АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 2, с. 183–189

УДК 532.59:517.95

УВЕЛИЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА В СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

© 1999 г. **В. А. Вахненко**

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины
252054 Киев-54, ул. Б. Хмельницкого, 63 Б
e-mail: vakhnenko@bitp.kiev.ua

Поступила в редакцию 17.05.95 г.

Получена осредненная система гидродинамических уравнений в лагранжевой и эйлеровой системах координат для описания длинных линейных волн в структурированной среде. Природа длинноволнового воздействия различна на разных масштабных уровнях. На микроуровне поведение среды подчиняется термодинамическим законам, а на макроуровне – выражается в волновом движении для средних характеристик. Построено эволюционное уравнение с учетом слабой нелинейности, обусловленной структурой. Доказано, что структура среды всегда приводит к увеличению нелинейных эффектов при распространении длинных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие природные среды обладают естественной внутренней структурой. Недавние экспериментальные исследования показали, что внутренняя структура среды влияет на волновые движения [1–7]. Присутствие неоднородности усложняет проблему и, в то же время, проявляется более полно при распространении нелинейных волн. К нелинейному проявлению волновых процессов в природных средах можно отнести такие явления как, например, (а) солитоноподобные свойства P-волны [8], и (б) увеличение нелинейных эффектов в структурированных средах по сравнению с однородными [3–7].

Модели различной степени сложности используются для описания волновых процессов в гетерогенных средах. Традиционно считалось, что возмущения с длиной волны λ, значительно превосходящей структурные неоднородности ε', распространяются в ней, как в однородной. В рамках механики сплошной среды известная идеализация реальной среды с помощью однородной позволила достичь значительного успеха при описании волновых процессов (см., например, [9–11]). На акустическом уровне структуру среды удается учесть в рамках моделей однородной среды с определенными дисперсно-диссипативными свойствами [12, 13]. Континуальные модели также применяются для описания нелинейных волн [14–17]. На этом уровне среды моделируются в рамках упругих, вязко-пругих и упруго-пластических однородных сред [15, 18]. В этих случаях структура среды учитывается косвенно через кинетические параметры (время релаксации, коэффициенты вязкости и т.п.) [5, 6, 9, 14–18].

Методами классической механики сплошной среды [19] и статистической физики [20] обоснована модель взаимопроникающих континуумов, созданная для описания динамического поведения многокомпонентных сред. Фундаментальное предположение в теории смесей [14] совпадает с предположением в модели взаимопроникающих континуумов [19]; а именно, что каждый микрообъем dv содержит в себе частицы, принадлежащие каждому компоненту. Уравнения движения, записанные для каждого компонента, включают члены, описывающие массовое, силовое и тепловое взаимодействия между компонентами. Проблема усложняется необходимостью привлекать, в общем случае, экспериментальные данные для установления теоретических соотношений между макропараметрами на уровне взаимодействия компонент. Обзор и применение различных моделей для описания волновых процессов в смесях изложены в монографии [14].

Во всех вышеупомянутых моделях использовался формализм механики сплошной среды. В этом случае исходят из принципа локального действия, а также из обобщения законов механики, относящихся к точке массы, на сплошную среду [10].

Когда осуществляется переход от интегральных уравнений сохранения к дифференциальным, то предполагается существование дифференциально малого микрообъема dv. С одной стороны, этот объем настолько мал, что можно распространить законы механики точечной массы на весь микрообъем, а, с другой стороны, микрообъем, хотя и мал по сравнению с целым объемом занятым средой, содержит так много структурных элементов среды, что, в этом смысле, он может быть рассмотрен как макроскопический. Таким образом, переход к дифференциальным уравнениям сохранения основывается на предположении малости микроструктурных масштабов ε' по сравнению с характерным макроскопическим масштабом течения λ, при этом должен быть сделан предельный переход $\varepsilon'/\lambda \longrightarrow 0$. Стягивание объема dv к точке, в общем случае, правильное для непрерывных функций [10, 14]. Это означает, что все точки внутри дифференциально малого объема эквивалентны. Поэтому эквивалентность точек в микрообъеме подразумевает, что должны использоваться осредненные по dv характеристики волнового поля. Следовательно, предполагается, что уравнения движения могут быть записаны в осредненных характеристиках таких как плотность, массовая скорость, давление, которые приписываются каждому компоненту отдельно. Необходимо отметить, что в этих моделях размеры компонентов явно не содержатся.

Применение моделей однородной среды к описанию динамических волновых процессов в структурированной среде встречает некоторые принципиальные трудности [1, 2, 6, 18]. В данной работе структура среды будет учтена на макроуровне. Мы отказываемся от предположения, что дифференциально малый объем dv содержит все компоненты среды, хотя и будем рассматривать длинноволновые приближения, когда длина волны λ много больше, чем характерная длина структуры среды ε'. Отдельно взятый компонент структурированной среды, как предполагается, моделируется однородной средой (дифференциально малый объем dv много меньше, чем характерный размер отдельного компонента). Строгий математический анализ методом асимптотического осреднения [21–23] показывает, что структура среды непосредственно влияет на нелинейные волновые процессы даже для возмущений с длиной волны, во много превосходящей размеры неоднородностей. Математическая формулировка этого утверждения означает, что система осредненных уравнений не выражается в осредненных характеристиках (давление, массовая скорость, удельный объем), и содержит члены с характерным размером отдельных компонент.

Настоящая работа посвящена анализу слабой нелинейности, связанной со структурой среды, при распространении длинноволновых возмущений. Для описания волновых процессов в средах с микроструктурой используется асимптотическая осредненная модель [24–30]. Доказано, что только на акустическом уровне с помощью дисперсно-диссипативных свойств среды удается описать распространение длинных волн, и только в этом случае динамическое поведение среды моделируется в рамках однородной релаксирующей [26, 30]. В то же время длинная волна конечной амплитуды откликается на структуру среды так, что поведение структурированной среды не может моделироваться однородной средой. Важным результатом, предсказанным этой моделью, является увеличение нелинейного эффекта при распространении волны конечной амплитуды в среде с микроструктурой, даже если отдельные компоненты среды описываются линейным законом.

2. СИСТЕМА ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Элементарными неоднородными средами, для которых может быть проанализировано влияние структуры, являются среды с регулярной структурой. Закономерности распространения длинноволновых возмущений исследуются на примере периодической среды при условии равенства как давления, так и массовых скоростей на границах соседних компонентов. Предполагается, что элемент микроструктуры среды ε достаточно большой, так что для него применимы законы классической механики сплошной среды. Среда баротропная. Периодически изменяющимися свойствами считаются такие свойства невозмущенной среды как удельный объем $V = \rho^{-1}$, скорость звука c (хотя это предположение в окончательном результате, как оказывается, несущественно для длинных волн). Мы использовали гидродинамический подход и рассмотрели среды без касательных напряжений. Это ограничение оправдано при моделировании нелинейных волн в водонасыщенном грунте, пузырьковых средах, аэрозолях и т.п. Рассмотрение может быть распространено на твердые тела при изучении мощных нагрузок в условиях, когда можно пренебречь прочностными и пластическими свойствами материала [31].

В лагранжевой системе координат (m – массовая пространственная координата) уравнения плоского одномерного движения для каждого элемента среды регулярной структуры имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0. \tag{1}$$

Обозначения общепринятые. Условиями согласования являются равенства массовых скоростей, а также давлений на границах компонент. Для каждого компонента известны уравнения состояния

$$dp = c^2 d\rho. \tag{2}$$

Одним из путей изучения такой неоднородной среды является метод асимптотического осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [21–23]. Суть асимптотического метода состоит в применении метода многих масштабов в сочетании с методом пространственного осреднения. Малым параметром задачи является $\varepsilon = \varepsilon'/\lambda$. В соответствии с методом массовая пространственная координата m разбивается на две независимые координаты: медленную – s и быструю – ξ, при этом

$$m = s + \varepsilon\xi, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{3}$$

Медленная координата s соответствует глобальному изменению волнового поля и является константой на всем периоде, в то время как быстрая переменная ξ отслеживает изменения поля на периоде структуры. Зависимые функции p, u, V представляются в виде степенного ряда по периоду структуры ξ, например,

$$\begin{aligned} p(m, t) = {} & p^{(0)}(s, t, \xi) + \varepsilon p^{(1)}(s, t, \xi) + \\ & + \varepsilon^2 p^{(2)}(s, t, \xi) + \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Функции $p^{(i)}$, $u^{(i)}$, $V^{(i)}$ считаются однопериодическими по ξ.

Докажем, что $p^{(0)} = p^{(0)}(s, t)$, $p^{(1)} = p^{(1)}(s, t)$, $u^{(0)} = u^{(0)}(s, t)$ не зависят от быстрой переменной ξ. Действительно, после подстановки (3), (4) в начальные уравнения движения (1), имеем

$$\begin{gathered} -\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}\right) + \\ + \varepsilon^1\left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi}\right) + \ldots = 0, \\ \varepsilon^{-1}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} + \varepsilon^0\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}\right) + \\ + \varepsilon^1\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi}\right) + \ldots = 0. \end{gathered}$$

Согласно общей теории асимптотического метода коэффициенты при разных степенях ε должны независимо друг от друга равняться нулю. Таким образом, в порядке $O(\varepsilon^{-1})$ имеем $\dfrac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} = 0$, $\dfrac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = 0$, т.е. $p^{(0)} = p^{(0)}(s, t)$ и $u^{(0)} = u^{(0)}(s, t)$ не зависят от ξ. Эти свойства можно записать в виде $\langle u^{(0)}\rangle = u^{(0)}$, $\langle p^{(0)}\rangle = p^{(0)}$. В порядке $O(\varepsilon^0)$ должно быть

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь применим процедуру осреднения, что возможно только в лагранжевых массовых координатах, поскольку период при этом не зависит от волнового движения. По определению $\langle\cdot\rangle = \int_0^1 (\cdot)d\xi$. Здесь используется условие нормировки $\int_0^1 d\xi = 1$. Поскольку $p^{(1)}$ и $u^{(1)}$ являются периодическими, то интегралы $\left\langle\dfrac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi}\right\rangle = 0$, $\left\langle\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}\right\rangle = 0$.

После интегрирования уравнений (2), (5) по периоду структуры ξ, с одной стороны, имеем осредненную систему уравнений [24–30]

$$\frac{\partial\langle V^{(0)}\rangle}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0. \tag{6}$$

$$d\langle V^{(0)}\rangle = -\left\langle\frac{(V^{(0)})^2}{c^2}\right\rangle dp, \tag{7}$$

а, с другой, – получаем $\dfrac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0$ как результат вычитания второго уравнения (6) из второго уравнения системы (5). Это означает, что $p^{(1)}$ также не зависит от ξ. В отличие от величин $u^{(0)}$, $p^{(0)}$, $p^{(1)}$ величина $V^{(0)}$ – функция от ξ. В дальнейшем мы ограничимся только нулевым приближением, верхний индекс 0 опустим.

Осредненная система уравнений (6), (7) является интегродифференциальной и в общем случае не сводится к осредненным характеристикам p, u, $\langle V\rangle$.

Вывод уравнений (6), (7) проведен для строго периодической среды. Однако можно показать, что для сред с квазипериодической структурой уравнения (6), (7) также будут справедливы. Действительно, давление p, массовая скорость u – постоянные величины на всем периоде структуры. Структурный элемент движется как единое целое (u = const). На микромасштабе ξ нагрузка настолько медленная, что в микрообъеме успевает произойти выравнивание давления, внутренняя структура изменяется и наступает механическое равновесие (p = const). Поэтому действие является однородным (безволновым) на всем периоде структуры среды. Поведение среды на этом иерархическом уровне подчиняется только термодинамическим законам.

На макроуровне поведение среды описывается законами волновой динамики (6) для средних характеристик u, p, $\langle V\rangle$. Однако имеется влияние структуры среды на волновые движения и это происходит по следующей причине. Согласно уравнению (7) изменение среднего удельного объема $\langle V\rangle$ не соответствует изменению удельного объема для однородной среды в процессе нагружения. Таким образом, изменение внутренней структуры влечет определенное изменение среднего удельного объема $\langle V\rangle$ и, в конечном результате, структура среды проявляется на макроуровне s в волновом движении, несмотря на то, что уравнения движения (6) записаны для средних величин u, p, $\langle V\rangle$.

С математической точки зрения в нулевом приближении по ε размер периода бесконечно мал ($\varepsilon \longrightarrow 0$). Это значит, что местоположение отдельных компонентов в периоде не имеет никакого значения. Система уравнений (6), (7) не изменяется, если в элементарной ячейке менять расположение слоев или их дробить. Следовательно, уравнения (6), (7) описывают поведение любой квазипериодической (статистически неоднородной) среды, имеющей на уровне микроструктуры одно и то же массовое содержание компонентов безотносительно к местоположению вещества по объему ячейки.

Представленная асимптотическая осредненная модель обосновывает односкоростные континуальные модели. В частности, хорошо известная модель многокомпонентных сред Ляхова [17] получила строгое математическое подтверждение [27, 29, 30].

Метод численного решения системы уравнений описан в [24–26]. В этом методе шаг интегрирования ограничен длиной волнового возмущения, а не периодом структуры. Главная начальная вычислительная проблема, связанная с малостью шага интегрирования, была успешно преодолена, при этом система осредненных уравнений может быть решена на больших расстояниях в течение приемлемого машинного времени. Мы разработали пакет программ для компьютерного решения системы уравнений.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

Во многих задачах удобно использовать запись уравнений (6) в эйлеровой системе координат. Осредненные уравнения движения (6) удается переписать в таких независимых переменных в силу того, что они представлены в средних характеристиках u, p, $\langle V\rangle$. Обратим внимание на то обстоятельство, что непосредственное применение асимптотического метода осреднения в эйлеровой системе координат неправомерно ввиду непостоянства размеров микроструктур.

Найдем преобразования между независимыми переменными в эйлеровой (x, t_E) и лагранжевой (s, t) системах [26, 30]

$$x = x(x, t), \quad t_E = t. \tag{8}$$

Важным является то обстоятельство, что скорость u не изменяется на периоде и, следовательно, можно говорить об осредненной траектории частицы. Осредненная эйлерова координата x для конкретной частицы (не траектория) изменяется со временем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_s = u(s, t). \tag{9}$$

Это соотношение является определением медленной эйлеровой координаты x. Кроме того, с изменением s изменяется x, т.е. преобразование (8) необходимо записать в дифференциальном виде

$$dx = Ads + udt, \quad t_E = t. \tag{10}$$

Согласно физическим представлениям ясно, что местоположение частицы однозначно определяется самой частицей и временем. Математически это означает, что dx в (10) является полным дифференциалом, поэтому должно быть

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Это условие удовлетворяется, если $A = \langle V\rangle$, поскольку оно переходит в уравнение непрерывности (6).

Итак, получено преобразование между лагранжевой и эйлеровой системами координат

$$dx = \langle V\rangle ds + udt, \quad t_E = t. \tag{11}$$

Частные производные при этом изменяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial s} = \langle V\rangle\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_E} + u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Уравнения движения (6) в эйлеровой системе координат примут вид (индекс E опускаем)

$$\frac{\partial\langle V\rangle^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial u\langle V\rangle^{-1}}{dx} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \langle V\rangle\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Удобно определить быструю эйлеровую координату ζ как

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_t = \frac{\tilde{\rho}}{\rho(\xi)}. \tag{13}$$

Отметим, что средняя плотность $\tilde{\rho}$ в эйлеровых координатах есть величина, обычно используемая для плотности [26],

$$\langle V\rangle = \int_0^1 V(\xi)d\xi = \int_0^1 V\frac{\rho(\xi)}{\tilde{\rho}}d\zeta = \tilde{\rho}^{-1}.$$

Именно эта величина определяется экспериментально. В то же время средние значения p и u в обеих системах отсчета совпадают.

Осредненные уравнения движения в лагранжевых, также как и в эйлеровых координатах аналогичны по виду записи с уравнениями для однородной среды в соответствующих координатах. Существенно различаются только уравнения состояния (2) и (7). Именно в (7) отражена структура среды. Как будет показано, член $\langle V^2/c^2\rangle$ вносит дополнительную нелинейность.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Введение эффективной средней скорости звука по формуле

$$c_{eff} = \sqrt{\frac{\langle V\rangle^2}{\langle V^2/c^2\rangle}} \tag{14}$$

приводит нас к традиционной записи системы уравнений. Однако, c_{eff} не является осредненной характеристикой, т.е. $c_{eff}^2 \neq \langle c^2\rangle$. Очевидно, что структура среды вносит определенный вклад в нелинейность. Действительно, если даже скорость звука в каждом компоненте не зависит от давления, $c \neq f(p)$, то в общем случае величина c_{eff} является функцией давления.

В то же время на акустическом уровне система уравнений сводится к осредненным характеристикам u, p, $\langle V\rangle$, так как $\langle V^2/c^2\rangle_0 \neq f(p)$, а поля давления и массовой скорости совпадают в периодической и однородной средах, если свойства согласованы условиями [24]–[26]

$$\langle V\rangle_0 = V_0,\ \langle V^2/c^2\rangle_0 = \langle V_0^2/c_0^2\rangle. \tag{15}$$

В работе [30] показано, что акустические волны распространяются как в однородной среде, даже если в компонентах среды протекают релаксационные процессы.

Нормировка на средний удельный объем $\langle V\rangle_0$ и начальную эффективную скорость звука c_{eff} позволяет сравнивать результаты для различных сред.

В отличие от акустических волн нелинейные волны даже с большей длиной волны откликаются на внутреннюю структуру среды. Будет доказано, что нелинейные эффекты в этих средах усиливаются по сравнению с таковыми для однородных сред. Мы сейчас рассмотрим эволюционное уравнение со слабой нелинейностью и сравним коэффициенты нелинейности для этих сред.

Получим эволюционное уравнение в эйлеровой системе координат, учитывающее слабую нелинейность. Прежде всего отметим, что массовая скорость u связана с давлением p посредством [25]

$$u = \int_{p_0}^{p} \sqrt{\langle V^2/c^2\rangle}\,dp. \tag{16}$$

Функциональная зависимость среднего удельного объема от приращения давления $p' = p - p_0$ с точностью до членов второго порядка $O(p'^2)$ представляется в виде ряда

$$\langle V\rangle(p) = \langle V\rangle_0 + \left.\frac{d\langle V\rangle}{dp}\right|_{p=p_0} p' + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0} p'^2.$$

Систему уравнений (7), (12) можно тогда переписать в виде

$$\langle V\rangle_0\frac{\partial u}{\partial x} + \left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle_0\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0}\frac{\partial p'^2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle V\rangle_0\frac{\partial p'}{\partial x} = 0.$$

При выводе первого уравнения использовалось соотношение $u\dfrac{\partial p'}{\partial x} = p'\dfrac{\partial u}{\partial x}$, которое справедливо с принятой точностью $O(p'^2)$ и вытекает из (16). Эволюционное уравнение для одной переменной принимает вид

$$\langle V\rangle_0^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle_0\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}\right|_{p=p_0}\frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

В дальнейшем индекс 0, отмечающий невозмущенное состояние, опускаем. Рассмотрим волны, распространяющиеся в одну сторону. С указанной точностью

$$-\frac{\sqrt{\langle V^2/c^2\rangle}}{\langle V\rangle c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow 2\frac{\partial}{\partial x}$$

(см., например, разд. 93 в [32]). Следовательно, после факторизации (17), имеем эволюционное уравнение в эйлеровой системе координат:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + c_{eff}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2}\langle V\rangle\left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2}\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2}p'\frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Коэффициент нелинейности α_p, обусловленный структурой среды, можно представить в таком виде для случая $c \neq f(p)$:

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{2}\langle V\rangle\left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2}\frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2} = \frac{d(u + c_{eff})}{dp} =$$

$$= \langle V\rangle\left\langle\frac{V^3}{c^4}\right\rangle\left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2},$$

причем всегда $\alpha_p > 0$. Для однородной среды имеем $\dfrac{dc}{dp} = 0$ и $\alpha_{p\,hom} = V/c$ [32].

Выделяются среды, у которых величина V/c^2 не изменяется на периоде. Они ведут себя как однородные под действием волновых возмущений. Отдельные элементы структуры реагируют на изменение давления так, что относительная структура не изменяется, т.е. отношение $V(\xi, p)/V(\xi, p_0)$ не зависит от ξ. Эффективная скорость звука в этом случае является средней характеристикой $c_{eff} = \sqrt{\langle c^2\rangle}$. И, следовательно, вся система уравнений представима в средних переменных p, u, $\langle V\rangle$, и $c_{eff} = \sqrt{\langle c^2\rangle}$. Для таких сред неоднородность не вносит дополнительной нелинейности. Такие среды ведут себя подобно однородным при распространении нелинейных волновых возмущений.

На примере среды, скорость звука которой у каждого компонента не зависит от давления ($c \neq \neq f(p)$), покажем, что структура среды в общем случае вносит дополнительную нелинейность. Рассмотрим отношение коэффициентов нелинейности для структурированной и однородной сред, согласовав их предварительно по условиям (14), (15). В пространстве безразмерных отнормированных переменных это подразумевает, что при $p = p_0$ имеется $\langle V\rangle_0 = 1$, а также $\langle V^2/c^2\rangle_0 = 1$ для сравниваемых сред. Поэтому

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p\,hom}} = \langle V\rangle\left\langle\frac{V^3}{c^4}\right\rangle\left\langle\frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-2} \geq 1. \tag{19}$$

Это неравенство есть известное неравенство Коши–Шварца (см. формулы (4.6–60), (15.2–3) и разд. 14.2–6 в [33]). Учитывая, что $V \geq 0$, $V/c^2 \geq 0$, докажем (19):

$$\langle V\rangle\langle V^3/c^4\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^3}{c^4} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1} d\xi \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2} d\xi \geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1}}\sqrt{\frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2}} d\xi\right)^2 =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2} d\xi\right)^2 \equiv \langle V^2/c^2\rangle^2.$$

Осталось определить условие, когда выполняется знак равенства. Для этого воспользуемся векторной записью неравенства Коши–Шварца (см. формулу (14.2–5) в [33])

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

причем знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда векторы **a** и **b** линейнозависимы: $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ (k = const). В нашем случае это означает, что

$$\sqrt{\frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1}} \Big/ \sqrt{\frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2}} = \text{const}.$$

Окончательно, знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда V/c^2 = const. Эта структурированная среда была рассмотрена выше. Для всех остальных сред с микроструктурой, для которых величина V/c^2 изменяется на периоде, реализуется неравенство. Приходим к результату, что в структурированной среде α_p всегда больше, чем в однородной ($\alpha_{p\,hom}$).

Таким образом, строгий учет структуры среды обнаруживает нелинейные эффекты, непосредственно обусловленные неоднородностью. Доказано, что структура среды в общем случае вносит дополнительную нелинейность. В работах [27, 30] этот эффект использован для разработки математических основ нового метода диагностики, в котором определяются свойства многокомпонентной среды с помощью распространяющихся в ней длинных нелинейных волн. Природа длинноволнового воздействия различна на разных масштабных уровнях. На микроуровне поведение среды подчиняется термодинамическим законам, а на макроуровне – выражается в волновом движении для средних характеристик.

Автор благодарен член-корр. НАН Украины В.А. Даниленко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 96 с.
2. *Родионов В.Н.* Очерк геомеханики. М.: Научный мир, 1996. 64 с.
3. *Ostrovsky L.A.* Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. 90. № 6. С. 3332–3337.
4. *Bereznev I.A., Nikolaev A.V.* Experimental investigations of nonlinear seismic effects // Phys. Earth Planetary Int. 1988. 50. P. 83–87.
5. *Johnson P.A., Shankland T.J., O'Connell R.J., Albright J.N.* Nonlinear generation of elastic waves in crystalline rock // J. Geophys. Res. 1987. 92. P. 3597–3602.
6. *Johnson P.A., McCall K.R.* Observation and implications of nonlinear elastic wave response in rock // Geophys. Res. Lett. 1994. 21. P. 165–168.
7. *Bonner B.P., Wanamaker B.J.* Acoustic nonlinearitis produced by a single macroscopic fracture in granite, in Review of Progress in Quantitative NDE, edited by D.O. Thompson and D.E. Chimenti, Plenum, New York. Vol. 1991. 10B. P. 1861–1867.
8. *Гамбурцева Н.Г., Николаев А.В., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В.* Солитонные свойства телесейсмических волн // ДАН СССР. 1986. 291. № 4. С. 30–32.
9. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. Theory and methods, Sun Francisco, Calif. 1980.
10. *Truesdell C.* Rational thermodynamics. New York: Springer-Verlag, 1994. 570 p.
11. *Achenbach J.D.* Wave propagation in Plastic Solids. North–Holland, Amsterdam. 1973.
12. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
13. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
14. *Rajagopal K.R., Tao L.* Machanics of mixtures. World Scientific Publishing, Singapure. 1995. 195 p.

15. *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 304 с.

16. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid–saturated solid. I. Lowfrequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. 28. P. 168–178.

17. *Ляхов Г.М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. 288 с.

18. *Николаевский В.Н.* Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // ДАН СССР. 1985. 283. № 6. С. 1321–1324.

19. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987.

20. *Струминский В.В.* Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985. 240 с.

21. *Бахвалов Н.С., Эглит М.Э.* Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // ДАН СССР. 1983. 268. № 4. С. 836–840.

22. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

23. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. New York: Springer-Verlag, 1980.

24. *Вахненко В.О., Даниленко В.А., Куліч В.В.* Хвильові процеси в періодичному релаксуючому середовищі // Доп. АН УРСР. 1991. № 4. С. 93–96.

25. *Вахненко В.А., Кулич В.В.* Длинноволновые процессы в периодической среде // ПМТФ. 1992. № 6. С. 49–56.

26. *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Осредненное описание ударноволновых процессов в периодических средах // Хим. физика. 1993. 12. № 3. С. 383–389.

27. *Вахненко В.А., Даниленко В.А., Кулич В.В.* Асимптотическое обоснование модели многокомпонентных сред Ляхова // ФГВ. 1996. 32. № 2. С. 68–73.

28. *Вахненко В.А.* Диагностика свойств структурированной среды длинными нелинейными волнами // ПМТФ. 1996. 37. № 5. С. 35–42.

29. *Вахненко В.А., Даниленко В.А.* Асимптотическая модель нелинейных волн в природных многокомпонентных средах // Геофиз. журнал. 1996. № 5. С. 12–18.

30. *Vakhnenko V.O., Danylenko V.A., Michtchenko A.V.* An asymptotic averaged model of nonlinear long waves propagation in media with a regular structure // (Принято в печать: Int. J. Non–Linear Mech.)

31. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 408 с.

32. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

33. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1988.

Increase of Nonlinear Effect in a Medium with Microstructure

V. A. Vakhnenko

An averaged set of hydrodynamic equations in the Lagrangian and Eulerian coordinates is obtained for the description of long nonlinear waves in a structured medium. The nature of the long-wave effect is different at different scale levels. At the microscopic level, the behavior of the medium is governed by the laws of thermodynamics, while at the macroscopic level it manifests itself as a wave motion for the average characteristics. An evolutionary equation allowing for weak structure-caused nonlinearity is obtained. It is shown that the medium structure gives rise to increase in the nonlinear effects that accompany the propagation of long waves.