

УДК 534.22

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЯМИ

© 1999 г. А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян

Институт механики НАН Армении
375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б
E-mail: mechins@pnas.sci.am

Поступила в редакцию 16.02.98 г.

Изучается распространение нелинейной волны в полубесконечной твердой вязкой среде с полостями, а также в слое, с учетом геометрической, физической и полостной нелинейностей. Выведены трехмерные эволюционные уравнения и найдены трехмерные солитонные решения при наличии дисперсии и диссипации. Выведены нелинейные уравнения модуляции для одномерных и дифракционных задач. Получены аналитические решения в рамках узких пучков для приосевых и неприосевых лучей.

В настоящее время достаточно хорошо изучено распространение волн с пузырьками газа [1–6]. В этих работах изучается система уравнений, состоящая из уравнений гидродинамики и колебаний пузырька. Аналогичную физическую картину можно наблюдать, когда упругая волна распространяется в твердой среде, где существуют полости. Последние под воздействием волны могут колебаться. Следовательно, можно пользоваться идеями из гидродинамики. Подобная попытка сделана в книге [1], где выводится уравнение теории упругости и уравнение колебаний полостей. Там ограничиваются одномерным приближением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется полубесконечная изотропная вязкая (модель Фойхта) среда с полостями, в которой распространяются волны с конечной амплитудой (т.е. нелинейные волны при учете геометрической, физической и полостной нелинейностей). Матрица (основная среда) считается однородной. Предполагается, что расстояние между полостями l намного больше радиуса полостей R_0 ($l \gg R_0$), но гораздо меньше длины волны λ_1 ($l \ll \lambda_1$). Предполагается, что давлением в полостях можно пренебречь и что в среде распространяется квазипродольная волна, так что можно считать, что давление на полость обусловлено продольным напряжением $\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - z'(\lambda + 2\mu)$,

где $z' = Nv'$, N – количество полостей в единице объема, v' – объем полости, $v' = v_0 + v$, v_0 – начальный объем полости, v – объем полости возмущенной волной, λ и μ – коэффициенты Ламе, причем $\mu \ll \lambda$. При указанных предположениях, основываясь на работах [1, 7], в лагранже-

вых координатах распространение квазипродольной нелинейной волны описывают следующие уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_3^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2} \partial x_3}, \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \Delta_{\perp} u_3 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - N \frac{\partial v}{\partial x_3} (\lambda + 2\mu) + \quad (2)$$

$$+ b \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + p \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v - \frac{R_0}{c_l} \ddot{v} - Gv^2 - \beta_1 (2v\dot{v} + \dot{v}^2) =$$

$$= (2\mu + \lambda) \frac{4\pi R_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - Nv \right), \quad \Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (3)$$

где ρ_0 – начальная плотность матрицы, $\omega_0^2 = 4\mu(\rho_0 R_0)^{-1}$ – квадрат резонансной частоты, $c_l^2 = (\lambda + 2\mu)\rho_0^{-1}$, $G = (16\pi)^{-1}\omega_0^2(9 + 2\beta_1)R_0^{-3}$, $\beta_1 = (8\pi R_0^3)^{-1}$, $p = (4\mu + 3\lambda + 2A + 6B + 2C)$, p – коэффициент, обусловленный геометрической и физической нелинейностями, $b = \xi_1 + \frac{4}{3}\eta_1$ – коэффициент динамической вязкости, $u_{1,2}$ – поперечные, а u_3 – продольные компоненты перемещений, x_i – координаты, t – время. Координаты x_1 и x_2 выбраны в касательной плоскости к невозму-

щенной волне, а x_3 направлена вдоль распространения волны, как в работе [7].

ВЫВОД ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Сперва упростим уравнение (3), считая, что характерная частота волны α гораздо меньше, чем резонансная частота ($\alpha \ll \omega_0$), тогда нелинейным слагаемым в (3) при коэффициенте β_1 можно пренебречь. Главные члены в уравнении (3) есть:

$$v = \frac{F \partial u_3}{D \partial x_3}, \quad (4)$$

где $F = -4\pi R_0(\lambda + 2\mu)\rho_0^{-1}$, $D = \omega_0^2 + FN$. Подставляя (4) в малые члены в уравнении (3), можно получить уточненное уравнение полости

$$v = \frac{F \partial u_3}{D \partial x_3} - \frac{F}{D^2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial t^2} + \frac{R_0 F}{c_1 D} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3 \partial t^3} + \frac{GF^2}{D^3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2. \quad (5)$$

Учитывая (4) и (5), можно исключить в уравнении (2) величину v , тогда получится

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = & (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \mu \Delta_{\perp} u_3 + (\lambda + \\ & + 2\mu)(1 - NFD^{-1}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (\lambda + 2\mu) FND^{-2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - \\ & - R_0 FN(\lambda + 2\mu)(c_1 D)^{-2} \frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^3} + \\ & + [p - 2GF^2 N(\lambda + 2\mu) D^{-3}] \frac{\partial^2 u_3 \partial u_3}{\partial x_3^2 \partial x_3} + b \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Итак, уравнение (6) следует решать совместно с уравнениями (1). Перейдем к новой координате $\tau_1 = (l_1 - x_3)c_1^{-1} - t = \tau'_1 - t$. Так как в дальнейшем будет рассмотрен слой с толщиной l_1 , удобно выбрать τ_1 в указанном выше виде, при полубесконечном случае $l_1 = 0$ и ось x_3 направлена противоположно распространению волны. В главном порядке после перехода к переменной τ_1 можно получить значение c_1 , для которого

$$c_1^2 = c_1^2 (1 - NFD^{-1}).$$

Вводя новую функцию $\psi_1 = \frac{\partial u_3}{\partial \tau_1}$, характеризующую скорость частиц среды (матрица) в переменных x_1, x_2, x_3 и τ_1 , после исключения по (1) поперечных перемещений u_1 и u_2 при учете приня-

тых порядков [7, 8], получится следующее эволюционное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau_1 \partial x_3} + L \Delta_{\perp} \psi_1 = & \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \right) + \\ & + \delta \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \tau_1^3} + \beta \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \tau_1^4} + \gamma \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial \tau_1^5}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} L = & -[\mu + (\lambda + \mu)^2 (\rho_0 c_1^2 - \mu)^{-1}] M^{-1}, \\ M = & 2c_1^{-1} (1 - NFD^{-1}) (\lambda + 2\mu) = 2c_1 \rho_0^{-1}, \\ \alpha_1 = & Mc_1^{-3} [p - 2GF^2 N(\lambda + 2\mu) D^{-3}], \\ \delta = & bc_1^{-2} M^{-1}, \\ \beta = & FN(\lambda + 2\mu) c_1^{-2} D^{-2} M^{-1}, \\ \gamma = & R_0 NF(\lambda + 2\mu) c_1^{-2} c_1^{-2} D^{-2} M^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (8), член с коэффициентом β связан с дисперсией и обусловлен полостями, а δ и γ обуславливают диссипацию, причем δ — вязкостную, а γ — связан с полостями, при этом, когда $R_0 = 0$, $\beta = \gamma = 0$.

СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (7)

В уравнении (7) перейдем к новой функции $U = -\frac{\alpha_1}{6} \psi_1$, тогда полученное уравнение будет таким, как и (7), только вместо ψ_1 будет U , а вместо α_1 — минус шесть. Если в полученном уравнении полагать $\delta = \gamma = 0$ и $\beta = -\beta_2$, то с точностью до коэффициентов получится уравнение Кадомцева-Петвиашвили [9], которое имеет солитонное решение [10] в следующем виде:

$$U_0 = \frac{C}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{C} \xi_1}{2a\sqrt{\beta_2}} \right), \quad (9)$$

где $\xi_1 = a\tau_1 + b_2 x_1 + d_2 x_2 - kx_3$, $C = [ak - L(b_2^2 + d_2^2)] a^{-2}$, причем $C \geq 0$, $a > 0$, b_2 и d_2 показывают наклон плоскости фронта ($\xi_1 = \text{const}$) солитона к оси x_3 . Нормальная скорость солитона имеет вид:

$$V_c^2 = \frac{a^2}{(ac_1^{-1} - k)^2 + b_2^2 + d_2^2}.$$

Постоянные a и k — некоторые характерные частота и волновое число процесса.

Решение уравнения для U будем искать в виде

$$U = U_n(\xi_1). \quad (10)$$

После подстановки (10) в уравнение для U , дважды интегрируя с учетом, что U стремится к нулю при стремлении ξ_1 в бесконечность, получится следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a^2 \beta_2 \frac{d^2 U_n}{d\xi_1^2} + 3U_n^2 - CU_n = \delta a \frac{dU_n}{d\xi_1} + a^3 \gamma \frac{d^3 U_n}{d\xi_1^3}. \quad (11)$$

Для отличных от нуля, но малых по сравнению с β коэффициентов δ и γ , что означает малость диссипации, решение уравнения (11) можно найти методом медленно меняющейся амплитуды [11]. Тогда оно ищется в виде

$$U_n = U_0(\xi_1)[1 + T_3(\xi_1)], \quad (12)$$

причем требуется выполнение неравенств

$$T_3 \ll 1, \quad \frac{d^2 T_3}{d\xi_1^2} \ll \frac{dT_3}{d\xi_1} \ll T_3. \quad (13)$$

Неравенство (13) означает, что из-за малой диссипации форма солитона мало и медленно меняется и функция $T_3(\xi_1)$ мала по величине. Подставляя (12) в уравнение (11), учитывая неравенства (13) для T_3 можно получить

$$T_3 = \frac{a\delta}{3U_0} \frac{dU_0}{d\xi_1} + \gamma \frac{a^3}{3U_0} \frac{d^3 U_0}{d\xi_1^3}. \quad (14)$$

После подстановки (9) в выражение (14) для функции T_3 получится

$$T_3 = \frac{1}{3(C\beta_2)^{1/2}} \times \quad (15)$$

$$\times \left[\frac{6\gamma C}{\beta_2} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{C}\beta_2^{-1/2}}{2a} \xi_1 \right) - \left(\delta + \frac{\gamma C}{\beta_2} \right) \operatorname{sh} \left(2 \frac{\sqrt{C}}{2a\sqrt{\beta_2}} \xi_1 \right) \right].$$

В выражении (15) при стремлении ξ_1 к бесконечности T_3 тоже стремится к бесконечности, т.е. не выполняются неравенства (13). Поэтому решение (15) имеет смысл только вблизи вершины солитона, тогда для малых ξ_1 решение (15) можно преобразовать к виду

$$T_3 = \xi_1 [4\gamma C \beta_2^{-1} - 2\delta] (6a\beta_2)^{-1} = T_2 (6a\beta_2)^{-1} \xi_1. \quad (16)$$

Из (16) следует, что $T_3 > 0$, если ξ_1 одного знака с T_2 , и $T_3 < 0$, если ξ_1 и T_2 противоположных знаков. Искажение формы солитона из-за диссипации качественно, но наглядно изображено на рис. 1 и 2, где пунктирная кривая соответствует функции (9), при $T_3 = 0$, а сплошная – функции U_n . Следует

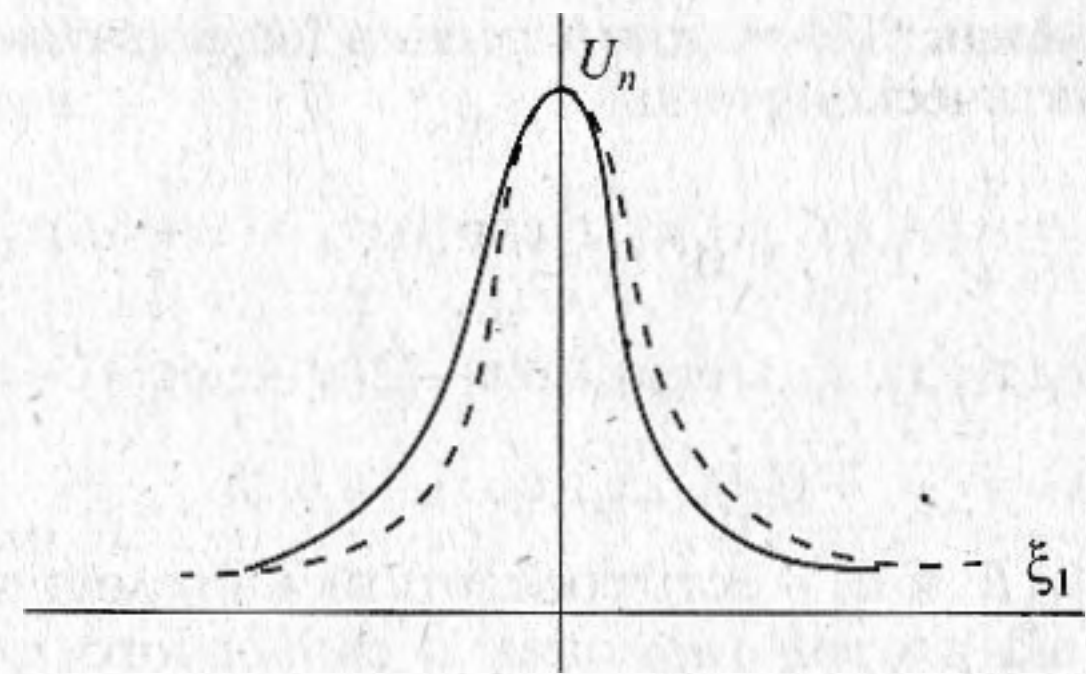


Рис. 1. Профиль солитона в случае $T_2 > 0$.

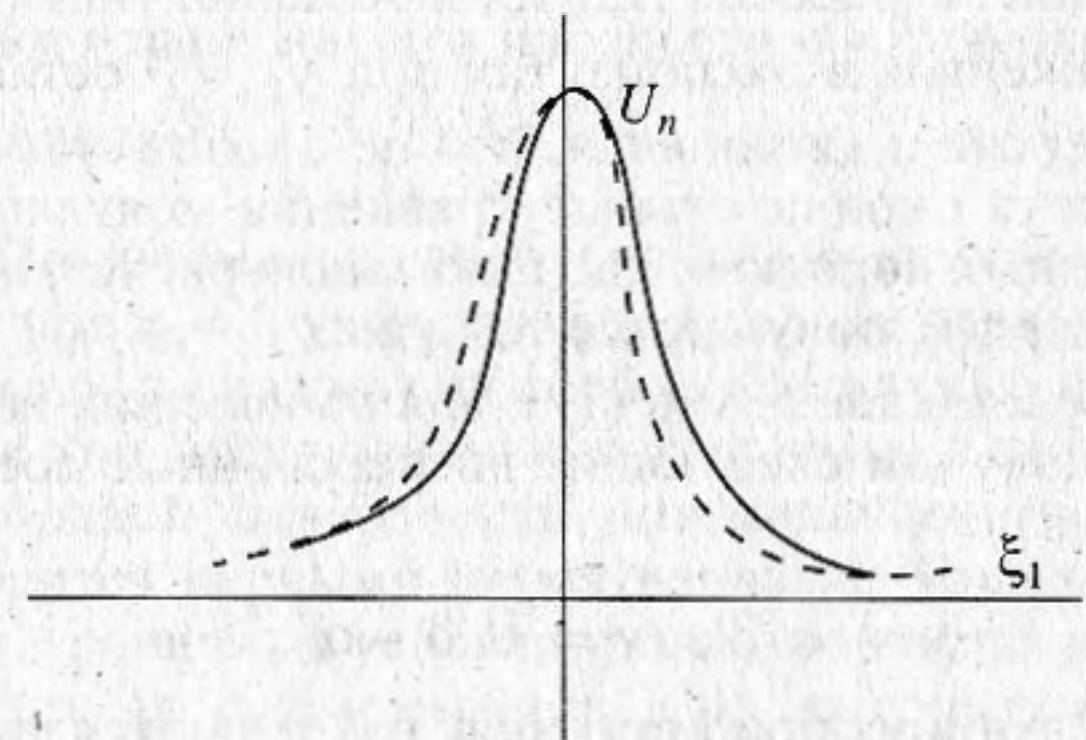


Рис. 2. Профиль солитона в случае $T_2 < 0$.

отметить, что возможен также случай $T_2 = 0$, который означает, что в диссипативной среде возможно распространение такого же солитона, как в недиссипативной среде.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОЙ И ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН

Поскольку нас будут интересовать не только стационарные, но и нестационарные задачи, в уравнении (7) заменяем $\frac{\partial}{\partial x_3} = c_1^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$, тогда из (7) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial \tau_1} + L' \Delta_{\perp} \psi_1 &= \alpha'_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \right) + \\ &+ \delta' \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \tau_1^3} + \beta' \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \tau_1^4} + \gamma' \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial \tau_1^5}, \end{aligned} \quad (17)$$

где штрихованные коэффициенты получатся из коэффициентов (8) умножением на минус c_1 . Так как в среде есть дисперсия и диссипация, решение

уравнения (17) можно искать в виде квазимонохроматической волны

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{1}{2} \{ A_1(\tau'_1, x_1, x_2, t) \exp[i\alpha\tau_1 - (v + i\omega)\tau'_1] + \\ & + B_1(\tau'_1, x_1, x_2, t) \exp[2i\alpha\tau_1 - 2(v + i\omega)\tau'_1] + \\ & + C_1(\tau'_1, x_1, x_2, t) + \text{к.с.} \}, \end{aligned} \quad (18)$$

где A_1 , B_1 и C_1 — есть соответственно амплитуды первой, второй гармоник и свободного члена, α — несущая частота, ω — модуляционная частота, а v — коэффициент поглощения. При $\tau'_1 = 0$ на границе среды задается монохроматическое колебание. В работах [12, 13] в решении типа (18) в выражениях в экспонентах при $\tau'_1 = 0$ остаются дисперсия и диссипация, что не очень естественно, хотя окончательные уравнения модуляции в основных порядках, как показано в расчетах данной статьи, получаются теми же.

Подставляя (18) в (17), для наивысших порядков получим следующие дисперсионные соотношения

$$\omega = \alpha^3 \beta', \quad v = \alpha^2 \delta' - \alpha^4 \gamma'. \quad (19)$$

В следующих приближениях различаются две задачи: дифракционная и одномерная, для которых имеют место разные порядки величин. В обоих случаях можно получить следующее модуляционное уравнение для первой гармоники

$$\begin{aligned} i\alpha \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{d\Omega}{d\alpha} \frac{\partial A_1}{\partial \tau'_1} \right) + \frac{\alpha d^2 \Omega}{2 d\alpha^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau'^2_1} + L \Delta_{\perp} A_1 = \\ = (i\alpha - 3v - i\omega) \frac{2\alpha'}{2} A_1^* B_1 \exp(-2v\tau'_1) + \\ + \alpha' (i\alpha - v - i\omega)^2 C_1 A_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\Omega = \alpha + \omega - iv$ — комплексная линейная частота. При вычислении коэффициента при $\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau'^2_1}$ в одномерной задаче использовано равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\Omega}{d\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau'_1} = 0, \quad (21)$$

получаемое из главного члена в уравнении (20).

Уравнение для амплитуды второй гармоники B_1 после отбрасывания производных, что возможно в случае $\omega\tau'_1 \gg 1$, для обеих задач получится в виде

$$4(3\omega - iv + 6i\alpha^4 \gamma') B_1 = \alpha' \alpha A_1^2. \quad (22)$$

Свободный член C_1 в дифракционной задаче имеет порядок $C_1 \sim \epsilon^3$, $v\epsilon^3$, ϵ — некоторый малый параметр, характеризующий порядок Ψ_1 , причем

$\alpha \sim \epsilon^{-1}$, $x_{1,2} \sim \epsilon^{1/2}$, тогда слагаемое с C_1 в (20) можно отбросить.

Чтобы получить уравнения для C_1 в одномерной задаче, в члене $\frac{\partial^2 C_1}{\partial t \partial \tau'_1}$ исключается производная по t согласно (21), при этом получится уравнение для свободного члена

$$\begin{aligned} \left(\frac{2iv}{\alpha} - \frac{3\omega}{\alpha} - 2i\alpha^3 \gamma' \right) \frac{\partial^2 C_1}{\partial \tau'^2_1} = \\ = -\frac{\alpha}{2} \left(v \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau'_1} - \frac{\partial^2 |A_1|^2}{\partial \tau'^2_1} \right) \exp(-2v\tau'_1), \end{aligned} \quad (23)$$

Для интегрирования уравнения (23) рассмотрены два случая: 1) $v\tau'_1 \gg 1$, тогда $\exp(-2v\tau'_1) \approx 0$ и по (23) $C_1 \approx 0$, так что аналогично дифракционной задаче свободный член не дает вклада в уравнении (20), 2) $v\tau'_1 \ll 1$, тогда $v \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau'_1} \ll \frac{\partial^2 |A_1|^2}{\partial \tau'^2_1}$ и из (23) получится

$$4 \left(-\frac{3\omega}{\alpha} + \frac{2iv}{\alpha} - 2i\alpha^3 \gamma' \right) C_1 = \alpha' |A_1|^2. \quad (24)$$

В одномерной задаче в случае 1) из (20) получается линейное уравнение. В случае 2), исключая из уравнения (20) B_1 и C_1 с помощью (22) и (24), можно получить, с учетом $\alpha \gg v, \omega$, следующее уравнение:

$$\begin{aligned} i\alpha \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{d\Omega}{d\alpha} \frac{\partial A_1}{\partial \tau'_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Omega}{d\alpha^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau'^2_1} = \\ = \frac{\alpha'^2}{4} \left[\frac{1}{2(-3\omega + iv - 6i\alpha^4 \gamma')} - \right. \\ \left. - (2iv - 3\omega - 2i\alpha^4 \gamma')^{-1} \right] A_1 |A_1|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что в отличие от дифракционной задачи вклад C_1 в нелинейный член существенен.

В дифракционной задаче из (20), учитывая малость члена $\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau'^2_1}$ и отбрасывая C_1 , можно найти

$$\begin{aligned} i\alpha \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{d\Omega}{d\alpha} \frac{\partial A_1}{\partial \tau'_1} \right) + L \Delta_{\perp} A_1 = \\ = \frac{\alpha'^2 \alpha |A_1|^2 A_1 \exp(-2v\tau'_1)}{8(iv - 3\omega - 6i\alpha^4 \gamma')}. \end{aligned} \quad (26)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
О ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ В СЛУЧАЕ СЛОЯ

Вначале рассмотрим задачу об акустических волнах в резонаторе, аналогичную оптической задаче о волнах в бесдиссипативном интерферометре [14]. В этом случае предполагается, что имеется два симметричных относительно плоскости $x_3 = 0$ акустических зеркала, которые являются поверхностями постоянной фазы для распространяющихся вправо и влево волн, каждая из которых удовлетворяет граничному условию на своем зеркале. В такой постановке в силу симметрий при $x_3 = 0, u_3 = 0$. Эта задача соответствует акустическому интерферометру [15], в котором левое зеркало служит источником колебаний, а справа имеется плоский жесткий рефлектор и указанная постановка приводится к предыдущей задаче, в которой есть две волны. Аналогично этому, в случае, когда имеется слой, на одном торце которого заданы колебания, а другой торец свободен от напряжений, можно считать, что имеются две распространяющиеся друг против друга волны. При этом, идущая вправо волна удовлетворяет условию на излучателе, а отраженная от свободной поверхности волна вместе с падающей волной удовлетворяют условию на свободной поверхности. Этот вывод следует из сравнения с простым случаем распространения упругой одномерной линейной волны в слое, причем при $x_3 = 0$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \text{ а при } x_3 = l \ u_3 = e^{-i\alpha t}.$$

Решение волнового уравнения $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = c_1^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$ при указанных граничных

уравнениях при отсутствии начальных условий имеет вид

$$u_3 = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha l_1}{c_1} \right]^{-1} \times \left[\exp \left(i \frac{\alpha}{c_1} x_3 - i\alpha t \right) + \exp \left(-i \frac{\alpha}{c_1} x_3 - i\alpha t \right) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, для монохроматической волны решение в резонаторе представляет распространяющиеся навстречу друг другу две волны. Аналогично этому для квазимонохроматических волн типа (18) получаются две идущих навстречу друг другу волны, амплитуды которых будут медленно меняющимися функциями за счет дисперсии, диссипации, нелинейности и дифракции.

Тот же вывод получается для резонатора, когда $u_3(x_3 = 0) = 0$ при этом в формуле u_3 перед вторым слагаемым следует поменять знак и разделить вместо косинуса на $i \sin \frac{\alpha}{c_1} l_1$.

Формулу (27) для u_3 можно представить также в виде:

$$u_3 = \left\{ \exp \left[-i(x_3 - l_1) \frac{\alpha}{c_1} - i\alpha t \right] + \exp \left[i(x_3 + l_1) \frac{\alpha}{c_1} - i\alpha t \right] \right\} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp \left(2i \frac{\alpha n l_1}{c_1} \right). \quad (28)$$

Для высокочастотных волн ($\alpha \gg c_1 l_1^{-1}$) вклад в асимптотику решения дают лишь слагаемые в фигурной скобке, которые соответствуют падающей и отраженной от плоскости $x_3 = 0$ волнам, т.е. эйконалам τ_1 и τ_2 , где $\tau_2 = (x_3 + l_1) c_1^{-1} - t$.

При этом, как следует из (28), граничное условие при $x_3 = l_1$ удовлетворяет только первым слагаемым в квадратной скобке. Остальные слагаемые там будут взаимно погашаться. Условие на свободной поверхности автоматически удовлетворится первыми двумя членами. Таким образом, граничные условия удовлетворяются первыми двумя слагаемыми в (28), которые можно брать в качестве идущих направо и налево волн, а остальные слагаемые (с точностью до знака, для задачи со свободной границей и соответственно точно для задачи о рефлекторе) периодически повторяют первые два члена в (28) и могут быть включены в указанные две волны, что приводит к вышеуказанной постановке задачи.

В работах [12, 13, 16, 17] для высокочастотной асимптотики записано решение квазилинейных систем уравнений в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит от своего эйконала. В предположении равенства нулю в основных порядках малости среднего значения искомым функций по своим эйконалам, система уравнений, описывающая волны, распространяющиеся вправо (однократно штрихованные, эйконал τ_1) и влево (двукратно штрихованные, эйконал τ_2) расщепляется на два независимых нелинейных уравнения. Условие равенства нулю средних по эйконалам значений функций выполняется как для дифракционных задач, в которых $C_{1,2}$ пренебрежимо малы, так и для одномерных задач, в которых $C_1 = C_2$, где C_2 – свободный член отраженной волны. Уравнение (7) будет для падающей волны. Для отраженной волны получится уравнение типа (7), где заменены ψ_1 на ψ_2 и τ_1 на τ_2 , при-

чем $\psi_2 = -\frac{\partial u_3''}{\partial \tau_2}$. Аналогично следует записать уравнения (18)–(26), где в амплитудах и эйконалах следует заменить индекс один на два.

ДИФРАКЦИОННАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ УЗКИХ ПУЧКОВ

Из уравнения (26), полагая $\frac{d\Omega}{d\alpha} \approx 1$ и для стационарной задачи $\frac{\partial A_1}{\partial t} = 0$ получим уравнение

$$i\alpha \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} + L\Delta_{\perp} A_1 = (\kappa_1 + i\kappa_2)|A_1|^2 A_1, \quad (29)$$

где $\kappa_1 = 3\omega\xi$, $\kappa_2 = (v - 6\alpha^4\gamma')\xi$,

$$\xi = \frac{\alpha'^2 \alpha}{8} [9\omega^2 + (v - 6\alpha^4\gamma')^2]^{-1} \exp(-2v\tau_1).$$

В случае резонатора такое же уравнение получится для падающей волны A_1' , а для отраженной волны следует заменить в (29) A_1 на A_1'' и τ_1 на $\tau_2' = (x_3 + l_1)c_1^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем писать решения для уравнения (29).

Записывая

$$A_1 = a_1 \exp(i\phi_1), \quad (30)$$

где ϕ_1 — возмущенный эйконал, а a_1 — действительная амплитуда, подставляя (30) в уравнение (29), отделяя мнимые и действительные части, переходя к цилиндрическим координатам для осесимметричной задачи, получим уравнения для a_1 и ϕ_1 . Решение последних ищется в виде

$$a_1 = b_1 f_1^{-1} \exp\left[-\frac{r^2}{2}(r_1 f_1)^{-2}\right], \quad (31)$$

$$\phi_1 = \sigma_1(\tau_1) + \frac{r^2}{2} R_1^{-1}(\tau_1),$$

где f_1 — безразмерная ширина пучка, σ_1 — набег фазы волны на оси пучка, $\alpha R_1 c_1^{-1}$ — переменный радиус кривизны фронта волны, b_1 и r_1 — амплитуды и радиус пучка на границе $x_3 = l_1$. Подставляя (31) в уравнения для a_1 и ϕ_1 , обычным образом [7, 12, 13] получим следующую систему уравнений:

$$R_1^{-1} = \frac{\alpha}{2L} \frac{df_1}{f_1 d\tau_1} + \frac{\kappa_2 b_1^2}{2L f_1^2}, \quad (32)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\tau_1} = -2(\alpha L r_1^2 f_1^2)^{-1} - \kappa_1 b_1^2 (\alpha f_1^2)^{-1} = G f_1^{-2}, \quad (33)$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau_1'^2} = \frac{M}{f_1^3} + \frac{\kappa_2 v b_1^2}{\alpha L f_1}, \quad (34)$$

где

$$M = \alpha^{-2} [L^2 r_1^{-4} + 2\kappa_1 b_1^2 L r_1^{-2} - \kappa_2^2 b_1^4]. \quad (35)$$

Для отраженной волны имеют место уравнения (32)–(35), где следует индекс 1 заменить на 2 для R_1 , σ_1 , f_1 , b_1 и r_1 , а остальные величины заменить соответствующими штрихованными величинами.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Поскольку постановка задач для интерферометра и свободной границы аналогичны, рассмотрим вначале случай свободной границы. Для механических величин должны быть заданы условия на торцах слоя ($x_3 = 0$ и $x_3 = l_1$). Первое из них в плоскости ($x_3 = l_1$) или $\tau_1' = 0$ относится к падающей волне. Предполагается, что в этой плоскости задается пучок с гауссовским профилем и выполняются следующие условия:

$$f_1(0) = 1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau_1'} = F, \quad \sigma_1(0) = 0, \quad (36)$$

$$F = \frac{2L}{\alpha} \left[R_1^{-1}(0) - \frac{\kappa_2}{2} b_1^2 L \right].$$

Уравнения (32)–(34) будем решать с граничными условиями (36). Для отраженной волны граничные условия заданы в плоскости $x_3 = 0$, в которой предполагается, что $\sigma_{32} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0$. В наивысшем порядке эти уравнения расщепляются, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. В наивысшем порядке условие $\sigma_{33} = 0$ дает

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (37)$$

В наивысшем порядке автоматически выполняется условие $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$.

Поступая аналогично [12, 13], можно получить для параметров пучка в плоскости $x_3 = 0$, $\tau_1' = l_1 c_1^{-1}$ следующие условия:

$$b_1 = -b_2, \quad f_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = f_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right), \quad R_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = R_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right),$$

$$\sigma_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = \sigma_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right), \quad \frac{df_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right)}{d\tau_1'} = \frac{df_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right)}{d\tau_2'}. \quad (38)$$

Уравнения (32)–(34), написанные для отраженной волны, следует решать с граничными условиями (38). Из второго условия (38) следует, что всюду $r_1 = r_2$.

В случае интерферометра условие (36) имеет место для падающей волны. Вместо условия (37)

будет $u_3 = 0$. Условие (38) остаются в силе, только первое равенство заменяется на $b_1 = b_2$.

УРАВНЕНИЕ БЕЗРАЗМЕРНОЙ ШИРИНЫ ПУЧКА ДЛЯ НЕПРИОСЕВЫХ ЛУЧЕЙ

Уравнения (32)–(34) получены для приосевых лучей приравниванием нулевой и второй степени радиальной координаты. Более общий подход для неприосевых лучей состоит в выборе уравнений (32) и (33), имеющих место на оси пучка, а взамен уравнения (34) берется интегральный закон сохранения, следующий из уравнения (29). В случае $\kappa_2 = 0$ этот метод был применен в [18], где показано, что решение имеет такой же вид, что и для приосевых лучей, только коэффициент κ_1 заменяется на $\frac{\kappa_1}{4}$, что лучше отражает характер численного решения уравнения Шредингера. Для $\kappa_2 \neq 0$, когда учитывается нелинейное поглощение, умножаем уравнение (29) на $\frac{\partial A_1^*}{\partial \tau_1}$, где A_1^* – комплексное сопряженное A_1 . Умножим сопряженное для (29) уравнение на $\frac{\partial A_1}{\partial \tau_1}$, сложим эти два уравнения, проинтегрируем их по цилиндрическим координатам r и θ . Тогда для случая осесимметричной задачи получится

$$\begin{aligned} & -\frac{L}{2} \frac{d}{d\tau_1} \left\{ \int_0^\infty \left[\left| \frac{\partial A_1}{\partial r} \right|^2 + \frac{\kappa_1}{2} |A_1|^4 \right] r dr \right\} = \\ & = i\kappa_2 \int_0^\infty |A_1|^2 \left(A_1 \frac{\partial A_1^*}{\partial \tau_1} - A_1^* \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} \right) r dr. \end{aligned} \tag{39}$$

Подставляя значение A_1 , как в (30) и используя (32), (33), можно получить вместо (34) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} f_1'' = & \left(f_1' + \frac{b_1^2 \kappa_2}{4\alpha f_1} \right)^{-1} \left\{ f_1' \left[\left(\frac{L^2}{\alpha^2 r_1^4} + \frac{b_1^2 \kappa_1 L}{2r_1^2 \alpha^2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3\kappa_2^2 b_1^4}{2\alpha^2} \right) f_1^{-3} + \frac{\kappa_2 b_1^2}{\alpha} f_1^{-2} \right] + \\ & + \frac{\kappa_2 b_1^2}{\alpha f_1} [2\nu + (f_1')^2 (4f_1)^{-1}] + \frac{5\kappa_2^2 b_1^4 \nu}{2\alpha^2 f_1^2} + \\ & \left. + \left(\frac{L}{r_1^2} + \kappa_1 b_1^2 \right) L \kappa_2 b_1^2 f_1^{-4} r_1^{-2} \alpha^{-3} \right\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Полученное уравнение (40) следует решать при граничных условиях (36) и (38) численно. Поскольку численное решение уравнений (40) и (34) имеют одинаковую трудность, предпочтительно решать более точное уравнение (40). В предположении малой и большой диссипации можно полагать во всей фигурной скобке $\kappa_2 = 0$. При этом получится совпадение с (34), только в последнем следует заменить κ_1 на $\frac{\kappa_1}{4}$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗРАЗМЕРНОЙ ШИРИНЫ ПУЧКА ДЛЯ ПРИОСЕВЫХ ЛУЧЕЙ

Решение уравнения (34) будем искать в случае слабого и сильного поглощения. В первом случае $\nu\tau_1$ и $\nu\tau_2$ малы и экспоненты, входящие в $\kappa_{1,2}$, можно считать равными единице. В случае сильного поглощения экспоненты можно считать нулями и задача будет линейной. В обоих случаях сильного и слабого поглощения второе слагаемое в правой части уравнения (34) можно отбросить.

С учетом вышесказанного, решение (34) с условиями (36) для $M < 0$ и $M > 0$ имеет вид

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2 + M} + (F^2 + M) \left(\tau_1' + \frac{F}{F^2 + M} \right)^2.$$

Для отраженной волны с учетом граничных условий (38) решение (34) имеет вид

$$f_2^2 = \left[F_1^2 + \frac{M}{f_1^2(0)} \right] [\tau'' + F_1 f_1(0)]^2 + \frac{M}{F_1^2 + M f_1^{-2}(0)},$$

где

$$F_1 = \frac{df_1(0)}{d\tau'}, \quad \tau' = -x_3 c_1^{-1}, \quad \tau'' = x_3 c_1^{-1}.$$

Таким образом, получены решения узких пучков в волноводах, позволяющие изучить их фокусирование.

Акустические характеристики пористых сред и силы, действующие на сферический объект, в осесимметричном волновом поле изучены в статьях [19, 20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 234 с.
2. Наугольных К.А., Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейная акустика // Нелинейные волны. М.: Наука, 1981. С. 166–187.
3. Заболотская Е.А., Солуян С.И. Изучение гармоник и комбинационных частот воздушными пузырьками // Акуст. журн. 1972. Т. 26. № 3. С. 472–475.

4. Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 237 с.
5. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Распространение волн в микрополярированной электропроводящей жидкости // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1983. Т. 36. № 5. С. 3–16.
6. Бункин Ф.В., Кравцов Ю.А., Ляхов Г.А. Акустические аналоги нелинейных оптических явлений // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149. № 3. С. 391–411.
7. Bagdoyev A.G., Shekoyan A.V. Focusing of nonlinear ultrasonic waves in viscous thermoelastic materials with spherical inclusions // Phys. stat. solid(a). 1985. V. 89. P. 449–507.
8. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
9. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.
10. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 198 с.
11. Чугаевский Ю.В. Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. Кишинев: Изд. Штиница, 1974. 181 с.
12. Багдоев А.Г., Шекоян В.С. Распространение волнового пучка в вязкоупругом диспергирующем нелинейном предварительно деформированном слое со свободной поверхностью // Изв. РАН, Мех. тв. тела. 1996. № 6. С. 93–101.
13. Bagdoyev A.G., Shekoyan A.V. Wave beams in viscoelastic dispersive nonlinear initially deformed medium with free surface // Int. J. Nonlinear Mech. 1997. V. 32. № 2. P. 385–392.
14. Marburger J.H., Felber F.S. Theory of lossless nonlinear Fabry–Perot interferometer // Phys. Rev. A. 1978. V. 17. № 1. P. 335–342.
15. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. М.: Изд-во “Советская энциклопедия”, 1979. 400 с.
16. Канер В.В., Руденко О.В. О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ., астроном. 1978. Т. 19. С. 78–85.
17. Carbonaro P. High frequency waves in quasilinear inviscid gasdynamics // Z. Angew. Math. Phys. 1986. V. 37. № 1. P. 43–52.
18. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
19. Frederickson C.K., Sabotier J.M., Raspet R. Acoustic characterization of rigid-frame air-filled porous media using both reflection and transmission measurements // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 99. № 3. P. 1326–1332.
20. Chen Xucai, Apfel Robert E. Radiation force on a spherical object in an axisymmetric wave field and its application to the calibration of high-frequency transducers // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 99. № 2. P. 713–724.

Nonlinear Waves in a Solid Viscous Medium with Cavities

A. G. Bagdoyev and A. V. Shekoyan

Propagation of nonlinear waves in both a semi-infinite solid viscous medium containing cavities and a layer is studied with allowance for geometric, physical, and cavity nonlinearities. Three-dimensional evolutionary equations are derived and three-dimensional soliton solutions for the media with dispersion and dissipation are found. Nonlinear modulation equations for one-dimensional and diffraction problems are derived. Analytical solutions for paraxial and nonparaxial rays in the case of narrow beams are obtained.