

УДК 534.26

ПАРЦИАЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСЫ В ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ СПЕКТРА ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

© 1998 г. Н. С. Шевяхов

Институт радиотехники и электроники РАН, Ульяновский филиал
432700 Ульяновск, ул. Гончарова, 48

Поступила в редакцию 12.09.96 г.

Обсуждается связь тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния плоской монохроматической аксиально-сдвиговой волны цилиндрической полостью в изотропной упругой среде с парциальными резонансами инородного изотропного замедляющего слоя, покрывающего полость. Предложена систематика тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния на основе представления о спектральных сериях. Показано, что доминирующую роль в формировании тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния играет основная серия, не имеющая, в отличие от серий высших порядков, нижней границы допустимых значений волновой толщины слоя. Отмечается локальный характер вкладов серий высших порядков в окрестности максимумов основного хода частотной зависимости полного сечения рассеяния.

В последнее десятилетие резонансное рассеяние акустических волн рассматривалось многими авторами, что нашло отражение в большом количестве статей, специальных обзорах [1] и книгах [2, 3]. В настоящей статье рассматривается возможность изучения резонансных эффектов при рассеянии акустических волн в связи с существованием тонкой структуры в спектре полного сечения рассеяния. Несмотря на то, что происхождение тонкой структуры всегда связывалось с наличием у рассеивающей неоднородности резонансных свойств [4, 5], а сама связь полного сечения рассеяния с характеристикой рассеяния, и, следовательно, с уровнем поля в дальней зоне, обычно исследуемым в работах по резонансному рассеянию [1, 3], вытекает из оптической теоремы (см. [5, 6]), резонансная структура спектра полного сечения рассеяния до сих пор специально не рассматривалась.

Чтобы восполнить этот пробел, обратимся к простейшей модельной задаче рассеяния плоской монохроматической аксиально-поляризованной сдвиговой волны, падающей нормально на круговую цилиндрическую полость в однородной изотропной упругой среде, покрытой слоем инородного изотропного материала. Предполагается, что смещения частиц в падающей волне происходят вдоль оси z цилиндра. Такая постановка задачи исключает проявление усложняющих картину рассеяния эффектов трансформации волн. Наличие слоя предопределяет при этом существование резонансов.

Поскольку решение аналогичной задачи хорошо известно как в акустике [6, 7], так и радиофизике [8], с поправкой на различие физических моделей можно воспользоваться готовым матема-

тическим результатом. Именно, учитывая, что полное сечение рассеяния σ выражается через амплитудные коэффициенты a_n парциальных волн рассеянного поля по формуле [4, 6]

$$\sigma = \frac{4}{k} |a_0|^2 + \frac{8}{k} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \quad (1)$$

ограничимся ниже представлением выражения для a_n по аналогии с формулой (5.10) из [6] в виде

$$a_n = \frac{\rho c J_n'(\xi) + i Z_n J_n(\xi)}{\rho c H_n^{(1)'}(\xi) + i Z_n H_n^{(1)}(\xi)}. \quad (2)$$

Здесь обозначено: $k = \omega/c$, ω – частота, c – скорость сдвиговых волн, ρ – плотность, $\xi = kR$, R – внешний радиус слоя, Z_n – парциальный входной импеданс цилиндрического слоя на полости, определяемый равенством $Z_n = T_{rz}^{(n)} / \dot{u}_z^{(n)}|_{r=R}$, где $T_{rz}^{(n)}$ – сдвиговые напряжения, $\dot{u}_z^{(n)}$ – скорость сдвиговых смещений в слое для отдельных волн номеров $n = 0, 1, 2, \dots$, r – радиальная, а z – аксиальная координата. Если ρ_0 – плотность, а c_0 – скорость сдвиговых волн в материале слоя ($R_0 < r < R$), то

$$Z_n = i \rho_0 c_0 \frac{J_n'(\xi_0 - \Delta\xi) N_n'(\xi_0) - J_n(\xi_0) N_n'(\xi_0 - \Delta\xi)}{J_n'(\xi_0 - \Delta\xi) N_n(\xi_0) - J_n(\xi_0) N_n'(\xi_0 - \Delta\xi)}, \quad (3)$$

где $\xi_0 = k_0 R$, $k_0 = \omega/c_0$, $\Delta\xi = k_0(R - R_0)$ – волновая толщина слоя. В формулах (2), (3) применены стандартные обозначения для цилиндрических функций и их производных.

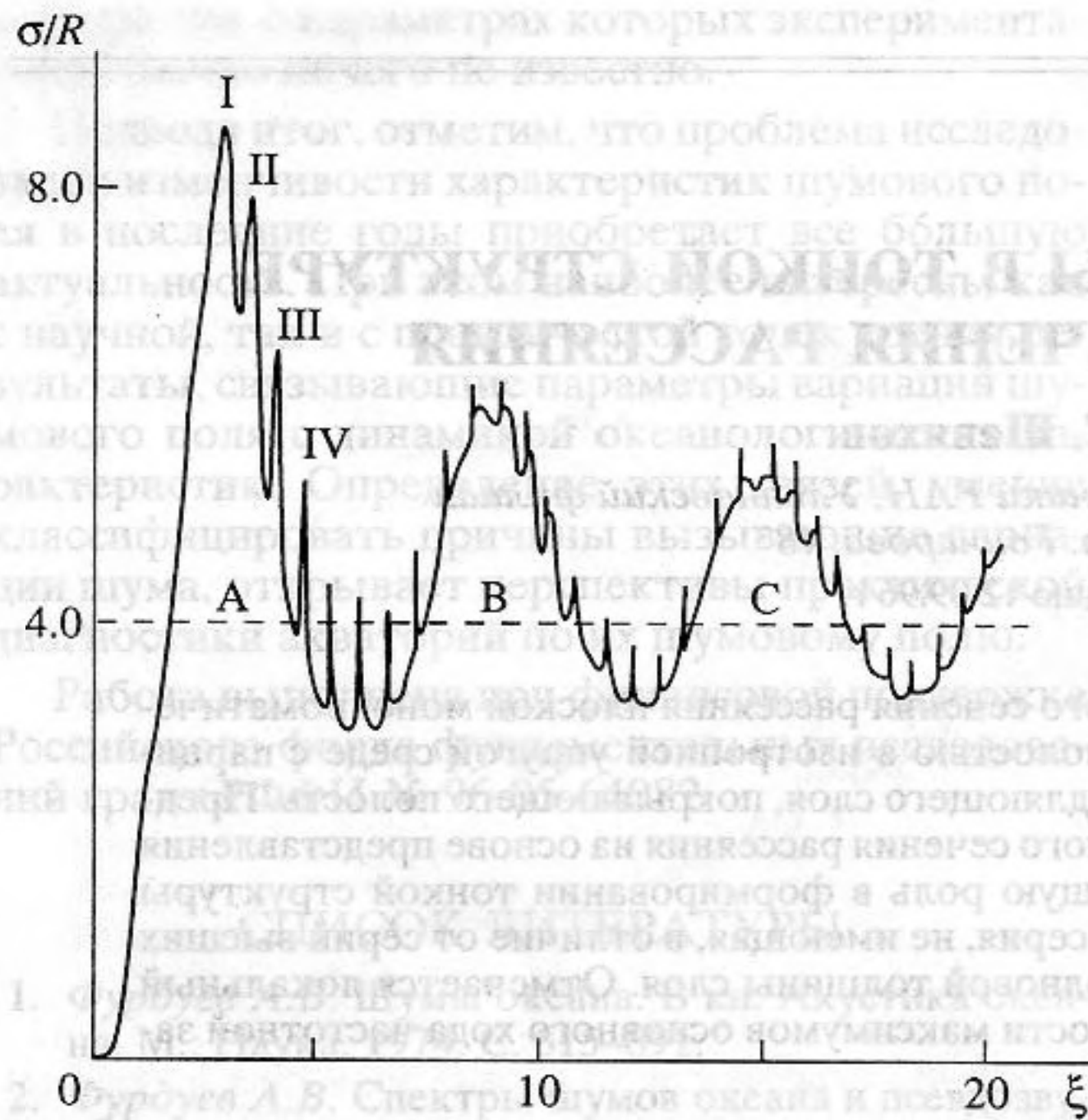


Рис. 1. Частотная зависимость полного сечения рассеяния при $R/R_0 = 1.5$, $\rho/\rho_0 = 0.8$, $c/c_0 = 1.94$.

Расчеты по формулам (1)–(3) показали, что тонкая структура спектра полного сечения рассеяния, проявляющаяся в виде дополнительных максимумов на основном ходе осцилляций величины σ с максимумами $A, B, C \dots$ (рис. 1) относительно уровня геометрического значения (пунктирная линия на рис. 1), имеет место при $c > c_0$. В случае $c < c_0$ слой на полости представляет собой антиволновод. Вследствие этого кратные переотражения сдвиговых волн на границе слой–внешняя среда со стороны слоя, за счет интерференции которых образуется тонкая структура, не возникают. Добавим, что при фиксированной толщине слоя и заданном отношении плотностей более выраженная тонкая структура спектра полного сечения получается при больших отношениях $c/c_0 > 1$. Типичный вид спектра полного сечения рассеяния представлен для подобного случая на рис. 1.

Полагая, что тонкая структура обуславливается в основном резонансами сдвиговых волн в слое, в соответствии с [9], с учетом реактивного типа импеданса слоя (3) заключаем, что положение максимумов тонкой структуры определяется нулями функций Z_n , т.е. задается корнями уравнения

$$J'_n(\xi_0 - \Delta\xi)N'_n(\xi_0) - N'_n(\xi_0 - \Delta\xi)J'_n(\xi_0) = 0. \quad (4)$$

Уравнение вида (4) решалось применительно к различным прикладным задачам, в том числе и в акустике [10]. Однако в большинстве случаев решение строилось в высокочастотном приближе-

нии ($\xi_0 > n \gg 1$) или, как в [10], при специальных ограничениях на величину $\Delta\xi$. Наличие обширных, но, к сожалению, малодоступных таблиц значений корней уравнения (4) отметил Люк [11]. В силу этих обстоятельств выполнялся самостоятельный численный расчет корней уравнения (4) методом перебора для ряда номеров $n = 0, 1, 2, \dots$ парциальных волн при единственном ограничительном условии $\Delta\xi < \xi_0$ (вытекает из постановки задачи) с точностью не ниже 10^{-8} . Результаты расчета представлены на рис. 2 в виде зависимостей $\xi_0^{(n)}(\Delta\xi)$, сгруппированных по признаку общности номера корня $m = 1, 2, 3, \dots$ уравнения (4) в порядке его возрастания в так называемые спектральные серии:

$$F_m = \{\xi_0^{(n)}(\Delta\xi), n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Для характеристики спектральных серий и описания основных особенностей поведения в них спектральных ветвей $\xi_0^{(n)} = \xi_0^{(n)}(\Delta\xi)$ разграничим понятия диапазона частот для серии и отдельной спектральной ветви в серии. Прежде всего заметим, что диапазоны спектральных серий имеют нижние границы $\Delta\xi_{\min}^{(m)} = (m-1)\pi$, на которых для серий высших порядков $m \geq 2$ имеет место высокочастотное сгущение спектральных ветвей: $\Delta\xi|_{\xi_0^{(n)} \rightarrow \infty} \rightarrow \Delta\xi_{\min}^{(m)}$. В условиях фиксированного номера n (т.е. при движении вдоль спектральной ветви) предельный переход $\xi_0^{(n)} \rightarrow \infty$ означает, что полость разворачивается в плоскость со слоем ортогонально падающей волне. При этом, как и следовало ожидать, реализуется интерференционное условие кратности волновой толщины слоя целому числу $N = m - 1$ длин полуволн, выражаемое здесь равенством $\Delta\xi_{\min}^{(m)} = N\pi$.

Основная спектральная серия ($m = 1$) охватывает весь спектральный диапазон $0 \leq \Delta\xi < \infty$ (величина $\Delta\xi_{\min}^{(1)} = 0$ совпадает с естественной границей области значений $\Delta\xi$), отличаясь от серий высших порядков еще и тем, что не содержит спектральной ветви номера $n = 0$. Причину этого можно понять, если учесть, что ветви основной спектральной серии на своей границе $\Delta\xi_{\min}^{(1)} = 0$ зарождаются в точках $\xi_0^{(n)} = n$, а в окрестности этих точек подчиняются закону $\xi_0^{(n)} \approx n + \Delta\xi/2$, установленному в работе [10]. Таким образом, если формально допустить существование этой ветви, то она будет лежать ниже прямой $\xi_0^{(n)} = \Delta\xi$, т.е. находиться за пределами физически значимых величин спектральных переменных.

Поведение спектральных ветвей основной серии характеризуется монотонностью возрастания и почти эквидистантностью взаимного расположения: $\xi_0^{(n+1)}(\Delta\xi) - \xi_0^{(n)}(\Delta\xi) \approx 1$. Как и для ветвей других серий, верхняя граница частотного интервала ветвей определяется точками их пересечения с прямой $\xi_0^{(n)} = \Delta\xi$, показанной на рис. 2 пунктиром. В сериях высших порядков с удалением от границы серии происходит вначале резкое спадание спектральной ветви, а затем ее монотонный рост, напоминающий ход спектральных ветвей основной серии.

В общих чертах, безотносительно к конкретному случаю формирование тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния, по мере роста ξ можно представить, исходя из установленной иерархии последовательного подключения серий в порядке возрастания номера m в виде соответственного повышения плотности числа пиков-максимумов тонкой структуры и, возможно, их утоньшения и измельчения. В действительности, однако, применительно ко всему диапазону существования серии $[\Delta\xi_{\min}^{(m)}, \infty)$ необходимо учитывать возможную спектральную неоднородность ее вклада в тонкую структуру. Из рис. 2, например, с учетом равенств $\xi_0 = \xi c/c_0$ и $\Delta\xi = \xi_0(1 - R_0/R)$ следует, что последовательность максимумов тонкой структуры на рис. 1 определяется точками пересечения ветвей спектров с линией $\xi_0 = \Delta\xi(1 - R_0/R)^{-1}$, показанными светлыми кружками. Помеченные на рис. 2 римскими цифрами I–IV точки спектральных ветвей $n = 4, 5, 6, 7$ основной серии определяют на рис. 1 максимумы I–IV соответственно, открывающие последовательность максимумов тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния.

Спектральная неоднородность вклада основной серии проявляется прежде всего в том, что влияние точек предыдущих ветвей номеров $n = 1, 2, 3$ в пределах восходящего крыла максимума А основного хода $\sigma(\xi)(0 < \xi \leq 2.5)$ практически отсутствует. Продолжающиеся последовательность максимумов I–IV острые пики появляются на рис. 1 на всем протяжении возрастания эквидистантно и обуславливаются, очевидно, точками спектральных ветвей номеров $n > 7$ основной серии, не показанных на рис. 2. Спектральная неоднородность вклада основной серии в тонкую структуру теперь выражена слабо и проявляется в том, что высота пиков основной серии по мере роста ξ постепенно снижается.

По характеру вклада серий высших порядков в тонкую структуру неотличимы от вкладов основной серии. Так, действие высших серий начинает проявляться после границы серии только через определенный интервал ξ (соответствует, на-

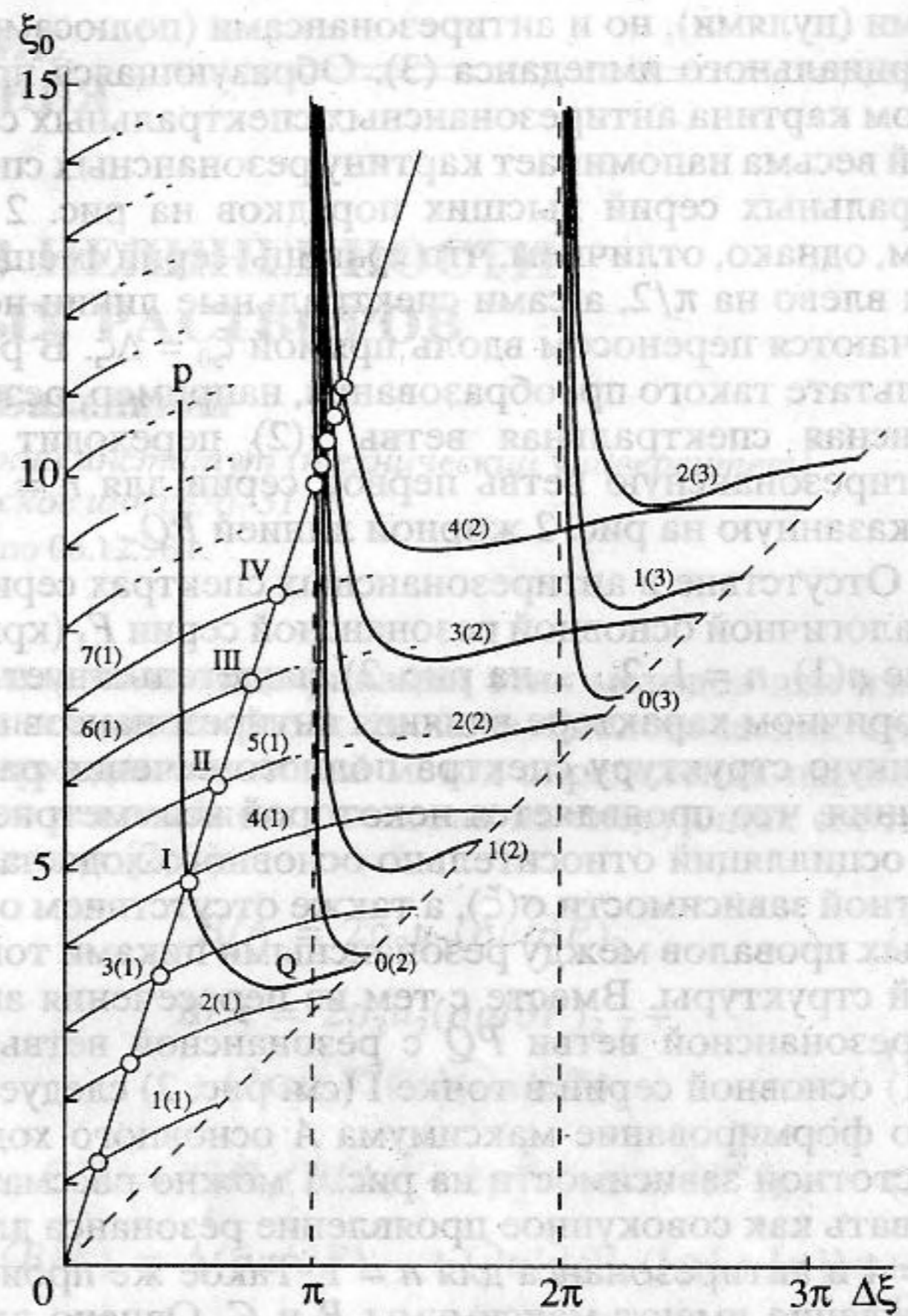


Рис. 2. Траектории координат нулей частичного входного импеданса слоя Z_n в плоскости спектральных переменных $\xi_0, \Delta\xi$. Номера кривых соответствуют номерам $n = 0, 1, 2, \dots$ спектральных ветвей $\xi_0^{(n)}(\Delta\xi)$ в сериях, номера $m = 1, 2, 3$ которых указаны цифрами в круглых скобках. Сплошной прямой линией изображена зависимость $\xi_0 = \Delta\xi(1 - R_0/R)^{-1}$ при $R/R_0 = 1.5$; наклонная штриховая линия соответствует прямой $\xi_0 = \Delta\xi$.

пример, для серий $F_{2,3}$ восходящим крыльям максимумов В, С основного хода зависимости $\sigma(\xi)$ см. рис. 1), а с ростом ξ имеет место уменьшение максимумов. Необходимо отметить, что указанное уменьшение максимумов высших серий по мере роста ξ происходит настолько сильно, что последовательности максимумов высших серий фактически не успевают наложиться друг на друга. Поэтому они присутствуют в спектре тонкой структуры локально: например, детали тонкой структуры спектра, обусловленные серией F_2 , обнаруживаются на вершине и спадающем склоне максимума В, тогда как на вершине и спадающем склоне максимума С (см. рис. 1) в дополнение к основной серии обнаруживается присутствие только серии F_3 .

Следует заметить, что в целом частотная зависимость $\sigma(\xi)$ обуславливается не только резонан-

сами (нулями), но и антирезонансами (полюсами) парциального импеданса (3). Образующаяся при этом картина антирезонансных спектральных серий весьма напоминает картину резонансных спектральных серий высших порядков на рис. 2 с тем, однако, отличием, что границы серий смещены влево на $\pi/2$, а сами спектральные линии получают переносом вдоль прямой $\xi_0 = \Delta\xi$. В результате такого преобразования, например, резонансная спектральная ветвь 1(2) переходит в антирезонансную ветвь первой серии для $n = 1$, показанную на рис. 2 жирной линией PQ.

Отсутствие в антирезонансных спектрах серии аналогичной основной резонансной серии F_1 (кривые $n(1)$, $n = 1, 2, \dots$ на рис. 2) свидетельствует о вторичном характере влияния антирезонансов на тонкую структуру спектра полного сечения рассеяния, что проявляется некоторой асимметрией ее осцилляций относительно основного хода частотной зависимости $\sigma(\xi)$, а также отсутствием острых провалов между резонансными пиками тонкой структуры. Вместе с тем из пересечения антирезонансной ветви PQ с резонансной ветвью 4(1) основной серии в точке I (см. рис. 2) следует, что формирование максимума A основного хода частотной зависимости на рис. 1 можно рассматривать как совокупное проявление резонанса для $n = 4$ и антирезонанса для $n = 1$. Такое же происхождение имеют максимумы B и C. Однако для них пересечение резонансных и антирезонансных ветвей в точке прямой $\xi_0 = \Delta\xi(1 - R_0/R)^{-1}$ приходится на область значений $\xi_0 \gg 1$, что не позволяет воспользоваться рис. 2 с целью геометрической иллюстрации данного результата.

В заключение заметим, что в реальных условиях из-за наличия потерь в материалах большин-

ство деталей тонкой структуры спектра полного сечения рассеяния будет нивелироваться. Поэтому наблюдению окажутся доступны только наиболее характерные особенности спектра.

Автор признателен К.В. Крутицкому за помощь при выполнении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Низкочастотное резонансное рассеяние звука ограниченными цилиндрическими оболочками. Обзор // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 561–577.
2. *Flax L., Gaunard G., Uberall H.* Theory of resonance scattering. Physical Acoustics. V. 15. N.Y.: Acad., 1981.
3. *Векслер Н.Д.* Резонансное рассеяние в гидроакустике. Таллин: Валгус, 1984.
4. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972.
5. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
6. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
7. *Яковлев В.В.* Дифракция акустических волн на абсолютно жестком цилиндре, окруженном слоем неоднородной жидкости // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 6. С. 920–928.
8. *Кинг Р., У Тай-Цзунь.* Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М.: ИЛ, 1962.
9. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
10. *Григорьян Ф.Е.* Теория распространения звуковых волн в криволинейных волноводах // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 3. С. 376–384.
11. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. М.: Мир, 1980.

Partial Resonances in the Fine Structure of the Total Scattering Cross Section Spectrum

N. S. Shevyakhov

This work discusses a relation between the fine structure of the spectrum of the total scattering cross section (TSCS) in the diffraction of a plane monochromatic axial shear wave by a cylindrical cavity in an elastic medium and the partial resonances of an isotropic slow-wave layer of a foreign material lining the cavity. A classification of the fine structure of the TSCS based on the spectral series representation is proposed. We established that the TSCS fine structure is primarily determined by the fundamental series, which, in contrast to the higher-order series, has no boundary of admissible layer thicknesses. The property that the contribution of the higher-order series into the TSCS frequency characteristic is localized near maxima of its general oscillatory behavior is revealed.