

УДК 534.222:539.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2000 г. А. О. Ватульян¹, А. Н. Соловьев²

¹ Ростовский государственный университет,
344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 5

² Донской государственный технический университет,
344010 г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

Поступила в редакцию 28.08.99 г.

Для установившихся колебаний анизотропного упругого тела конечных размеров предлагается метод определения потоков вибрационной энергии в теле, основанный на измерении поверхностных значений вектора напряжений и вектора смещений на части границы. Предлагаемый алгоритм восстановления волнового поля сводится к решению неклассических граничных интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, формулировка которых не требует построения фундаментальных решений, но является условно некорректной задачей. При численной реализации разработанного метода используются регуляризация по А.Н. Тихонову и идеи метода граничных элементов. Проведены численные эксперименты по восстановлению перемещений и напряжений на границе прямоугольной и круговой области из аустенитной стали в рамках плоской задачи ортотропной теории упругости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Восстановление поля в упругой среде является весьма важной задачей интенсиометрии, где определение потоков вибрационной энергии в конструкциях основано на измерении поверхностных значений вектора напряжений и вектора смещений. Особенно важен с точки зрения приложений случай обращения в нуль компонент вектора напряжений на границе упругого тела. Отметим, что постановка и решение задач восстановления волнового поля для изотропной упругой среды даны в работах [1–3]. При этом считается, что на свободной от усилий границе упругого тела известны компоненты вектора перемещений; задача такого типа сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с гладким ядром и является некорректной.

В настоящей работе обсуждаются аналогичные задачи для анизотропной упругой среды, предлагается алгоритм восстановления волнового поля, основанный на интегральных уравнениях иного типа, один из вариантов которых предложен в [5] и далее реализован для классических краевых задач акустики и теории упругости в [6, 7, 9].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившиеся колебания анизотропного односвязного упругого тела V , ограниченного гладкой поверхностью S . Будем считать, что часть поверхности $S_1 \subset S$ доступна для измерения смещений. Тогда задача восстановления поля для тела V может быть сформулирована следующим

образом. Найти компоненты вектора смещения u_i , удовлетворяющие системе уравнений [8]

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

и граничным условиям на части S_1

$$u_i|_{S_1} = u_{i0}, \quad t_i = c_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{S_1} = p_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

где c_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, удовлетворяющие известным соотношениям упругой симметрии

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (3)$$

и положительной определенности удельной потенциальной энергии деформаций

$$W(\epsilon) = \frac{1}{2}c_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j} \geq 0. \quad (4)$$

Здесь n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S . Постановка краевой задачи (1), (2) не является традиционной в математической физике для уравнений эллиптического типа и в частности, в теории упругости.

При исследовании краевой задачи с граничными условиями вида (2) главными вопросами являются вопросы единственности и устойчивости решения по отношению к малым возмущениям.

В изотропной теории упругости [1, 3] показано, что имеет место единственность поставленной таким образом задачи, исследована устойчивость такой постановки; при этом ключевым моментом при решении системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами являлось представление вектора перемеще-

ний в виде разложения по нормальным формам. В этих же работах сформулирован критерий, связывающий степень точности восстановления поля с размерностью аппроксимирующей модели. Отметим, что краевая задача (1)–(2) несложным образом приводится к задаче Коши для уравнений анизотропной теории упругости (1); доказательство единственности для этих уравнений аналогично доказательству теоремы Хольмгрена [4].

Один из подходов, предложенный в [1, 3], и приводящий к решению системы уравнений Фредгольма 1-го рода, требует знания матричной функции Грина задачи, что связано со значительными математическими трудностями при решении конкретных краевых задач для ограниченных тел. В настоящей работе предлагается иной способ формулировки операторных уравнений, связывающий известные и неизвестные компоненты полей.

3. СПОСОБ СВЕДЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для сведения сформулированной неклассической краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями (2) используем основные идеи получения систем граничных уравнений для классических краевых задач, разработанные в [5–7, 9]. В основе такого подхода лежит использование интегрального преобразования Фурье и представление трансформант вектора смещений в виде [5]

$$U_k(\alpha) = \frac{p_{km}(\alpha, \omega) V_m(\alpha)}{p_0(\alpha, \omega)}; \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где

$$U_k(\alpha) = \int_V u_k(x) e^{i(\alpha, x)} dV_x,$$

$$V_m(\alpha) = \int_S [\sigma_{mj} n_j - i \alpha_j c_{mjkl} u_k n_l] e^{i(\alpha, x)} dS_x,$$

$$m = 1, 2, 3,$$

$$p_0(\alpha, \omega) = \det A, \quad A = \|A_{mk}(\alpha, \omega)\|,$$

$$A_{mk}(\alpha, \omega) = c_{mjkl} \alpha_j \alpha_l - \omega^2 \rho \delta_{mk},$$

$p_{km}(\alpha, \omega)$ – компоненты матрицы B , присоединенной к матрице A : $BA = p_0(\alpha, \omega)E$, E – единичная матрица,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Отметим, что множество нулей полинома $p_0(\alpha, \omega)$ при вещественных $\eta_j = \frac{\alpha_j}{|\alpha|}$ связано с решением уравнения Кристоффеля [8], откуда следует, что

$p_0(\alpha, \omega)$ обращается в нуль на трех вещественных многообразиях.

Проанализируем множество нулей полинома $p_0(\alpha, \omega)$ при комплексных значениях α_j . Введем безразмерные переменные $\beta_j = k^{-1} \alpha_j$, $k = \omega/c$, $c = \sqrt{\rho/c_{3333}}$. Обезразмеренное уравнение $p_0(\alpha, \omega) = k^6 p_0(\beta, 1) = 0$ при фиксированных значениях β_1, β_2 имеет шесть корней $\beta_3 = \beta_{3s}(\beta_1, \beta_2)$, $s = 1, 2, \dots, 6$, среди которых в случае $\text{Im} \beta_1 = \text{Im} \beta_2 = 0$ могут встретиться только действительные и пары комплексно-сопряженных корней в силу вещественности коэффициентов полинома $p_0(\beta, 1)$. Для дальнейшего анализа разобьем множество корней $P = \{\beta_{3s}(\beta_1, \beta_2)\}$ на две компоненты P_+ и P_- . При $|\beta_1^2 + \beta_2^2| \rightarrow \infty$ β_{3s} становятся чисто мнимыми в силу положительной определенности упругой энергии (4). К P_+ отнесем те корни, для которых $\text{Im} \beta_{3s} > 0$ при $|\beta_1^2 + \beta_2^2| \rightarrow \infty$; при $\text{Im} \beta_{3s} = 0$ к P_+ отнесем те β_{3s} , для которых $\text{Re} \beta_{3s} > 0$. Итак $P_+ = \{\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}\}$.

Дальнейший анализ представления (5) для комплексных значений α_j приводит к следующим выводам. С одной стороны, в левой части (5) стоят аналитические функции от α_j , а в правой части – имеющие полюса на множестве P . Возникающее противоречие устраняется путем обращения в нуль числителя в правой части (5) на множестве P . Это приводит к некоторым соотношениям разрешимости, из которых независимыми являются шесть:

$$p_{k1}(\alpha_1, \alpha_2, \pm \alpha_{3s}(\alpha_1, \alpha_2, \omega), \omega) \times \\ \times V_k(\alpha_1, \alpha_2, \pm \alpha_{3s}(\alpha_1, \alpha_2, \omega)) = 0, \quad s = 1, 2, 3 \quad (6)$$

Остальные равенства (при $m = 2, 3$) при условии выполнения (6) удовлетворяются тождественно. При наличии свойств симметрии у области V и граничных условий число независимых уравнений может сократиться до трех.

Заметим, что систему равенств (6) можно трактовать как систему интегральных уравнений, связывающих на границе S известные (соответственно $\sigma_{ij} n_j|_{S_1}$ и $u_i|_{S_1}$) и неизвестные (соответственно $\sigma_{ij} n_j|_{S_2}$ и $u_i|_{S_2}$) величины. Таким образом, равенства (6) представляют собой систему интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами и процедура их обращения требует, как правило, регуляризации [10]. Отметим, что правые части этих операторных уравнений представляют собой сглаживающие (интегральные) операторы от заданных (измеренных) функций, а поэтому такая задача условно-корректна и процедура обращения может быть осуществлена весьма эф-

эффективно при дискретизации и переходе к конечному варианту.

4. ПРИМЕР – ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

В качестве примера приведем систему граничных интегральных уравнений для ортотропного тела. Такими свойствами обладают аустенитные стали [11], многие композиционные материалы в рамках концепции эффективных модулей.

Разрешающая система интегральных уравнений имеет вид (в обезразмеренной форме)

$$\begin{aligned}
 & p_{11}(\beta_1, \pm\beta_{3s}(\beta_1))V_1(k\beta_1, \pm k\beta_{3s}(\beta_1)) + \\
 & + p_{13}(\beta_1, \pm\beta_{3s}(\beta_1))V_3(k\beta_1, \pm k\beta_{3s}(\beta_1)) = 0, \\
 & s = 1, 2; \\
 & p_{11}(\beta_1, \beta_3) = \gamma_5\beta_1^2 + \beta_3^2 - 1, \\
 & p_{13}(\beta_1, \beta_3) = -(\gamma_5 + \gamma_7)\beta_1\beta_3,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 V_1(k\beta_1, k\beta_3) = & \int_L (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{13}n_3 - ik((\beta_1n_1\gamma_1 + \\
 & + \beta_3n_3\gamma_5)u_1 + (\beta_1n_3\gamma_7 + \beta_3n_1\gamma_5)u_3) e^{ik(\beta, x)} dL_x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3(k\beta_1, k\beta_3) = & \int_L (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3 - ik((\beta_1n_3\gamma_5 + \\
 & + \beta_3n_1\gamma_7)u_1 + (\beta_1n_1\gamma_5 + \beta_3n_3)u_3) e^{ik(\beta, x)} dL_x,
 \end{aligned}$$

где $k = \omega\sqrt{\rho/c_{33}}$, $\gamma_1 = c_{11}/c_{33}$, $\gamma_5 = c_{44}/c_{33}$,

$$\gamma_7 = c_{13}/c_{33}, \quad \beta_{3s}(\beta_1) = i\mu_s(\beta_1), \quad s = 1, 2,$$

$$\mu_s(\beta_1) = [A_1(\beta_1) - i(-1)^s(A_2(\beta_1))^{1/2}]^{1/2},$$

$$A_1(\beta_1) = (2\gamma_5)^{-1}[(\gamma_1 - 2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_7^2)\beta_1^2 - (1 + \gamma_5)],$$

$$A_2(\beta_1) = -(A_1(\beta_1))^2 + (\gamma_5)^{-1}(1 - \gamma_1\beta_1^2)(1 - \gamma_5\beta_1^2).$$

На рис. 1 приведены зависимости $\beta_{3s}(\beta_1)$ для аустенитной стали со следующими материальными постоянными [11]:

$$\rho = 0.812 \times 10^4 \text{ кг/м}^3, \quad c_{11} = 0.2627 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2,$$

$$c_{13} = 0.145 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2, \quad c_{33} = 0.216 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2,$$

$$c_{44} = 0.129 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2.$$

Система уравнений (7) связывает известные и неизвестные значения компонент вектора перемещений и вектора напряжений на контуре $L = L_1 \cup L_2$. Пусть на части L_1 заданы

$$u_i|_{L_1} = f_i, \quad \sigma_{ij}n_j|_{L_1} = g_i, \quad i = 1, 3, \tag{8}$$

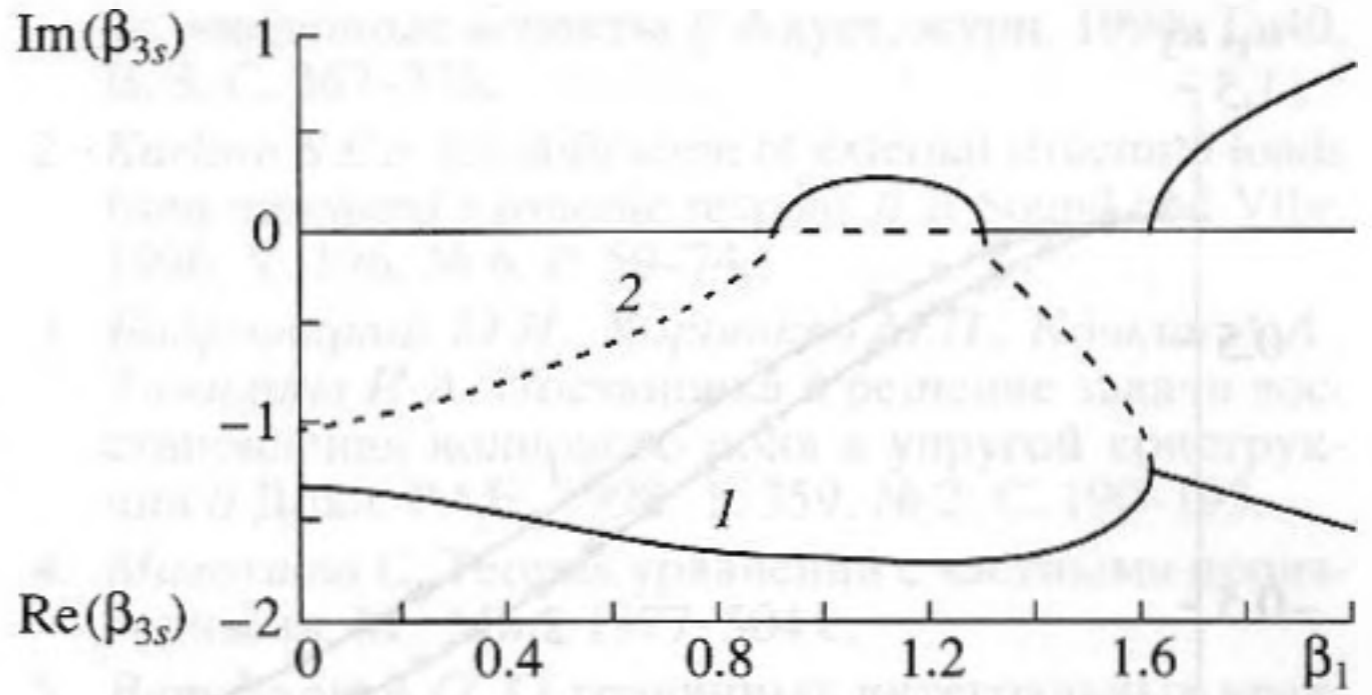


Рис. 1.

а на L_2 $u_i|_{L_2}$ и $t_i = \sigma_{ij}n_j|_{L_2}$, $i = 1, 3$ – являются неизвестными. Относительно этих неизвестных равенства (7) представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами, которая эквивалентна исходной краевой задаче. Фактически эти уравнения представляют собой следствие теоремы взаимности в теории упругости для истинных полей и неоднородных плоских волн в ортотропной среде.

Процедура обращения таких операторных уравнений является некорректной и основана на сочетании идей метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова, как это проделано в [5] для уравнения Гельмгольца и в [9] для антиплоской задачи анизотропной теории упругости.

В качестве примеров, иллюстрирующих предлагаемый подход, рассмотрим две плоские задачи для прямоугольной и круговой области для ортотропного материала с приведенными выше упругими постоянными.

1°. *Задача восстановления поля для прямоугольника $S = [0, a] \times [0, b]$.*

На $L_1 = \{x_1 = 0, x_3 \in [b_1, b]\} \cup \{x_3 = b, x_1 \in [0, a]\} \cup \{x_1 = a, x_3 \in [b_2, b]\}$ известны функции f_i и g_i ($i = 1, 3$) из (8), соответствующие полю перемещений и вычисленному на основе обобщенного закона Гука полю напряжений

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_3) &= \text{Re}\{-p_{13}(\beta_1, \beta_3)Z(x_1, x_3)\}, \\
 u_3(x_1, x_3) &= \text{Re}\{p_{11}(\beta_1, \beta_3)Z(x_1, x_3)\}, \\
 \sigma_{11}(x_1, x_3) &= c_{33}\text{Re}\{ik(-\gamma_1 p_{13}(\beta_1, \beta_3)\beta_1 + \\
 & + \gamma_7 p_{11}(\beta_1, \beta_3)\beta_3)Z(x_1, x_3)\}, \\
 \sigma_{13}(x_1, x_3) &= c_{33}\text{Re}\{ik\gamma_5(-p_{13}(\beta_1, \beta_3)\beta_3 + \\
 & + p_{11}(\beta_1, \beta_3)\beta_1)Z(x_1, x_3)\}, \\
 \sigma_{33}(x_1, x_3) &= c_{33}\text{Re}\{ik(-\gamma_7 p_{13}(\beta_1, \beta_3)\beta_1 + \\
 & + p_{11}(\beta_1, \beta_3)\beta_3)Z(x_1, x_3)\},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $Z(x_1, x_3) = \exp[ik(\beta_1 x_1 + \beta_3 x_3)]$, $\beta_3 = \beta_{31}(\beta_1)$.

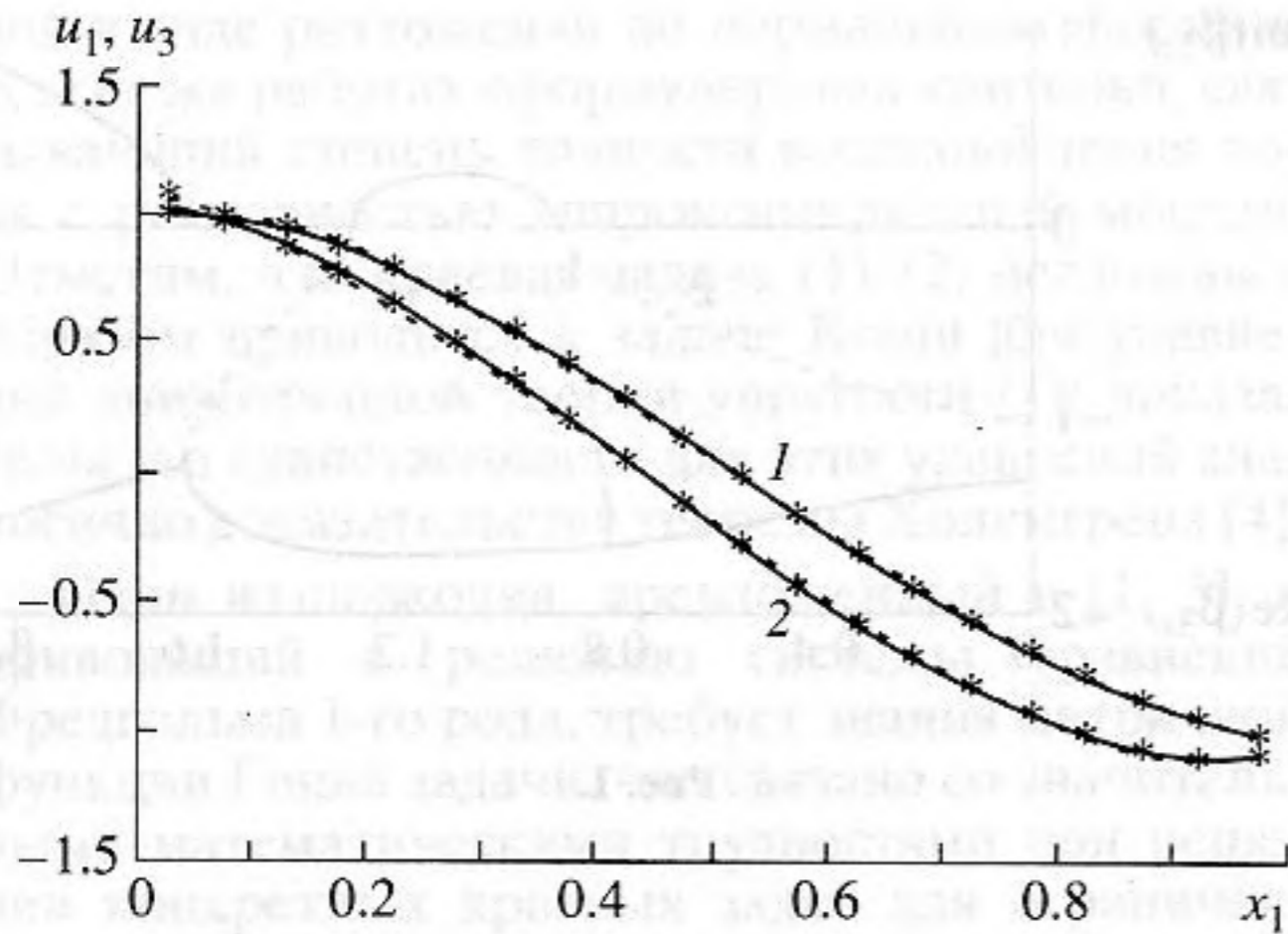


Рис. 2.

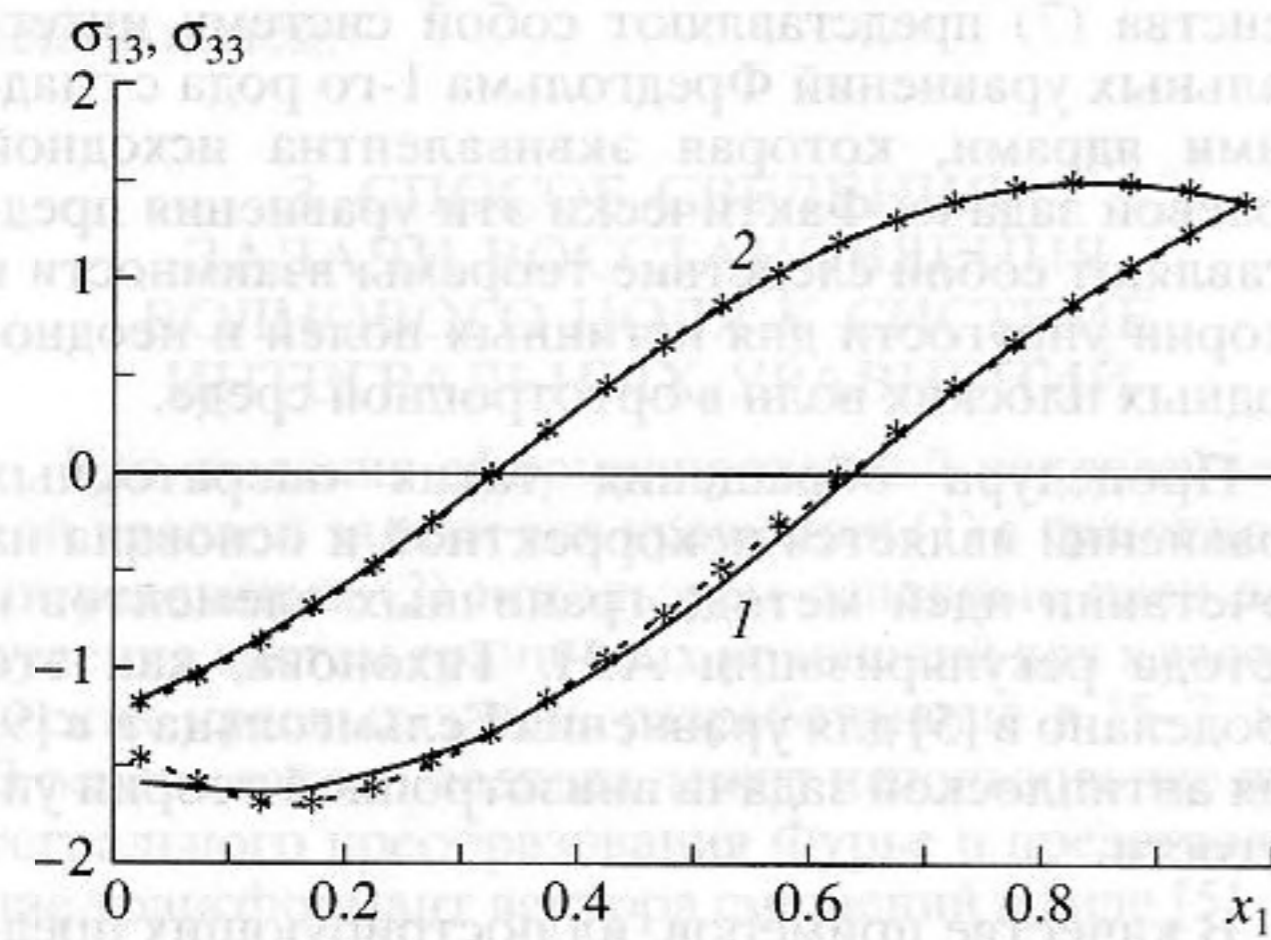


Рис. 3.

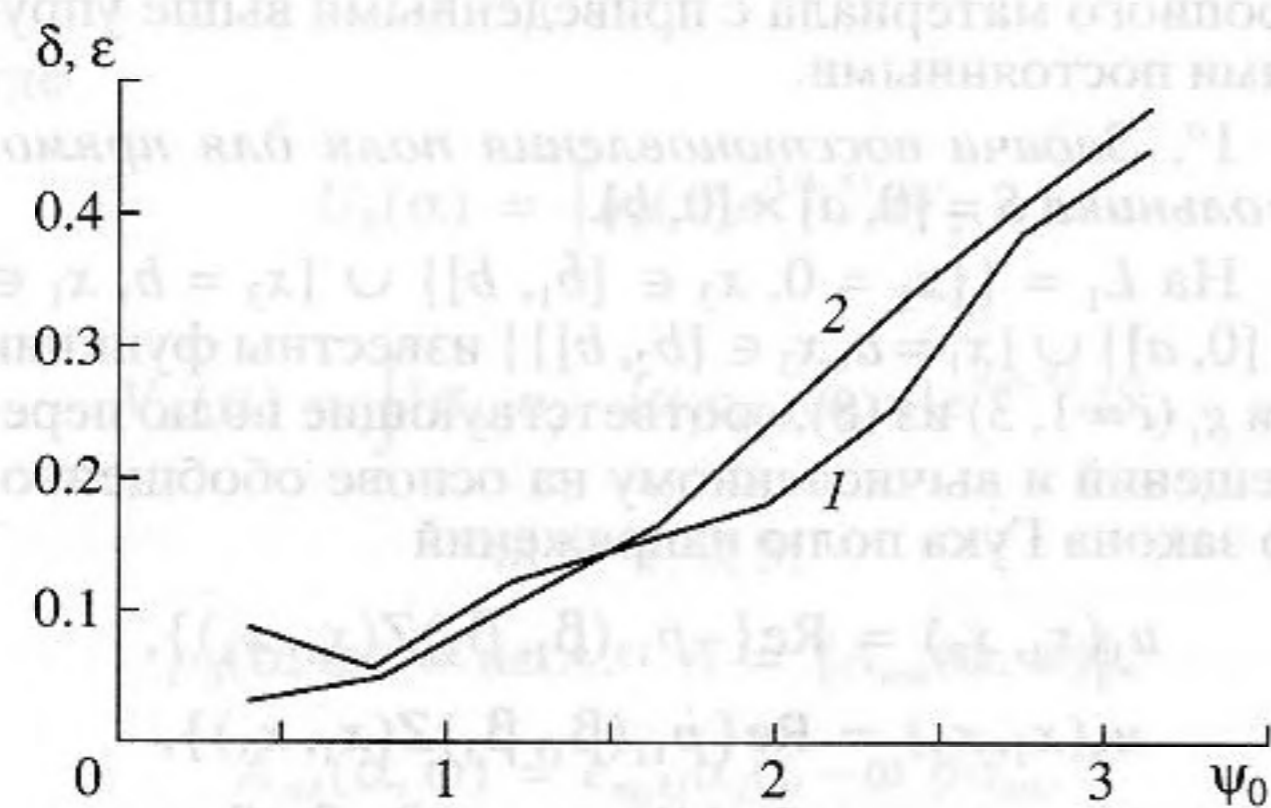


Рис. 4.

Неизвестными, подлежащими восстановлению на $L_2 = \{x_1 \in [0, a]; x_3 = 0\}$, являются $u_j(x_1, 0)$, $\sigma_{13}(x_1, 0)$, $\sigma_{33}(x_1, 0)$. На рис. 2 при $a = 1$, $b = 1$, $b_1 = b_2 = 0$,

$$\begin{aligned} ka &= 1.1, & k\beta_1 &= 3, \\ k\beta_3 &= -2.2507 + 1.7817i, \end{aligned} \quad (10)$$

представлены графики функций $u_1(x_1, 0)$, $u_3(x_1, 0)$ на границе L_2 , сплошные кривые 1 и 2 соответствуют точному решению (9), прерывистые линии и звездочки соответствуют значениям, восстановленным численно. На рис. 3 представлены аналогичные зависимости для $\sigma_{13}(x_1, 0)$, $\sigma_{33}(x_1, 0)$. При этом расчеты производились при разбиении границы L_2 на 20 элементов. Результаты расчетов показывают достаточную точность восстанавливаемых полей в рассмотренной задаче в широком диапазоне частот.

2. *Задача восстановления поля для круга* $S = \{x_1, x_3 | (x_1 - R)^2 + (x_3 - R)^2 \leq R^2\}$.

Исследовалась эффективность предложенного метода восстановления упругих полей в зависимости от размера части границы $L_1 = \{x_1 = R + R\cos\psi, x_3 = R + R\sin\psi, \psi \in [\psi_0, 2\pi]\}$, доступной для измерения характеристик упругих полей, определенных соотношениями (9), (10). Неизвестными являются компоненты векторов перемещений и напряжений на $L_2 = \{x_1 = R + R\cos\psi, x_3 = R + R\sin\psi, \psi \in [0, \psi_0]\}$. Так, при $R = 0.5$ на рис. 4 представлены графики относительных погрешностей δ – кривая 1 и ϵ – кривая 2

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad \delta_1 = \frac{\max_{L_2} |u_1 - u_1^N|}{\max_{L_2} |u_1|},$$

$$\delta_2 = \frac{\max_{L_2} |u_3 - u_3^N|}{\max_{L_2} |u_3|},$$

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}, \quad \epsilon_1 = \frac{\max_{L_2} |\sigma_n - \sigma_n^N|}{\max_{L_2} |\sigma_n|},$$

$$\epsilon_2 = \frac{\max_{L_2} |\sigma_\tau - \sigma_\tau^N|}{\max_{L_2} |\sigma_\tau|}$$

при восстановлении компонент векторов перемещений и напряжений на границе L_2 при $\psi_0 \in \{\pi/8, \pi\}$ (u_i^N , σ_n^N , σ_τ^N – восстановленные значения, число элементов N соответствует постоянной длине граничного элемента с раствором угла $\psi = \pi/40$). Серия расчетов по восстановлению упругих полей свидетельствует об относительно точном их определении в случае, когда длина участка L_1 в три и более раз превосходит длину участка L_2 ; точность восстановления падает при относительном увеличении длины участка L_2 .

Как видно из рис. 5, на котором при $\psi_0 = 3\pi/4$ изображены графики функций $u_1|_{L_2}$ – кривые 1

(темными точками отмечены восстановленные значения) и $u_3|_{L_2}$ – кривые 2 (светлыми точками

отмечены восстановленные значения), наибольшая погрешность в реализованной численной схеме возникает на концах восстанавливаемого ин-

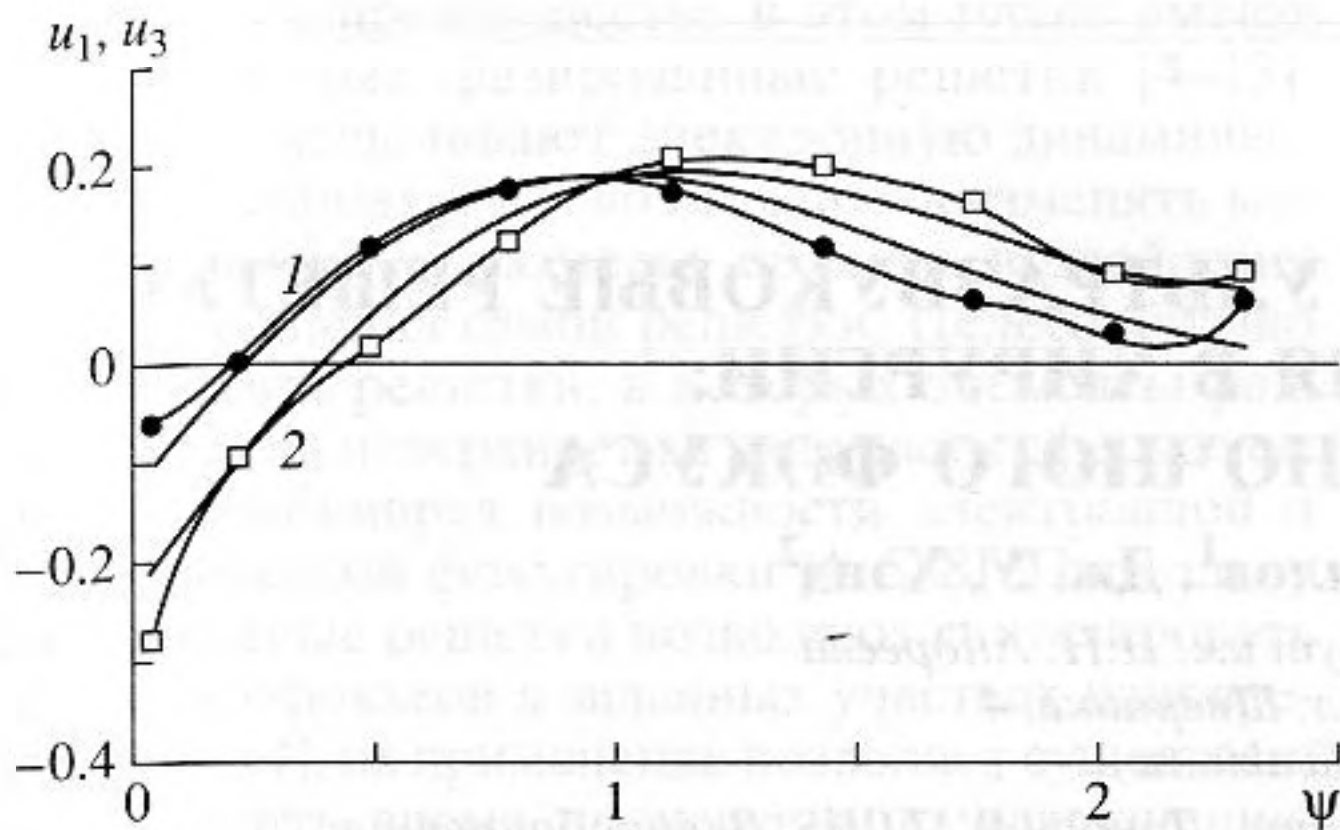


Рис. 5.

тервала; внутри интервала погрешность восстановления не превосходит 15%. Всплески искомым величин на краях характерны для реализации метода регуляризации А.Н. Тихонова в классе суммируемых функций при решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

Представленные в работе примеры восстановления упругих полей свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного численного алгоритма реконструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровицкий Ю.И. Задачи восстановления поля в структурной интенсивности: постановка, свойства, численные аспекты // Акуст. журн. 1994. Т. 40. В. 3. С. 367–376.
2. Karlson S.E.S. Identification of external structural loads from measured harmonic responses // J. Sound and Vibr. 1996. V. 196. № 6. P. 59–74.
3. Бобровицкий Ю.И., Коротков М.П., Кочкин А.А., Томила И.А. Постановка и решение задачи восстановления волнового поля в упругой конструкции // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 2. С. 190–193.
4. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
5. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
6. Ватульян А.О., Садчиков Е.В. О граничных интегральных уравнениях в акустике // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 326–330.
7. Ватульян А.О., Шамшин В.М. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62. № 3. С. 112–119.
8. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
9. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. К формулировке граничных интегральных уравнений в динамических задачах анизотропной теории упругости // Межвуз. сб. н. трудов "Интегро-дифференциальные операторы и их приложения". Ростов н/Д. Изд. ДГТУ, 1997. Вып. 2. С. 30–35.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
11. Temple A., Ogilvy J. Numerical techniques for wave propagation and scattering in inhomogeneous anisotropic materials // Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation. 1990. P. 143–149.

Field Reconstruction in an Anisotropic Elastic Medium

A. O. Vatulyan and A. N. Solov'ev

For steady-state vibrations of an anisotropic elastic body of finite dimensions, a method of the determination of the vibration energy flows in the body is proposed. The method is based on the measurements of the surface values of the stress and displacement vectors at a part of the boundary. The proposed algorithm of the wave field reconstruction is reduced to solving nonclassical boundary integral equations of the first kind with smooth kernels. The formulation of these equations does not require the determination of fundamental solutions, but represents a conditionally ill-posed problem. The numerical realization of the proposed method is based on the Tikhonov regularization method and the idea of the boundary element method. Numerical experiments consisting in the reconstruction of the displacements and stresses at the boundary of a rectangular and a circular domains of austenitic steel are performed in the framework of a planar problem of the orthotropic elasticity theory.