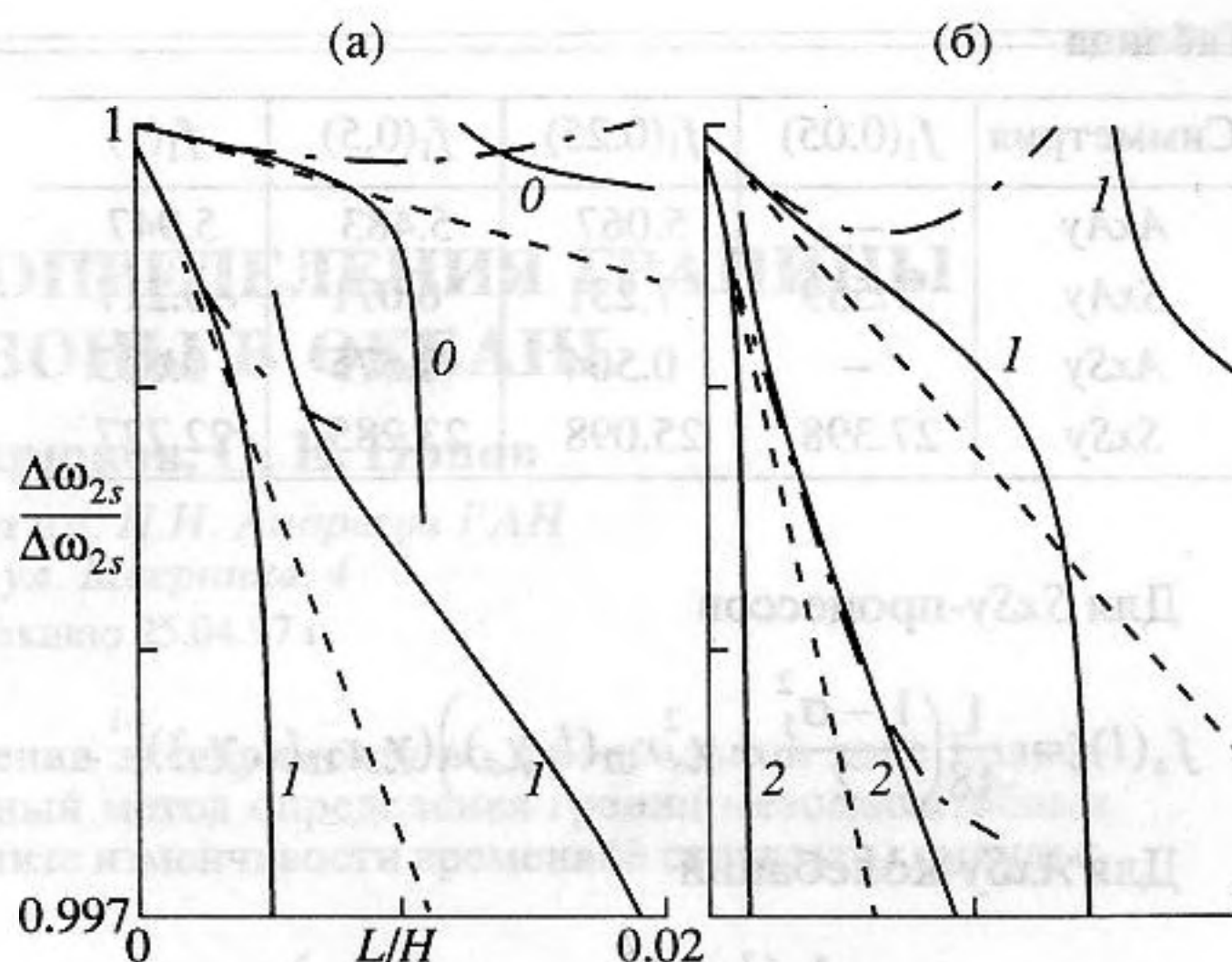


Рис. 4. Зависимости собственных частот второй группы от длины резонатора для AxAy- (а) и AxSy-колебаний (б); сплошные линии,  $h/H = 0.07$ . Номер частоты  $s$  выражен номером линии. Действие формул (19), (20) показано соответственно пунктирными и штрихпунктирными линиями.

тами изгибных и продольных колебаний изолированной упругой пластины. По мере роста  $L/H$  возможны переходы частотных линий из первой группы во вторую и наоборот. Все же частоты "продольного" происхождения отчетливо представлены множеством пологих участков, наблюдаемых вдоль уровня  $\Omega_{2s}$  (рис. 3). Отклонение от этого уровня мало даже в случае высокой плотности жидкости, заполняющей резонатор. На рис. 4 показаны результаты расчета для резонатора, заполненного ртутью, материал упругих стенок — алюминий.

При рассмотрении SxAy-процессов в выражениях (9)–(16) следует пользоваться функциями Sx-симметрии  $\varphi(z) = \text{ch}z$  и  $g(z) = \text{th}z$ .

Поправка для частот первой группы приближенно отыскивается по формуле (15) — как при больших  $L/H$ , так и малых. Сгущающиеся при  $L/H \rightarrow 0$  множество пологих участков частотных линий, относящихся ко второй группе частот, можно опознать по их отсутствию (рис. 3) среди корней уравнения (14).

При рассмотрении свободных SxSy- и AxSy-процессов следует учитывать особенности Sy-симметрии:

$$\Phi(\vartheta) = -4\vartheta^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{q_n^4 - \vartheta^4} = \text{cth} \vartheta + \text{ctg} \vartheta, \quad (22)$$

$\psi(z) = \cos z$ ,  $q_n = \pi n$ ,  $\mu_n = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mu_0 = 1/2$  в (9)–(14) и (22),  $\mu_0 = 0$  в (16). Низкочастотная часть спектра задается неравенствами  $0 < \omega_{1s} H/c < \pi$ ,  $0 < \omega_{1s} L/c < \pi/2$ . Нумерация частот второй группы  $\omega_{2s}$  начинается с  $s = 1$ .

