

УДК 534.22

## УЕДИНЕННЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЕ

© 1999 г. В. Г. БЫКОВ

Институт тектоники и геофизики ДВО РАН

680063 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65

e-mail: tectonic@itig.khabarovsk.su

Поступила в редакцию 06.12.96 г.

Представлена математическая модель деформирования зернистой среды с вязкими прослойками в контактах зерен, приводящая к “возмущенному” уравнению  $\sin$ -Гордона. Предположение о пропорциональности силы сопротивления шероховатых поверхностей контакта зерен квадрату скорости течения вещества прослойки позволяет получить точное аналитическое решение в виде уединенной сдвиговой волны. Представлены результаты расчетов зависимости скорости уединенной волны от параметра трения, вязкости вещества прослойки и отношения толщины к длине прослойки. Показано, что скорость уединенной волны всегда меньше скорости поперечной сейсмической волны.

Из экспериментов [1, 2] и теории [3, 4] известно, что зернистые среды обладают сильными нелинейными свойствами, основной причиной которых являются микротрещины и границы зерен. Поэтому при описании нелинейных акустических волн в зернистых средах особое внимание уделяется контактному взаимодействию и связанным с ними эффектам, не находящим объяснения в линейной теории упругости. Отсюда и появляется необходимость построения и исследования новых математических моделей деформирования зернистых сред. Наибольший интерес в этом смысле вызывают случаи, когда “классические” нелинейные уравнения, аналитические решения которых хорошо изучены в различных областях физики, возникают как реалистические модели генерации и распространения сейсмоакустических волн в зернистых средах [5–7 и др.]. Одним из таких уравнений является впервые полученное при описании дислокаций в кристаллах [8] уравнение  $\sin$ -Гордона, успешно использованное затем в теории ферромагнетизма, квантовой оптике, физике элементарных частиц. Однако для зернистой среды уравнение  $\sin$ -Гордона построено совсем недавно [9, 10] при математическом моделировании сейсмических и деформационных процессов, обусловленных микровращениями зерен (блоков).

В предлагаемой работе рассмотрено формирование уединенных волн при сдвиге (межзерновом скольжении) в зернистых средах с диссипацией в контактах зерен, приводящем к “возмущенному” уравнению  $\sin$ -Гордона.

Зернистая среда представляет собой соприкасающиеся друг с другом зерна, в контактах которых находятся шероховатые поверхности, а в промежутках между ними – вязкая прослойка (рис. 1а). Схема смещения слоев при межзерновом скольжении и изменения контакта зерен при сдвиге показана на рис. 1б, 1в, где введены обозначения:  $\delta$  –

толщина межзерновой прослойки,  $d$  – диаметр кругового контакта,  $a$  – расстояние между центрами зерен,  $r$  – радиус зерен,  $u_i$  – смещение  $i$ -го зерна.

Рассмотрим баланс сил, действующих на зерна в процессе деформации среды. На отдельное  $i$ -е

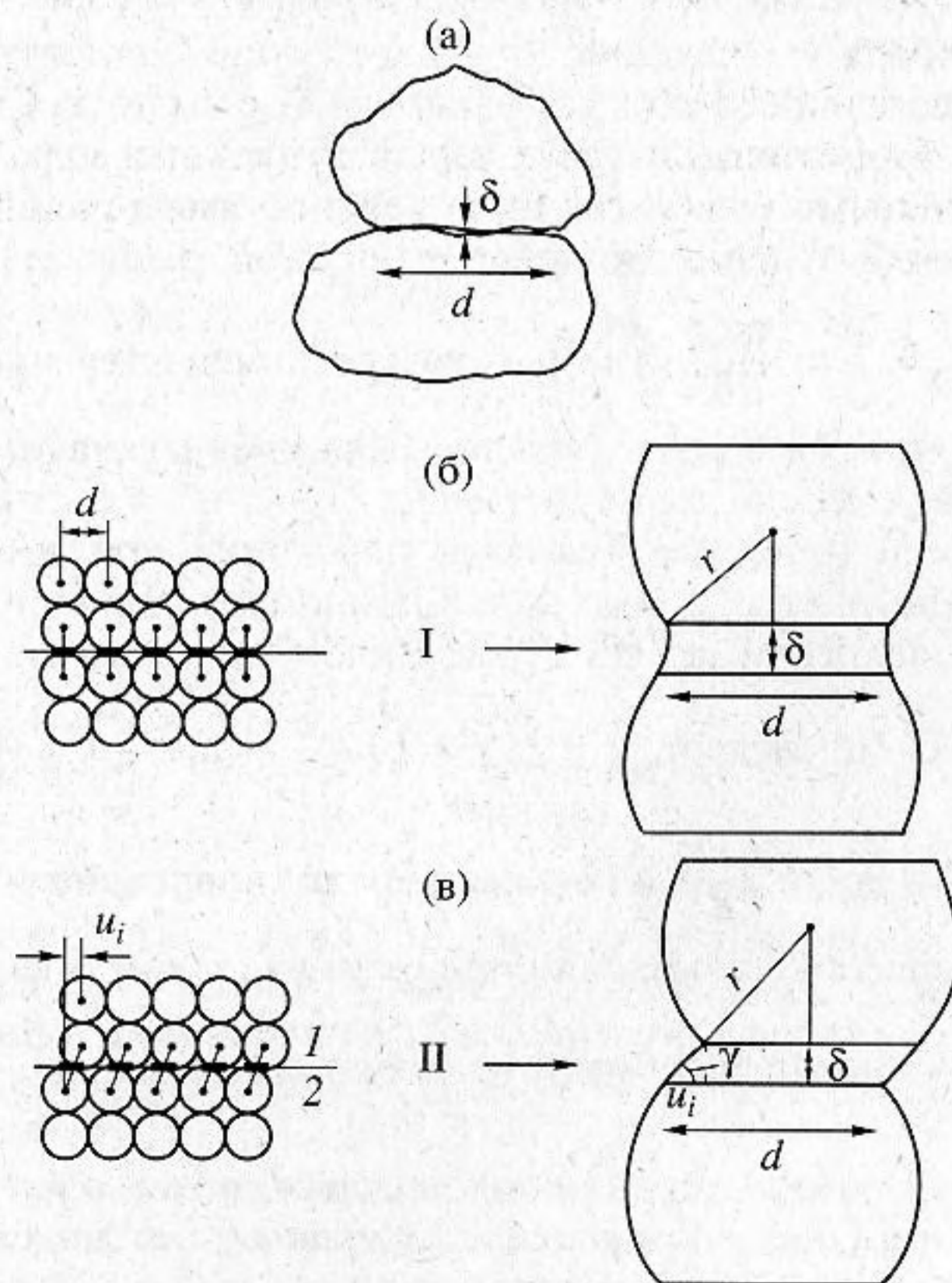


Рис. 1. Схема смещения слоев и изменения контактов зерен при сдвиге. а – контакт реальных зерен; б – равновесное состояние кубической упаковки зерен; в – изменение геометрии контакта.

зерно при взаимодействии с ближайшими соседними зернами  $i-1$  и  $i+1$  при сдвиге действует сила упругости  $f_{\text{упр}} = D_{ii}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$ , где  $D_{ii}$  — тангенциальная контактная жесткость. Медленные изменения величины смещения  $u_i$  от одного зерна к другому допускают замену дискретного значения  $u_i$  на непрерывное, когда  $u_{i+1} - u_i = \frac{du_i(x)}{dx_i} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 u_i(x)}{dx_i^2} (\Delta x)^2$ . Учитывая, что смещение зерен

кратно периоду цепочки  $\Delta x = a$ , для силы упругости получим  $f_{\text{упр}} = a^2 D_{ii} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$ . Вклад силы тяжести

через периодический потенциал  $U(u_i) = A \left( 1 - \cos 2\pi \frac{u_i}{a} \right)$ , описывающий воздействие неподвижного нижнего слоя 2 на  $i$ -е зерно прилегающего смещающегося верхнего слоя 1 (рис. 1в), по аналогии с [8] запишем в виде  $f_{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial u_i} = -2\pi \frac{A}{a} \sin 2\pi \frac{u_i}{a}$ ,

где  $A = m_i g h$ , где  $m_i$  — масса  $i$ -го зерна;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — расстояние от центра масс верхнего слоя до границы раздела слоев. Сила сопротивления двух зерен с гладкими параллельными контактными поверхностями течению пленки с изменяющейся толщиной равна [11]:

$f_{\text{сопр}} = \frac{3}{2} \pi r^2 \frac{\mu d \delta}{\delta dt}$ , где  $\mu$  — вязкость вещества прослойки. При сдвиге равновесная кубическая упаковка переходит из состояния I (рис. 1б) в состояние II (рис. 1в). Толщина прослойки при этом уменьшается, а ее сечение принимает форму параллелограмма. Из геометрических построений (рис. 1в) следует, что  $\text{tg} \gamma = \left( r - \frac{\delta}{2} \right) / \left( u_i + \frac{d}{2} \right) = \frac{\delta}{u_i}$ .

Откуда  $\delta \approx 2 \frac{r}{d} u_i$  и выражение для силы сопротивления течению пленки при относительном сдвиге слоев зерен преобразуется к виду  $f_{\text{сопр}} = \frac{3\pi r^3}{\delta d} \mu \frac{\partial u_i}{\partial t}$ .

Динамика зерен массой  $m_i$ , движущихся с ускорением  $\partial^2 u_i / \partial t^2$ , определяется уравнением (индекс “ $i$ ” в дальнейшем опускаем)

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 D_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\pi \frac{A}{a} \sin 2\pi \frac{u}{a} - \frac{3\pi r^3}{d \delta} \mu \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

Введение новой переменной  $\Phi = 2\pi \frac{u}{a}$  дает

$$a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{m}{D_{ii}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{A}{D_{ii}} \sin \Phi + \frac{3\pi r^3}{d \delta D_{ii}} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2)$$

Если в (2) перейти к безразмерным координатам  $\xi = \frac{\pi}{a p} x$ ,  $\eta = \frac{\pi \omega_0}{p} t$ ,  $p^2 = \frac{a^2 D_{ii}}{4A}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{D_{ii}}{m}$ , то можно

получить “возмущенное” уравнение sin-Гордона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \sin \Phi + a \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (3)$$

Диссипативный член в уравнении (3) следует видоизменить, так как при относительном движении границ реальных зерен (рис. 1а) течение пленки в контакте между ними будет, вероятно, сильно отличаться от плоского течения Куэтта

ввиду того, что шероховатые поверхности зерен должны способствовать развитию турбулентности. Течение в пористых насыщенных средах при реальных перепадах давления определяется законом Пуазейля. При ламинарном течении выполняется простое линейное соотношение между максимальной и средней скоростью потока, а при переходе к турбулентному движению можно воспользоваться разложением  $f_{\text{сопр}}(v)$  по степеням  $v$  (как это проделано, например, в [12]). Тогда становится допустимым физически обоснованное предположение  $f_{\text{сопр}} \sim \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2$ . Полагая  $a = a_0 \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right| =$

$= \frac{9}{8\pi} \frac{a \mu_0}{d \delta \rho (gh)^{1/2}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|$ , где  $\rho_s$  — плотность материала зерен, перепишем (3) в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \sin \Phi + a_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2. \quad (4)$$

Возбуждение турбулентности при пуазейлевском течении начинается с  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} \approx 10^3$ . Критическое значение числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{кр}}$  в данном случае выражается отношением двух характерных пространственных масштабов — полутолщины прослойки  $\frac{\delta}{2}$  и толщины ламинарного под-

слоя  $l$  [13]:  $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{9}{4} \left( \frac{\delta}{2l} \right)^3$ . Толщина ламинарного

подслоя равна  $\frac{\delta s}{2 \text{Re}_*}$ , где  $\text{Re}_* = \frac{v_* H}{\nu}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $v_*$  — средняя по сечению канала шириной  $2H$  скорость течения), а

аккумулированный эффект шероховатости зерен

равен  $s = \frac{2H}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны шероховатости зерен.

Возбуждение турбулентности при пуазейлевском течении начинается с  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} \approx 10^3$ . Критическое значение числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{кр}}$  в данном случае выражается отношением двух характерных пространственных масштабов — полутолщины прослойки  $\frac{\delta}{2}$  и толщины ламинарного под-

слоя  $l$  [13]:  $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{9}{4} \left( \frac{\delta}{2l} \right)^3$ . Толщина ламинарного

подслоя равна  $\frac{\delta s}{2 \text{Re}_*}$ , где  $\text{Re}_* = \frac{v_* H}{\nu}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $v_*$  — средняя по сечению канала шириной  $2H$  скорость течения), а

аккумулированный эффект шероховатости зерен

равен  $s = \frac{2H}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны шероховатости зерен.

Возбуждение турбулентности при пуазейлевском течении начинается с  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} \approx 10^3$ . Критическое значение числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{кр}}$  в данном случае выражается отношением двух характерных пространственных масштабов — полутолщины прослойки  $\frac{\delta}{2}$  и толщины ламинарного под-

слоя  $l$  [13]:  $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{9}{4} \left( \frac{\delta}{2l} \right)^3$ . Толщина ламинарного

подслоя равна  $\frac{\delta s}{2 \text{Re}_*}$ , где  $\text{Re}_* = \frac{v_* H}{\nu}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $v_*$  — средняя по сечению канала шириной  $2H$  скорость течения), а

аккумулированный эффект шероховатости зерен

равен  $s = \frac{2H}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны шероховатости зерен.

величина  $s$  в режиме развитой турбулентности составляет 7.8. Отсюда следует, что  $l = \frac{\mu s \delta}{2\nu_* \rho d}$ ,

$\frac{9}{4} \left( \frac{\nu_* \rho d}{\mu s} \right)^3 > 10^3$  или  $d > \frac{60\mu}{\rho \nu_*}$ . Таким образом, для поддержания турбулентного режима, при кото-

ром справедливо соотношение  $f_{\text{сопр}} \sim \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2$  и

приемлемо уравнение (4), необходимо выполнение условия  $d > \frac{60\mu}{\rho \nu_*}$ . Подобную же оценку можно

получить из формулы Стокса для сопротивления потоку при обтекании шара [14]:  $f_{\text{сопр}} =$

$= 6\pi \mu \nu_* r \left( 1 + \frac{3r\nu_* \rho}{8\mu} \right)$ , второе слагаемое в которой

является поправкой Осеена на распределение скоростей при больших расстояниях ( $x \geq \mu/\rho \nu_*$ ) от об-

текаемого тела. В случае  $\frac{3r\nu_* \rho}{8\mu} \gg 1$  или  $r \gg \frac{8\mu}{3\rho \nu_*}$

также имеем  $f_{\text{сопр}} \sim \nu_*^2$ . Диаметр  $d$  кругового контакта зерен обычно не превышает радиус зерен  $r$ ,

т.е.  $r > d$ , поэтому условия  $d > \frac{60\mu}{\rho \nu_*}$  и  $r \gg \frac{8\mu}{3\rho \nu_*}$  яв-

ляются совместимыми.

Уравнение (4) аналогично уравнению, описывающему динамику отдельного флюксона в джоузефсоновской линии передачи с диссипацией [15]. При выборе решения в форме бегущей волны

$\Phi = \Phi(\tau) = \Phi(\xi - \beta\eta)$ ,  $\beta = \frac{1}{n}(n^2 - 1)^{1/2}$  ( $\beta$  - безраз-

мерная скорость,  $n$  - некоторая постоянная разделения, превышающая единицу) [16], из (4) следует

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha_0 \beta^2}{1 - \beta^2} \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 = \frac{\sin \Phi}{1 - \beta^2}. \quad (5)$$

Учитывая, что  $\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\Phi} \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2$ , общее решение (5) можно получить в виде [15]

$$\Phi = \arcsin \sigma_0 + 4 \arctg \left\{ \exp \left[ \pm \left( \frac{\sigma_0}{2\alpha_0 \beta^2} \right)^{1/2} (\tau - \tau_0) \right] \right\}, \quad (6)$$

$$\sigma_0 = \frac{2\alpha_0^2}{[(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha_0^2 \beta^2]^{1/2}}.$$

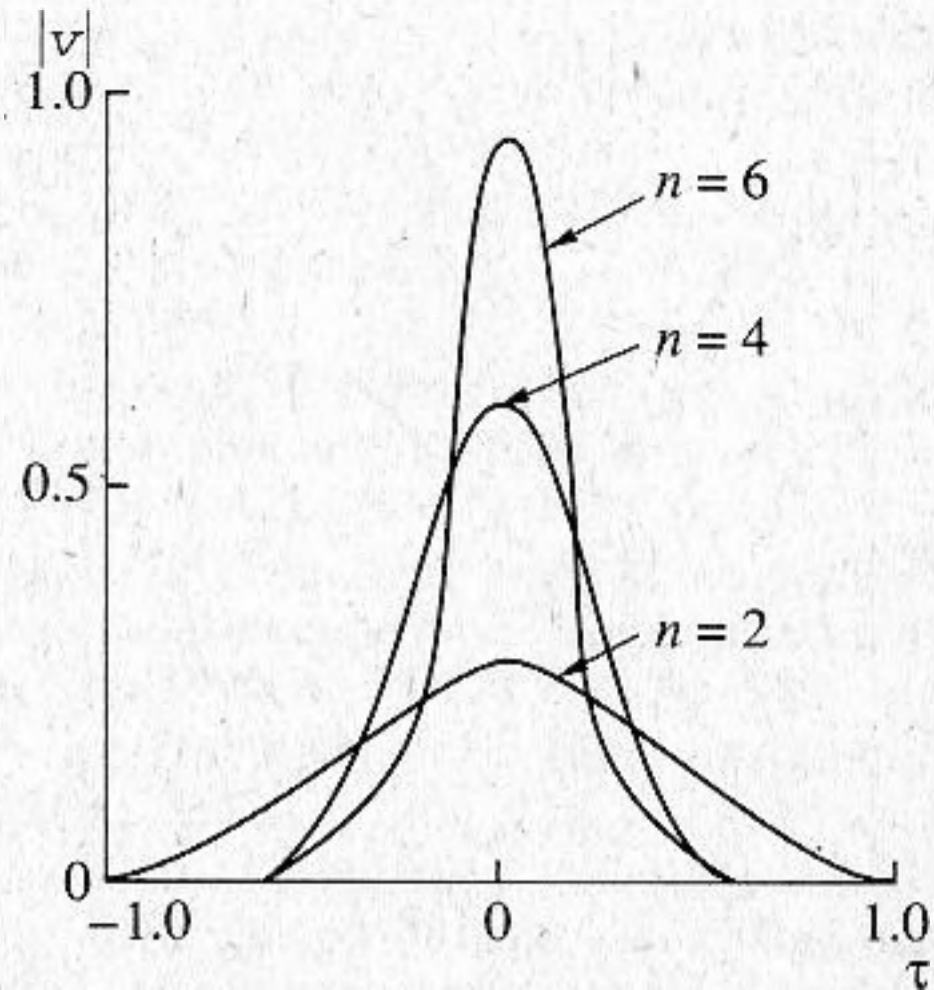


Рис. 2. Форма уединенной волны деформации  $|v|$  при различных значениях параметра  $n$ .

Считая, что произвольная постоянная  $\tau_0 = 0$  и возвращаясь к физическим параметрам исходного уравнения (1), запишем решение (6) и его производную  $\frac{\partial u}{\partial t} = v(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{a}{2\pi} \arcsin \{ 2\alpha_0 (n^2 - 1) \chi^2 \} + \frac{2a}{\pi} \arctg \left\{ \exp \left( \frac{x' - V_\alpha t}{\Delta} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$v(x, t) = -\frac{2n(gh)^{1/2}}{a\omega_0} V_\alpha \sec \left( \frac{x' - V_\alpha t}{\Delta} \right), \quad (8)$$

$$\chi = [1 + 4\alpha_0^2 n^2 (n^2 - 1)]^{-1/4}, \quad x' = \chi x, \quad V_\alpha = \chi V,$$

$$V = a \left( \frac{D_t}{m} \right)^{1/2} \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n} = v_s \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n},$$

$$\Delta = \frac{a^2 \omega_0}{2\pi n (gh)^{1/2}}.$$

Из (7) видно, что при отсутствии трения ( $\alpha_0 = 0$ ) в контактах зерен, обусловленного наличием прослойки, решение уравнения (4) совпадает с решением стандартного уравнения  $\sin$ -Гордона, к которому приводит и модель Френкеля-Конторовой [8].

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. При сдвиге, т.е. относительном смещении слоев (1 и 2) зернистой среды, возникает поперечная волна со скоростью

$$v_s = a \left( \frac{D_t}{m} \right)^{1/2}, \text{ распространяющаяся перпендику-}$$

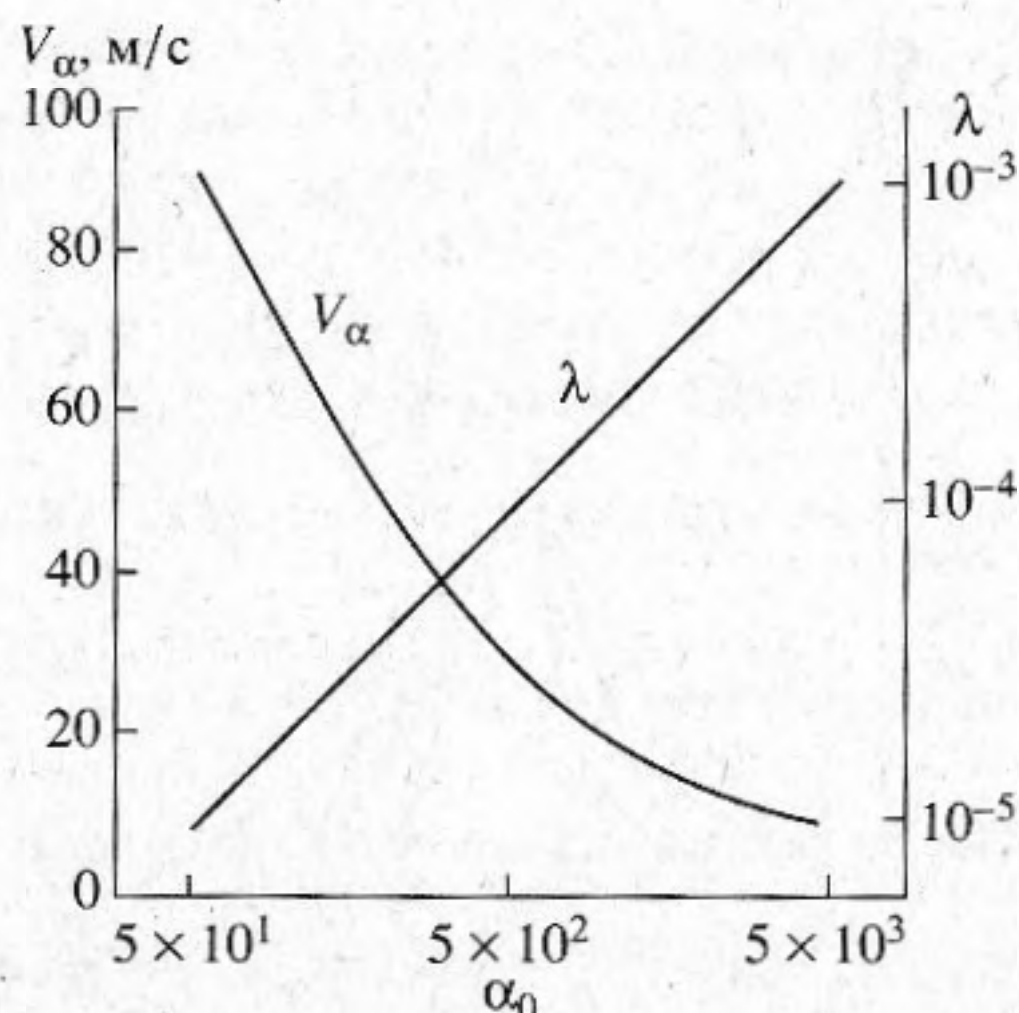


Рис. 3. Зависимость скорости уединенной волны  $V_\alpha$  от параметра трения  $\alpha_0$  и отношения толщины к длине вязкой прослойки  $\lambda$ .

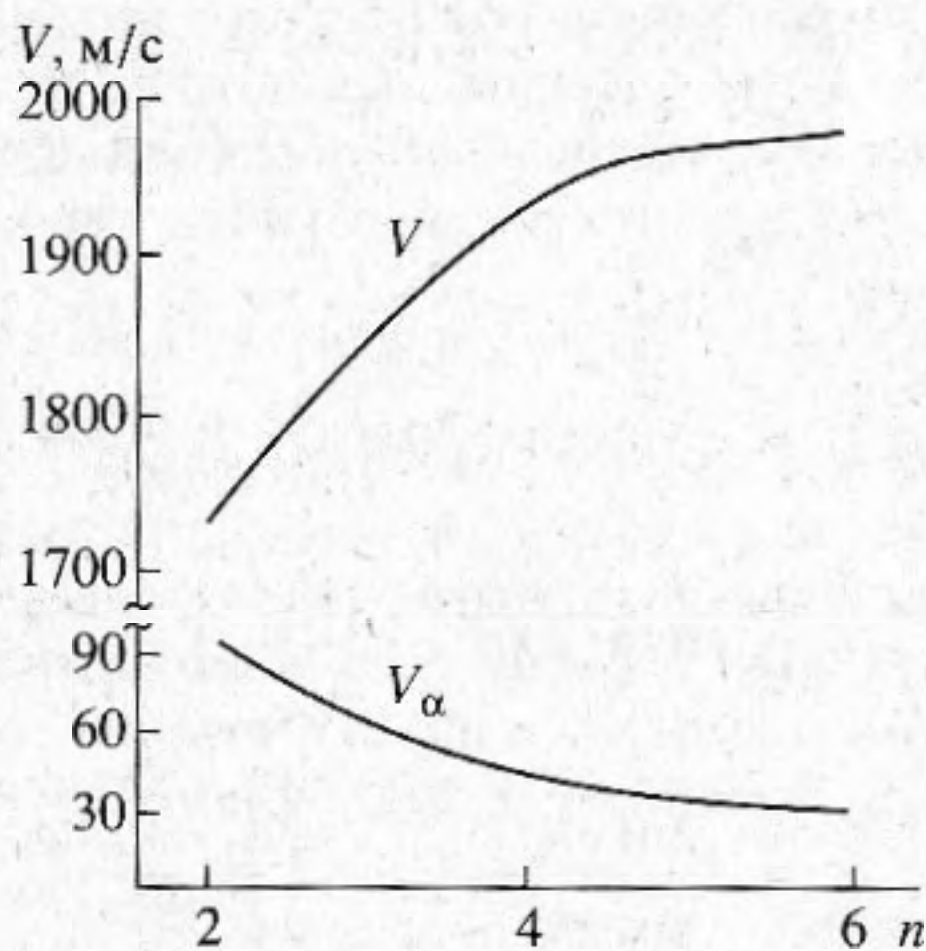


Рис. 4. Влияние параметра  $n$  на скорость сдвиговой волны  $V$  при различных состояниях контактов.

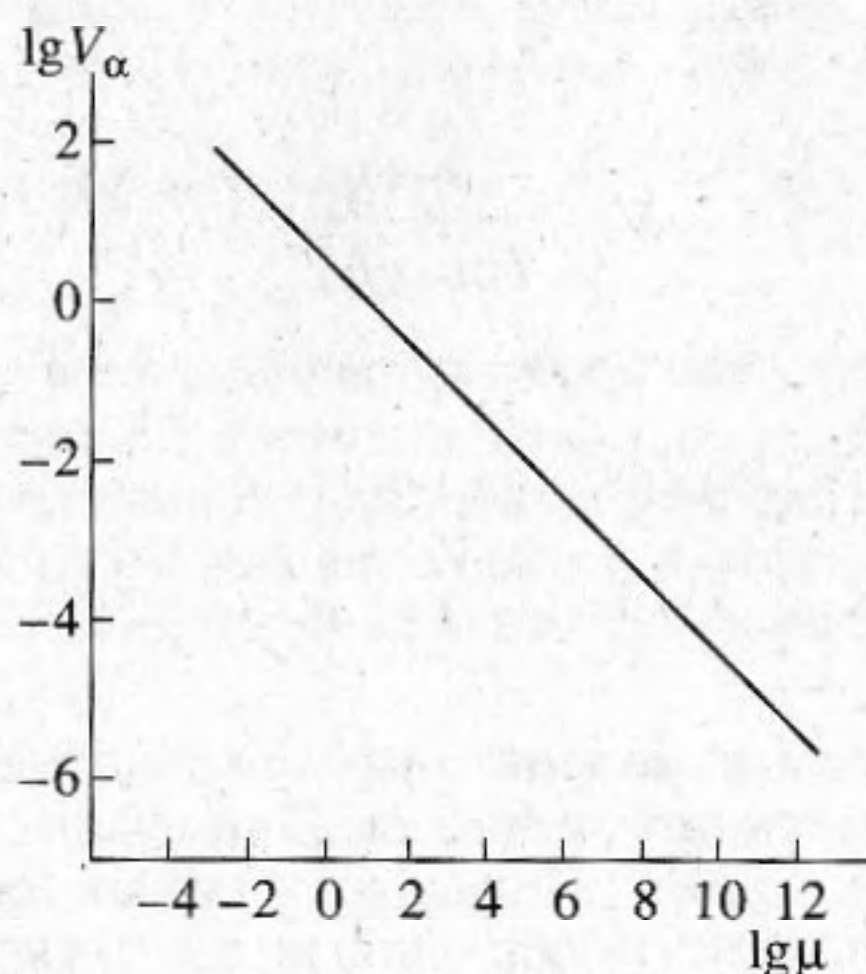


Рис. 5. Зависимость скорости сдвиговой волны  $V_\alpha$  от вязкости межзерновой прослойки  $\mu$ .

лярно смещению. Профиль колебательной скорости "массовой" частицы  $v$  имеет форму солитона (8) (рис. 2), движущегося с постоянной скоростью деформации  $V_\alpha$  (при наличии смазки в контактах зерен) или  $V$  (при отсутствии смазки). Причем, скорость солитона всегда меньше скорости

поперечной волны, так как  $\frac{V}{v_s} = \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n}$ ,

$n > 1$ . В [17] также отмечено, что при обычных режимах стационарного напряжения скорость разрушения (предельный случай деформации с максимальной скоростью) не может превышать скорости волны Рэлея, близкой по величине к скорости поперечной волны. Полуширина солитона соответствует в данном случае величине средней подвижки.

На рис. 3 представлены результаты расчетов зависимости скорости сдвиговой волны  $V_\alpha$  от величины параметра трения  $\alpha_0$  и отношения толщины

$\delta$  к длине  $d$  вязкой прослойки  $\lambda = \frac{\delta}{d}$ . При вычисле-

ниях здесь и далее (если это специально не оговорено) были использованы величины, характерные для песчаников Береа и Форт Унион [18, 19]:  $\rho_s = 2.65 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $D_t = 1.67 \times 10^6$  Н/м,  $2r = a = 3 \times 10^{-4}$  м,  $g = 10$  м/с,  $h = 6 \times 10^{-4}$  м,  $d = 10^{-4}$  м,  $\delta = 10^{-7} - 10^{-9}$  м,  $\mu = 10^{-3}$  Па с. Существенное влияние параметра  $n$  на скорости  $V_\alpha$  и  $V$  показано на рис. 4, из которого следует что скорость уединенной сдвиговой волны при наличии межзерновой пленки (воды) толщиной  $\delta = 10^{-7}$  м уменьшается в 20–60 раз по сравнению со случаем "сухих" контактов, для которого  $v_s = 2 \times 10^3$  м/с. Однако основной причиной изменения  $V_\alpha$  тем не менее является вязкость вещества межзерновой прослойки (рис. 5). При вариации вязкости прослойки от  $10^{-3}$  до  $10^2$  Па с скорость сдвиговой волны  $V_\alpha$ , т.е. скорость движения солитона  $v$ , понижается на 3 порядка. Величины  $V_\alpha$  и  $\mu$  связаны соотношением  $V_\alpha \sim \mu^{-1/2}$ . Для крупнозернистых песков и песчаников с размером зерен  $r = 10^{-4} - 10^{-2}$  м и вполне реальной скоростью течения водяной пленки  $v_* = 10^{-2} - 10$  м/с значения  $d = r/2 = 5 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-5}$  м попадают в интервал, ограниченный областью применимости  $\left(d > \frac{60\mu}{\rho v_*}\right)$  предложенной модели деформирования зернистой среды. Лабораторные измерения критической скорости  $v_{*c}$  в образцах неоднородных материалов, при достижении которой совершается переход в турбулентный режим, дают  $v_{*c} = 0.2 - 0.4$  м/с [12].

Наблюдение уединенных сдвиговых волн возможно в экспериментальных исследованиях скольжения по существующему в образцах гор-

ных пород шероховатому разрыву, которым моделируют подвижку с трением в качестве механизма землетрясения.

Таким образом, получено нелинейное уравнение типа "возмущенного" уравнения  $\sin$ -Гордона, описывающее деформационный процесс в зернистых средах с вязкими прослойками в контактах зерен и показано, что состояние контакта зерен оказывает сильное влияние на амплитуду и скорость уединенной сдвиговой волны.

Автор признателен И.Б. Есипову за критические замечания и полезные советы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson P.A., McCall K.R. Observation and implications of nonlinear elastic wave response in rock // *Geophys. Res. Lett.* 1994. V. 21. № 3. P. 165–168.
2. Johnson P., Rasolofosaon P.N. Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 1996. V. 32. P. 77–88.
3. Ostrovsky L.A. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 90. № 6. P. 3332–3338.
4. Zaitsev V.Yu. A model of anomalous acoustic nonlinearity of microinhomogeneous media // *Acoustic Letters*. 1996. V. 19. № 9. P. 186–201.
5. Nikolaevskii V.N. Continuum approach to the theory of waves in fragmentary media // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1988. V. 50. № 1. P. 32–38.
6. Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А. Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1345.
7. Богданов А.Н., Скворцов А.Т. Нелинейные сдвиговые волны в зернистой среде // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. Вып. 3. С. 408–412.
8. Конторова Т.А., Френкель Я.И. К теории пластичности и двойникования. I // *ЖЭТФ*. 1938. Т. 8. Вып. 1. С. 89–95.
9. Николаевский В.Н. Математическое моделирование уединенных деформационных и сейсмических волн // *Докл. АН*. 1995. Т. 341. № 3. С. 403–405.
10. Гарагаш И.А. Микродеформации предварительно напряженной дискретной геофизической среды // *Докл. АН*. 1996. Т. 347. № 1. С. 95–98.
11. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
12. McIntosh J.D., Lambert R.F. Nonlinear wave propagation through rigid porous materials. I: Nonlinear parametrization and numerical solutions // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. V. 88. № 4. P. 1939–1949.
13. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990. 320 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. Парментье Р. Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. С. 185–209.
16. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
17. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
18. Winkler K.W. Contact stiffness in granular porous materials: comparison between theory and experiment // *Geophys. Res. Lett.* 1983. V. 10. № 11. P. 1073–1076.
19. Murphy W.F., Winkler K.W., Kleinberg R.L. Acoustic relaxation in sedimentary rocks: dependence on grain contacts and fluid saturation // *Geophysics*. 1986. V. 51. № 3. P. 757–766.

## Solitary Shear Waves in a Granular Medium

V. G. Bykov

A mathematical model describing the deformation of a granular medium with viscous interlayers in the grain contacts is presented. The model leads to a perturbed  $\sin$ -Gordone equation. The assumption that the resistance force of the rough surfaces of grain contacts is proportional to the squared velocity of the interlayer flow allows one to obtain an exact analytical solution in the form of a solitary shear wave. The dependences of the solitary wave velocity on the friction parameter, viscosity of interlayer material, and ratio of the layer thickness to its length are calculated. It is demonstrated that the velocity of a solitary wave is always less than the velocity of a transverse seismic wave.