АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1999, том 45, № 2, с. 281

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534-231

О МЕХАНИЧЕСКИХ ИМПЕДАНСАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

© 1999 г. Е. Л. Шендеров

Центральный научно-исследовательский институт "Морфизприбор",
197376 С.-Петербург, Чкаловский пр., 46
E-mail: shend@fs.spb.su

Поступила в редакцию 24.06.98 г.

В работе [1] были получены выражения для импедансов различных форм колебаний сферических оболочек, причем полагалось, что они относятся к осесимметричным формам колебаний. Эти же выражения приведены в книге [2], с. 257. Цель этой заметки – показать, что импедансы неосесимметричных форм колебаний не зависят от номера азимутальной моды и поэтому также описываются выражениями, приведенными в работах [1, 2].

Уравнения движения в сферической системе координат выражаются через угловую часть оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} \tag{1}$$

от нормальных составляющих смещения w и внешней нагрузки q, а также через более высокие операторные степени от угловой части оператора Лапласа (см., например, уравнение (2) из работы [1]). Пусть w и q заданы в виде разложений по сферическим гармоникам $Y_{mn} = P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$, т.е.

$$q = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{mn}Y_{mn}(\theta, \varphi), \tag{2}$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} w_{mn}Y_{mn}(\theta, \varphi). \tag{3}$$

Импедансы различных форм колебаний определяются в виде

$$z = q_{mn}/(-i\omega w_{mn}). \tag{4}$$

Сферические гармоники удовлетворяют уравнению

$$\Delta Y_{mn} = -n(n+1)Y_{mn}. \tag{5}$$

Коэффициент в правой части не зависит от номера азимутальной гармоники m. Подставив соотношение (5) в уравнение движения, получим выражения для импедансов z, приведенные в работах [1, 2] и зависящие только от номера n, но не зависящие от номера m. Таким образом эти импедансы описывают как осесимметричные, так и неосесимметричные колебания.

Заметим, что этот же вывод следует из преобразований, приведенных в книге [2] на с. 252. Схема этих преобразований сводится к следующему. Рассмотрим упругую сферу с неосесимметричной нагрузкой. Эту нагрузку можно представить как совокупность точечных сил. Рассмотрим одну из этих сил и выберем ось сферической системы координат, проходящую через эту силу. Ясно, что для описания движения оболочки под действием этой силы достаточно знать только импедансы осесимметричных колебаний. Затем возьмем точечную силу с другими координатами и выберем для нее новую систему координат с осью, проходящей через эту новую силу. Для нее также достаточно взять только импедансы осесимметричных колебаний и т.д. Интегрируя по всей области приложения сил, мы получим, что даже для неосесимметричной нагрузки движение полностью описывается импедансами осесимметричных колебаний.

Из приведенных рассуждений следует, что при решении задач излучения и дифракции на упругих сферических телах в случаях, когда поле является неосесимметричным (например, для сферы, находящейся вблизи звукоотражающей плоскости при наклонном падении волны) в разложениях типа (2), (3) все множители, описывающие механические свойства сферы, могут быть вынесены из-под суммы по m.

Все сказанное выше справедливо также и для неоднородных по радиусу упругих сфер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Импедансы осесимметирчных колебаний с учетом инерции вращения и сдвига // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 300–306.
2. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.