

УДК 534.64:576.7

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА СЛОЯ, ИЗМЕРЕННОГО С ПОМОЩЬЮ ТВЕРДОГО КРУГЛОГО ШТАМПА

© 2000 г. Е. В. Ерёмин, Е. М. Тиманин

Институт прикладной физики РАН

603600 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46

E-mail: eugene@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 17.06.99 г.

Получены теоретические выражения для импедансных характеристик слоя, сцепленного с жестким основанием, при различных профилях нормального давления под колеблющимся на его поверхности штампом, не создающим сдвиговых напряжений. Средствами специализированного программно-аппаратного комплекса зарегистрированы частотные зависимости импедансных характеристик однородного желатинового слоя, а также их изменения при изменении диаметра штампа. Проведены расчеты импедансных характеристик в моделях с “равномерным”, с “параболическим” и с “гиперболическим” профилями давления под штампом и сопоставление их результатов с результатами экспериментов. Установлено, что наиболее адекватной экспериментам оказывается модель с равномерным распределением давления под штампом.

Разработка математических моделей импедансных характеристик биологических мягких тканей кроме очевидного чисто научного интереса является актуальной в связи с развитием в последнее время способа непрерывного мониторинга механических параметров тканей с высоким временным разрешением по данным одночастотных импедансных измерений [1] и способа реконструкции механических параметров слоистых тканей по данным спектральных импедансных измерений (то есть по частотным зависимостям импедансных характеристик) [2–4]. К настоящему времени известно достаточно много моделей импедансных свойств биологических тканей [3–9]. Наиболее полной из них является трехслойная модель, предложенная в работе [3] и полученная на основе результатов экспериментов с тканями предплечья человека. Однако использование этой модели для интерпретации результатов экспериментальных исследований импедансных характеристик других участков тела, очень разнообразных по строению и по механическим свойствам, или, с другой стороны, для выбора оптимальных условий проведения таких исследований затруднено в связи со сложностью идентификации ее параметров, требующей специализированных программных средств. Для этих целей представляется возможным использование менее строгих, но и существенно менее трудоемких в расчетах моделей, а именно – “моделей с силовым источником колебаний”, основанных на приближениях, принимаемых при решении задачи Лэмба [4, 10–12]. В данной работе эти возможности демонстрируются на примере сопоставления расчетов в однослойной

модели такого типа с данными экспериментов на однородном слое желатина.

Для построения таких моделей, как и для построения модели [3], используется известный подход [10], который состоит в следующем. Во-первых, рассмотрение задачи ограничивается аксиально-симметричным случаем и находится общее решение уравнений для акустического поля в линейно-упругой среде в образах Ханкеля. Во-вторых, задаются граничные условия, соответствующие рассматриваемому слоистому объекту. В-третьих, с помощью обратного преобразования Ханкеля находится жесткость  $K$  (импеданс  $Z$ ) объекта как отношение приложенной к штампу силы  $P$  и его смещения  $U$  (скорости  $V$ ). Отличием “моделей с силовым источником колебаний” является то, что на внешней поверхности объекта принимаются упрощенные граничные условия, а именно – условие известности нормального давления и условие отсутствия касательных напряжений на всех поверхности, в том числе и под штампом. Последнее условие интерпретируется как условие проскальзывания штампа и, в принципе, его выполнение может быть обеспечено в эксперименте специальными приемами. Профиль давления под штампом  $p(r)$  в моделях этого класса должен быть подобран для обеспечения соответствия экспериментам.

Опуская здесь достаточно простые выкладки, соответствующие этому подходу (см. подробности в работе [4]), приведем окончательное выражение для комплексной жесткости слоя, нижняя поверхность которого  $z = H$  жестко сцеплена с недеформируемым основанием, а на верхнюю поверхность

$z = 0$  в области  $r \leq a$  действует колеблющийся круглый в сечении плоский штамп радиуса  $a$

$$K = \frac{P}{U} = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\kappa_l(D_{13} + D_{14}) - k^2(D_{11} - D_{12})R(k)}{(k^2 + \kappa_l^2)(D_{13} - D_{14}) - 2k^2\kappa_l(D_{11} + D_{12})} dk} \quad (1)$$

Здесь  $k$  – параметр преобразования Ханкеля; параметры  $\kappa_l^2 = k^2 - k_l^2$  и  $\kappa_t^2 = k^2 - k_t^2$  – определяются волновыми числами сдвиговых и продольных волн  $k_l^2 = \omega^2/c_l^2$ ,  $k_t^2 = \omega^2/c_t^2$ , где  $\omega$  – круговая частота колебаний штампа,  $c_l^2 = \mu/\rho$  и  $c_t^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  – скорости сдвиговых и продольных волн, определяющиеся плотностью  $\rho$  и коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Определители третьего порядка  $D_{ij}$  в (1) являются алгебраическими дополнениями элементов первой строки главного определителя системы уравнений, соответствующей граничным условиям задачи:

$$\begin{aligned} -2\mu k^2 \kappa_l A_1 + 2\mu k^2 \kappa_l A_2 + \mu(k^2 + \kappa_l^2)B_1 + \mu(k^2 + \kappa_l^2)B_2 &= -p(k), \\ \mu k(k^2 + \kappa_l^2)A_1 + \mu k(k^2 + \kappa_l^2)A_2 - 2\mu k \kappa_l B_1 + 2\mu k \kappa_l B_2 &= 0, \\ -k^2 e^{\kappa_l H} A_1 - k^2 e^{-\kappa_l H} A_2 + \kappa_l e^{\kappa_l H} B_1 - \kappa_l e^{-\kappa_l H} B_2 &= 0, \\ k \kappa_l e^{\kappa_l H} A_1 - k \kappa_l e^{-\kappa_l H} A_2 - k e^{\kappa_l H} B_1 - k e^{-\kappa_l H} B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Входящая в правую часть первого уравнения системы (2) функция  $p(k)$  является образом Ханкеля от профиля давления на внешней поверхности слоя  $p(r)$ . Эта величина определяет и функцию  $R(k)$ , которая входит в выражение для жесткости (1). При определении смещения штампа по осредненному по его площади смещению поверхности

слоя под ним [10]  $U = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u_z(r, 0) 2\pi r dr$  функция  $R(k)$  имеет следующий вид:

$$R(k) = \frac{2J_1^2(ka)}{k\pi a^2 \mu}, \quad (3)$$

если давление под штампом распределено равномерно  $p(r) = P/\pi a^2$ ,

$$R(k) = \frac{8J_1(ka)J_2(ka)}{k^2 \pi a^3 \mu}, \quad (4)$$

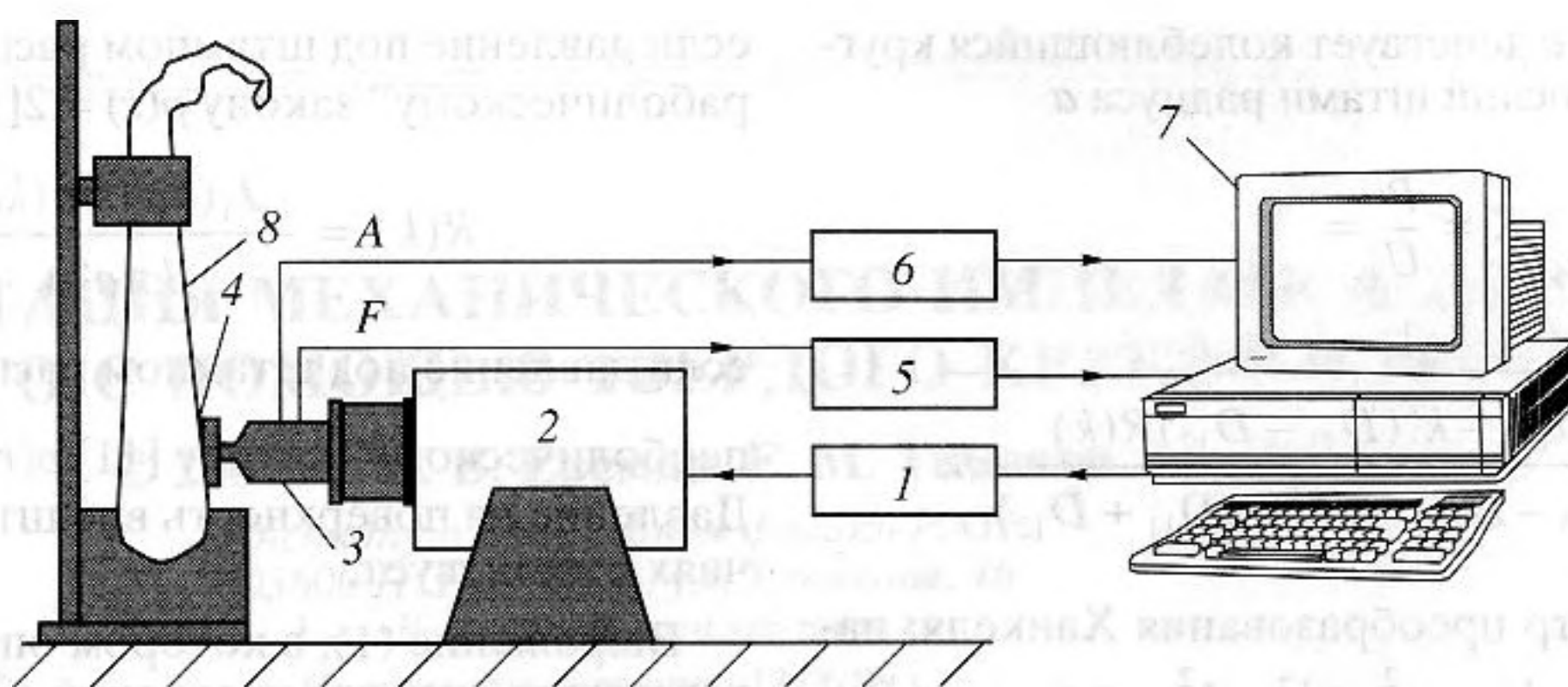
если давление под штампом распределено по “параболическому” закону  $p(r) = 2[1 - (r/a)^2]P/\pi a^2$  и

$$R(k) = \frac{J_1(ka) \sin(ka)}{k\pi a^2 \mu}, \quad (5)$$

если давление под штампом распределено по “гиперболическому” закону [11]  $p(r) = P/2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}$ . Давление на поверхность вне штампа во всех случаях отсутствует.

Выражение (1), в котором определители соответствуют системе уравнений (2) при различных вариантах задания функции  $R(k)$  (3)–(5) будет ниже использовано для численных расчетов и аппроксимации экспериментальных данных с целью выбора наиболее адекватной модели. Модификации моделей, соответствующие разным функциям  $R(k)$ , будут при этом для компактности называться А-моделями, РА-моделями и ГА-моделями, соответственно.

Для экспериментального исследования частотных зависимостей (спектров) импедансных характеристик биологических тканей и их физических моделей (например, слоя желатина) построен специализированный программно-аппаратный комплекс (ПАК) [4], который обеспечивает уже в ходе эксперимента получение спектров импедансных характеристик в цифровом виде, в котором они легко могут быть использованы для дальнейшей обработки, в частности, для идентификации модели конкретного объекта. В качестве основы ПАК использована описанная ранее [7] экспериментальная установка, базирующаяся на виброзадающей и виброизмерительной аппаратуре фирмы Brüel & Kjær. Отличием новой установки (рис. 1) является то, что обработка сигналов здесь проводится не спектроанализатором, а компьютером с помощью специализированной программы, работающей в среде Windows 95/98. Ввод сигналов реализуется с помощью платы СТ4170 фирмы Creative. Программа позволяет регистрировать на экране монитора и сохранять на диске частотные зависимости импедансных характеристик исследуемого объекта в полосе до 512 Гц. Время получения одного спектра 1 с, разрешение по частоте 1.22 Гц. Имеется возможность усреднения задаваемого числа получаемых спектров импедансных характеристик. Перед измерениями в каждом эксперименте проводится компенсация массы, присоединенной к датчику силы, т.е. компенсация его акселерометрической чувствительности. Для этого сигналы с датчиков, соответствующие колебаниям штампа в воздухе, записываются в память компьютера и в ходе измерений на них делаются соответствующие поправки. Кроме этого, перед измерениями проводится калибровка системы путем помещения на рабочий штамп груза известной массы. Соответствующие сигналы так-



**Рис. 1.** Блок-схема программно-аппаратного комплекса для исследования спектров импедансных характеристик биологических мягких тканей.

1 – усилитель мощности (типа 2707); 2 – вибростенд (типа 4801Т); 3 – импедансная головка (типа 8001); 4 – сменный штамп; 5, 6 – усилители сигналов датчиков (типа 2626); 7 – компьютер со звуковой платой СТ4170, 8 – объект исследований.

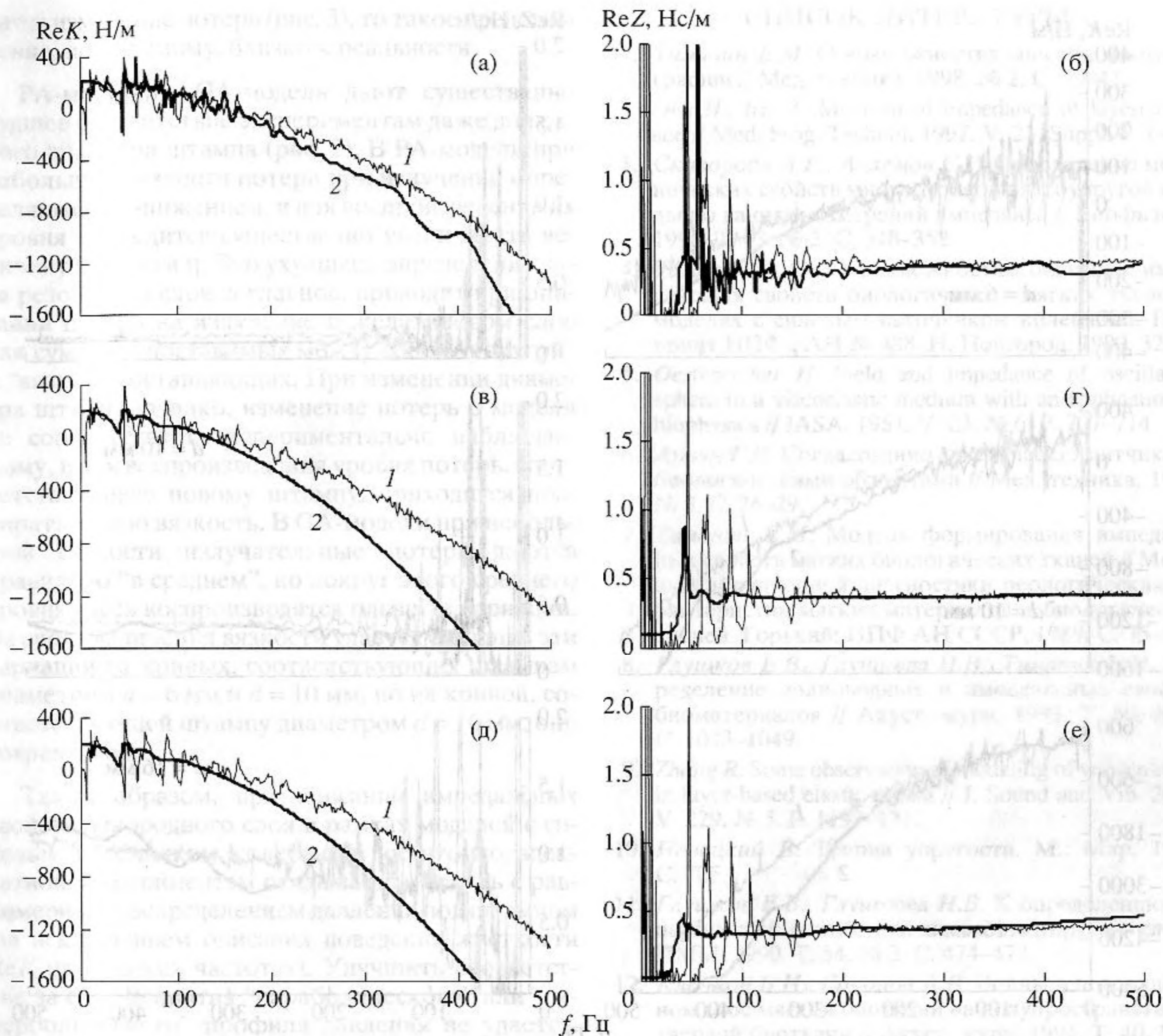
же записываются в память компьютера и используются в ходе работы для нормировки определяемых импедансных характеристик. В режиме измерений в окнах программы выводятся частотные зависимости действительной ( $\text{Re}M$ ) и мнимой ( $\text{Im}M$ ) частей комплексной инерционности в грамах или частотные зависимости действительных частей комплексной жесткости ( $\text{Re}K$ ) в Н/м и комплексного импеданса ( $\text{Re}Z$ ) в Н с/м. Эти величины могут быть сохранены на диске и использованы для дальнейшей обработки. Проверка правильности работы построенной новой установки проведена в нескольких специальных экспериментах [4]. Во-первых, зарегистрированы импедансные характеристики, соответствующие прикрепленному к штампу поверочному грузу известной массы. Во-вторых, проведены одновременные измерения импедансных свойств расслабленного предплечья человека средствами нового ПАК и средствами спектрального анализатора 2034, который подключался параллельно компьютеру.

На описанной выше установке проведена специальная серия измерений на однородном слое желатина толщиной 30 мм. Величины  $\text{Re}K$  и  $\text{Re}Z$  регистрировались с помощью трех штампов с диаметрами 6, 10 и 16 мм. Каждое измерение проводилось при статическом вдавливании штампа в объект на 1 мм. В ходе каждого вдавливания проводилось усреднение по 20 реализациям. Дополнительными измерениями массы образца и его объема установлена плотность желатина  $\rho \approx 1008 \text{ кг/м}^3$ , а измерением времени распространения ультразвукового импульса от поверхности до основания и обратно установлена скорость продольных волн в желатиновом образце  $c_l \approx 1500 \text{ м/с}$ . Зарегистрированные экспериментальные данные считывались в файлы для расчетов импедансных характеристик с помощью программы Маткад. Здесь проводился подбор реологических параметров

моделей для наилучшей аппроксимации экспериментальных данных. Ниже экспериментальные кривые будут приведены вместе с результатами численных расчетов.

Численные расчеты в моделях проводились средствами программы Маткад непосредственно по формуле (1) при задании определителей из системы уравнений (2). Учет вязких свойств материала слоя проводился путем замены его упругих характеристик комплексными операторами, соответствующими типу вязкоупругости, что, как известно, может быть сделано в любой задаче об установившихся колебаниях линейных вязкоупругих тел [14]. В качестве модели вязкоупругого поведения выбрана простейшая модель – тело Фойгта. В соответствии с этой моделью коэффициенты Ламе должны быть заданы в виде:  $\mu = \mu_0 + i\omega\eta$ ,  $\lambda = \lambda_0 + i\omega\xi$ , где  $\mu_0$  и  $\lambda_0$  – статические модули, а  $\eta$  и  $\xi$  – модули сдвиговой и объемной вязкости соответственно. Именно такое выражение для  $\mu$  принималось исходным при численных расчетах  $c_l$  и  $k_r$ , которые в результате оказывались комплексными. При расчетах  $k_r$  исходной принималась сразу чисто действительная величина  $c_l$ , которая бралась из эксперимента  $c_l \approx 1500 \text{ м/с}$ . Анализируя комплексное выражение для  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ , можно выяснить, что при уменьшении частоты ее действительная часть стремится к величине  $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho}$ , а ее мнимая часть стремится к нулю. Условием справедливости предельного перехода будет условие  $\omega \ll \omega_{кр} = (\lambda_0 + 2\mu_0)/(\xi + 2\eta)$ , которое, по-видимому, должно выполняться на частотах ниже 1 кГц, где проводились измерения.

Перед вычислением интеграла (1) проводилось исследование подынтегральных функций и определялась область, в которой они еще остаются существенно отличными от нуля. Верхний предел



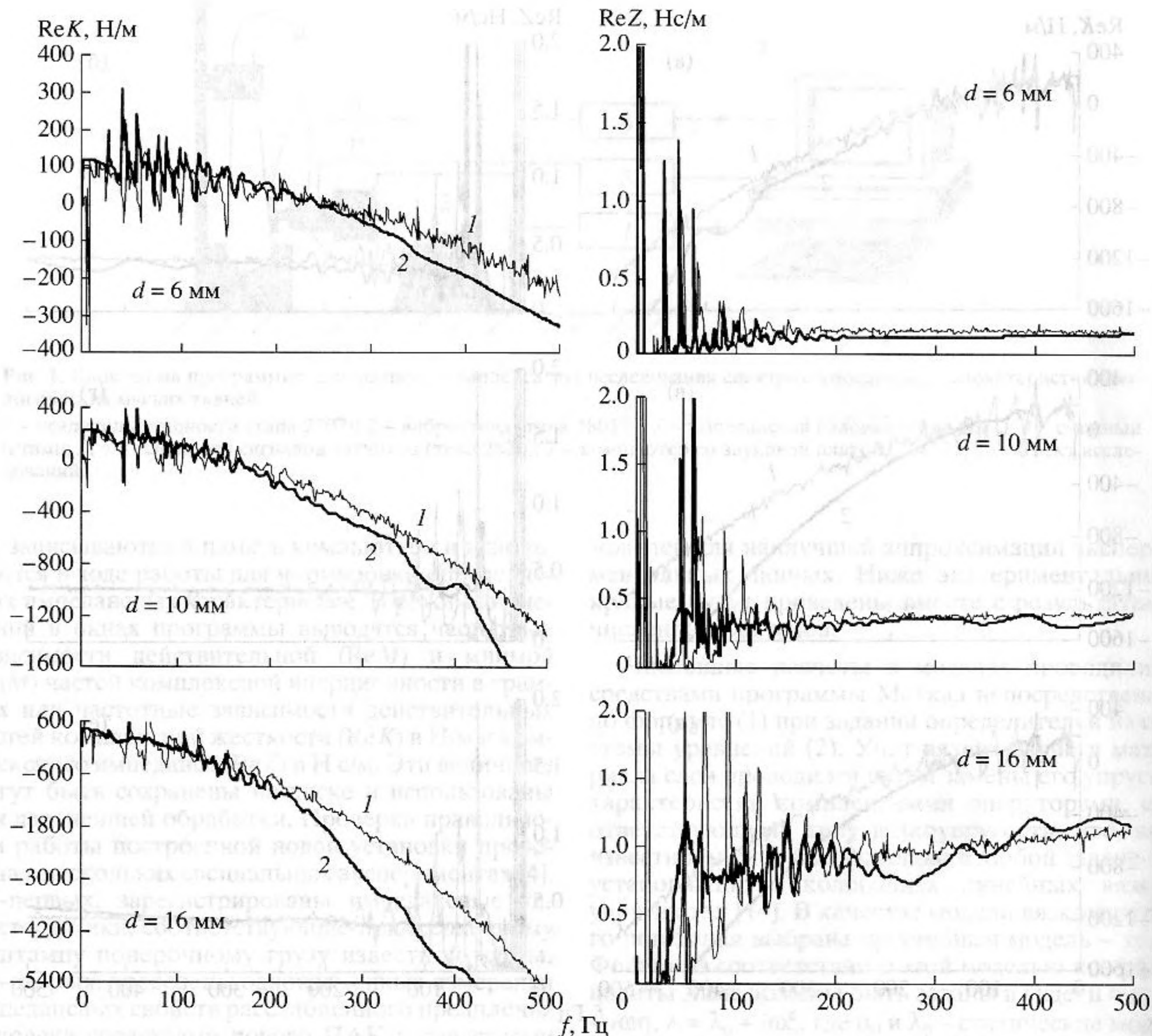
**Рис. 2.** Экспериментальные (1) и рассчитанные (2) импедансные характеристики желатинового слоя. Рисунки (а, б) соответствуют А-модели ( $\mu = 5$  кПа,  $\eta = 0.2$  Па с), (в, г) – РА-модели ( $\mu = 5$  кПа,  $\eta = 3$  Па с), (д, е) – ГА-модели ( $\mu = 4$  кПа,  $\eta = 0.8$  Па с). Параметры моделей:  $d = 10$  мм,  $H = 3$  см,  $\rho = 1008$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_l = 1500$  м/с.

интегрирования выбирался порядка 7500–10500, что лежит вне этой области. Поскольку подинтегральные функции имеют особенность при малых  $k$  (достаточно острый максимум, если вязкость материала мала), то приходится разбивать интервал интегрирования на два участка: 1-й, сравнительно короткий (до  $k = 500$ –2000), содержащий максимум, и 2-й – более длинный, на котором функция медленно затухает. При проведении расчетов проверялась независимость результатов от верхнего предела интегрирования и от способа разбиения интервала интегрирования на участки.

Идентификация параметров моделей, обеспечивающих наилучшую аппроксимацию экспериментальных данных, проводилась путем подбора,

т.е. путем многократного повторения следующих шагов: задание параметров модели; численный расчет импедансных характеристик; визуальное сопоставление результатов расчетов и экспериментальных данных, выводимых на один график на экране монитора. Во всех случаях, в первую очередь, подбором модуля упругости достигалось совпадение расчетов и экспериментальных данных в области низкочастотного плато жесткости  $ReK$ , а затем подбором модуля вязкости достигалось совпадение расчетов и экспериментальных данных по импедансу  $ReZ$  в области средних и высоких частот.

Сопоставление различных моделей по возможностям определения свойств однородного



**Рис. 3.** Экспериментальные (1) и рассчитанные (2) в А-модели частотные зависимости импедансных характеристик желатинового слоя, соответствующие различным диаметрам штампа. Параметры модели:  $H = 3$  см,  $\rho = 1008$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 5$  кПа,  $\eta = 0.2$  Па с,  $c_l = 1500$  м/с.

желатинового слоя дает следующие результаты. Наилучшее соответствие расчетов и экспериментов наблюдается в А-модели (рис. 2). Модель воспроизводит низкочастотное плато кривой  $ReK(f)$ , высокочастотное плато кривой  $ReZ(f)$  и качественную картину слоевых резонансов, причем воспроизведение всех этих характеристик кривых при фиксированных параметрах модели сохраняется для различных диаметров штампа (рис. 3). Высокочастотный спад кривой  $ReK(f)$  в этой модели, как и в других рассмотренных моделях, воспроизводится более крутым по сравнению с экспериментом. По-видимому, это связано с принятым приближением “силового источника колебаний”. Важной особенностью А-модели является то, что соответствие эксперименту по уровню потерь

$ReZ(f)$  в средней и верхней частях использованного диапазона получается автоматически после задания уже очень малых величин вязкости  $\eta$  и подбора модуля упругости слоя  $\mu$  для воспроизведения уровня низкочастотного плато жесткости  $ReK(f)$ . Варьирование вязкости в диапазоне значений 0.1–1.0 Па с практически не влияет на уровень потерь, а определяет только вид резонансов мод вязкоупругого слоя. Для получения качественного соответствия эксперименту по этим резонансам необходимо задать  $\eta \approx 0.2$  Па с. Таким образом, данная модель описывает потери в желатиновом слое при излучении в области частот за резонансами как преимущественно упругие. Поскольку при изменении диаметра штампа моделью воспроизво-

дится изменение потерь (рис. 3), то такое представление, по-видимому, близко к реальности.

РА-модель и ГА-модель дают существенно худшее соответствие экспериментам даже для одного диаметра штампа (рис. 2). В РА-модели при небольшой вязкости потери при излучении определяются с занижением, и для воспроизведения их уровня приходится существенно увеличивать величину вязкости  $\eta$ . Это ухудшает определение вида резонансов слоя, а главное, приводит при описании потерь на излучение в желатиновом слое как суммы сопоставимых между собой "упругой" и "вязкой" составляющих. При изменении диаметра штампа, однако, изменение потерь в модели не соответствует экспериментально наблюдаемому, и для воспроизведения уровня потерь, соответствующего новому штампу, приходится подбирать новую вязкость. В ГА-модели при небольшой вязкости излучательные потери даются правильно "в среднем", но вокруг этого среднего уровня здесь воспроизводятся плавные вариации. За счет увеличения вязкости удается сгладить эти вариации на кривых, соответствующих штампам диаметром  $d = 6$  мм и  $d = 10$  мм, но на кривой, соответствующей штампу диаметром  $d = 16$  мм, они сохраняются.

Таким образом, при описании импедансных свойств однородного слоя в рамках моделей с силовым источником колебаний достаточно адекватной экспериментам оказывается модель с равномерным распределением давления под штампом (за исключением описания поведения жесткости  $ReK$  на высоких частотах). Улучшить соответствие за счет принятия "параболического" или "гиперболического" профиля давления не удастся. На основании этого вывода и при описании свойств биологических тканей можно рекомендовать преимущественное использование моделей с равномерным распределением давления под штампом.

## Interpretation of a Layer Mechanical Impedance Measured Using a Hard Round Die

E. V. Eremin and E. M. Timanin

Theoretical expressions for the impedance characteristics of a layer bound to a rigid base are obtained for various profiles of the normal pressure under a die that vibrates on the layer surface without producing any shear stresses. The frequency dependences of the impedance characteristics of a homogeneous gelatin layer and their variation with changes in the die diameter are measured by means of a specialized software-hardware system. The impedance characteristics are calculated for the models with "uniform", "parabolic", and "hyperbolic" pressure profiles under the die, and the results are compared with the experimental data. The model with a uniformly distributed pressure under the die is found to be the most adequate one.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тиманин Е.М. О возможностях способа миотонографии // Мед. техника. 1998. № 2. С. 39–41.
2. Oka H., Irie T. Mechanical impedance of layered tissue // Med. Prog. Technol. 1997. V. 21. Suppl. P. 1–4.
3. Сковорода А.Р., Аглямов С.Р. Определение механических свойств многослойной вязкоупругой среды по данным измерений импеданса // Биофизика. 1998. Т. 43. № 2. С. 348–352.
4. Тиманин Е.М. О возможностях описания импедансных свойств биологических мягких тканей в моделях с силовым источником колебаний. Препринт ИПФ РАН № 488. Н. Новгород, 1999. 32 с.
5. Oestraeicher H. Field and impedance of oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // JASA. 1951. V. 23. № 6. P. 707–714.
6. Арвин Г.И. Согласование акустических датчиков с биологическими объектами // Мед. техника. 1972. № 3. С. 26–29.
7. Тиманин Е.М. Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей. Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С. 75–91.
8. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Тиманин Е.М. Определение волноводных и импедансных свойств биоматериалов // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 6. С. 1043–1049.
9. Zhang R. Some observation of modeling of wave motion in layer-based elastic media // J. Sound and Vib. 2000. V. 229. № 5. P. 1193–1212.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. С. 705.
11. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // ПММ. 1990. Т. 54. № 3. С. 474–479.
12. Клочкин Б.Н., Соколов А.В. Волны в поверхностном слое мягкой биоткани на полупространстве из твердой биоткани // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 270–274.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 124.
14. Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П. Механика полимеров. М.: МГУ, 1975. С. 158.