АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2002, том 48, № 3, с. 371–374

УДК 532.517.4/6

ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

© 2002 г. Е. Б. Кудашев, Л. Р. Яблоник*

Институт космических исследований РАН
117810 Москва, ул. Профсоюзная 84/32
E-mail: eco@iki.rssi.ru

**НПО Центральный Котлотурбинный институт им. И.И. Ползунова*
193167 Санкт-Петербург, ул. Атаманская 3/6
E-mail: lry@ckti.nw.ru

Поступила в редакцию 06.06.2001 г.

Обсуждается применение простых моделей характеристического функционала к анализу вероятностных характеристик турбулентных пульсаций давлений. Отмечено, что гауссова модель пространственного характеристического функционала пристеночных пульсаций давления предпочтительнее для струйного обтекания, тогда как пуассонова модель лучше описывает характерные особенности (всплески) пульсаций давления в турбулентном пограничном слое. Высказано предположение, что представление экспериментальных значений характеристического функционала в виде суперпозиции простых моделей может свести задачу экспериментального определения характеристического функционала и многомерных функций распределения к измерению ограниченного числа параметров и зависимостей, присущих изучаемому типу турбулентного обтекания.

ВВЕДЕНИЕ

Современные представления о процессах генерации турбулентных пульсаций в пристенной зоне течения и роли организованных структур в пограничном слое [1, 2] сложились в результате взаимного влияния друг на друга корреляционно-спектральных методов измерений и физических моделей турбулентных полей. Корреляционная модель Коркоса [3] пристеночных турбулентных давлений представляет собой один из известных примеров такого плодотворного взаимодействия.

Наиболее полными являются континуальные статистические модели пространственной структуры полей пристенных флуктуаций давления $p(\mathbf{x})$, задаваемые характеристическим функционалом [4, 5]

$$\Phi[\upsilon(\mathbf{x})] = \langle \exp\{i\int\upsilon(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\}\rangle$$

и обеспечивающие полное статистическое описание случайного поля пульсаций давления $p(\mathbf{x})$. Функциональные методы все чаще применяются в гидродинамической акустике и статистической гидроакустике, и в задачах анализа вероятностной структуры случайных процессов и полей [6, 7].

В данной работе анализируются простые формы аналитического представления характеристического функционала поля пристенных турбулентных пульсаций давления.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДАВЛЕНИЙ

Разработанный авторами данной работы функциональный подход [8–12] к измерению турбулентных давлений позволяет получить практически исчерпывающее описание случайного поля $p(\mathbf{x})$ на основе экспериментального изучения характеристического функционала полей пристеночных турбулентных давлений.

При экспериментальной оценке характеристический функционал поля $\Phi[\upsilon(\mathbf{x})]$ определен на семействе функциональных аргументов $\upsilon(x) = \lambda K(\mathbf{x})$, где λ – чувствительность приемника турбулентных пульсаций, а $K(\mathbf{x})$ – его импульсная характеристика [8]. Ввиду осредняющего действия приемной поверхности, характеристическая функция сигнала преобразователя турбулентных давлений

$$\varphi_s(\lambda) = \langle \exp(i\lambda s)\rangle$$

фактически дает оценку значений характеристического функционала поля:

$$\varphi_s(\lambda) = \langle \exp(i\int\lambda K(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x})\rangle = \Phi[\lambda K(\mathbf{x})]. \quad (1)$$

Для датчиков турбулентных пульсаций с достаточно малыми приемными поверхностями, когда импульсная характеристика сводится к дельта-функции,

$$\lambda K(\mathbf{x}) \longrightarrow \lambda\gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

характеристический функционал $\Phi[\lambda K(\mathbf{x})]$ выражается через характеристическую функцию

$$\varphi_s(\lambda) = \langle \exp\{i\lambda\gamma_0 p(\mathbf{x}_0)\}\rangle = \varphi_p(\lambda\gamma_0),$$

отвечающую одноточечному распределению вероятностей пульсационных давлений

Если приемник представляет собой совокупность n точечных преобразователей с регулируемой чувствительностью λ, то импульсную характеристику можно записать в виде

$$\lambda K(\mathbf{x}) \longrightarrow \sum \lambda_i\gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \equiv \sum \gamma_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i),$$

при этом характеристический функционал обращается в характеристическую функцию n-мерного распределения вероятностей

$$\varphi_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{x_1\ldots x_n}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Метод измерения многомерных функций распределения на основе конечномерных представлений характеристических функционалов был предложен авторами данной работы в публикациях [8–10]. В этих работах было показано, что измерение характеристических функций турбулентных давлений позволяет выявить отклонение функции плотности распределения вероятностей от гауссовой. Ранее отличие распределения турбулентных пульсаций давления от нормального закона было отмечено в работах [14, 15], выполненных при помощи традиционных методик измерения коэффициентов асимметрии и эксцесса и функций распределения вероятностей.

В рамках функционального подхода особенно важен выбор функциональных моделей полей турбулентных давлений и оценка параметров этих моделей.

2. ГАУССОВА МОДЕЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Турбулентные течения, различающиеся статистической природой генерации турбулентных пульсаций, описываются различными функциональными моделями. При струйном обтекании, когда пульсации давления порождаются внешней турбулентностью и расстояние между источниками и точкой наблюдения не слишком мало, пристенные турбулентные пульсации можно представить как сумму большого количества статистически независимых компонент, связанных с различными зонами турбулентного потока.

Такого рода случайные величины, как правило, имеют асимптотически нормальное распределение, что приводит к модели гауссова поля, характеристический функционал которого имеет вид

$$\Phi_G[\upsilon] = \\ = \exp\{-1/2\iint\upsilon(\mathbf{x}_1)\upsilon(\mathbf{x}_2)R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)d\mathbf{x}, d\mathbf{x}_2\}. \quad (2)$$

Здесь через $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ обозначена корреляционная функция поля $R = \langle p(\mathbf{x}_1)p(\mathbf{x}_2)\rangle$. В однородном поле корреляционная функция зависит лишь от взаимного расположения коррелируемых точек, т.е. от разности координат $\varepsilon = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

В случае гауссовой модели задача экспериментального исследования характеристического функционала поля турбулентных давлений сводится к измерению ограниченного числа параметров и зависимостей, а именно, к определению пространственной корреляционной функции пульсаций давления.

Для характеристической функции (2) в случае гауссовой модели получаем с учетом (1) следующее представление:

$$\varphi_G = \Phi_G[\lambda K(\mathbf{x})] = \exp[-\lambda^2/2\int\theta(\varepsilon)R(\varepsilon)d\varepsilon],$$

где $\theta(\varepsilon) = \int K(\mathbf{x})K(\mathbf{x}+\varepsilon)d\mathbf{x}$ – функция влияния приемника.

Характеристическая функция сигнала приемника в волновом представлении имеет вид

$$\varphi_{sG} = \exp[-\lambda^2/2\int S(\mathbf{k})E(\mathbf{k})d\mathbf{k}],$$

где $S(\mathbf{k}) = \int\theta(\varepsilon)\exp(-i\mathbf{k}\varepsilon)d\varepsilon$ – волновая характеристика приемника, $E(\mathbf{k})$ – частотно-волновой спектр поля турбулентных пульсаций давления [13, 14].

Измерения, выполненные как в нашей стране [15], так и за рубежом [16, 17], свидетельствуют о том, что реальные распределения вероятности турбулентных пульсаций давления отличаются от гауссовых. В многочисленных экспериментах наблюдается отличный от нуля коэффициент асимметрии, тогда как коэффициент эксцесса возрастает и устойчиво превышает значение 3, соответствующее нормальному распределению.

3. ПУАССОНОВА МОДЕЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

В этих условиях целесообразно усложнить функциональную модель поля турбулентных давлений за счет пуассонового распределения. Пуассонова модель близка природе пульсаций давления в турбулентном пограничном слое и может оказаться полезной для описания пристеночных давлений. Известно, что в отличие от струйных течений, пристеночные пульсации турбулентного давления определяются спонтанными всплесками, сопровождающимися выбросами жидкости от стенки во внешнюю область течения [2]. Полагая всплески статистически независимыми с равномерным вероятностным распределением по поверхности, можно упрощенно описать поле пристенных пульсаций давления пуассоновской статистикой.

Соответствующую пространственную структуру турбулентных давлений удобно характеризовать пуассоновским характеристическим функционалом

$$\Phi_P[\upsilon(\mathbf{x})] = \exp\{\nu\int[\chi(\int g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\upsilon(\mathbf{x})d\mathbf{x})-1]d\mathbf{y}\}.$$

Здесь ν – среднее количество всплесков на единицу площади $\chi(\mu)$ – характеристическая функция распределения вероятностей пульсаций давления P в ядре всплеска, давление P – характеристика единичного всплеска, значение его собственной пульсации, $g(\mathbf{r})$ – нормированная ($g(0) = 1$) функция влияния всплеска, определяющая пространственные корреляционные связи:

$$R_{pp}(\mathbf{r}) = \nu\langle P^2\rangle\int g(\boldsymbol{\rho})g(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{r})d\boldsymbol{\rho}.$$

В этом случае значение турбулентной пульсации давления p на стенке, обусловленное многими всплесками, определяется суммированием по всплескам с текущим индексом k, расположенным на стенке в точках с векторными координатами $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}$ – текущая векторная координата на стенке:

$$p(\mathbf{x}) = \sum P(\mathbf{x}_k)g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k).$$

Характеристическая функция сигнала однородного приемника площадью S (в этом случае на апертуре $K(\mathbf{x}) = K_0 = \text{const}$) в пуассоновом поле представляется в виде

$$\varphi_P(\lambda) = \exp\{\nu\int[\chi(\lambda K_0\int g(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{x})-1]d\mathbf{y}\}. \quad (3)$$

Для малых размеров апертуры S, когда приемник может считаться точечным, согласно последнего выражению,

$$\varphi_P(\lambda) = \exp\{\nu\int[\chi(\lambda\gamma_0 g(\mathbf{y}))-1]d\mathbf{y}\}. \quad (4)$$

Если же, напротив, размер приемной поверхности S значительно превышает площадь $\sigma = \int g(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}$ зоны влияния спонтанного всплеска, то, согласно (3),

$$\varphi_P(\lambda) = \exp\{\nu S[\chi(\lambda\gamma_0\sigma/S)]-1\}.$$

В последнем случае кумулянты T_n случайного сигнала на выходе приемника могут быть представлены в виде

$$T_n = (-i)^n(d_n\ln\varphi_p/d\lambda^n)_{\lambda=0} = (-i)^n\nu S(\sigma/S)^n\times \\ \times\gamma_0^n\chi^{(n)}(0) = (-i)^n(\nu\sigma)(\sigma/S)^{n-1}\gamma_0^n\langle P^n\rangle. \quad (5)$$

Из (5) следует, что при большом размере приемной поверхности, $S/\sigma \gg 1$, все кумулянты с $n > 2$ малы по сравнению со вторым кумулянтом T_2. В этом случае распределение вероятности приближается к гауссовому:

$$\varphi_P(\lambda) \approx \exp[-1/2\lambda^2\gamma_0^2\langle P^2\rangle\nu\sigma^2/S]. \quad (6)$$

Сравнение выражений (4) и (6) показывает, какое существенное влияние оказывает размер приемника на статистические характеристики сигнала при измерениях пульсаций давления в турбулентном пограничном слое: при $S \gg \sigma$ статистика становится гауссовой независимо от характера флуктуаций на малых масштабах. Ранее на это уже обращалось внимание в работе [14] и в нашей публикации [10].

4. СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

Различие стохастических режимов турбулентных пристеночных давлений, наблюдаемое в экспериментах, заставляет задуматься о представлении поля пульсаций давления в виде суперпозиции полей, описываемых различными функциональными моделями, в том числе простыми моделями, приведенными выше.

Речь может идти, в частности, о представлении пульсаций давления на стенке $p(x, y, z)|_{z=0}$ в виде суммы

$$p(x, y, z)|_{z=0} = p_G(x, y, z)|_{z=0} + p_p(x, y, z)|_{z=0},$$

где первая компонента $p_G(x, y, z)|_{z=0}$ подчиняется гауссовой статистике, а вторая – $p_p(x, y, z)|_{z=0}$ – пуассоновой.

На основе применения простых функциональных моделей задачу экспериментального определения характеристического функционала и многомерных распределений поля турбулентных давлений можно свести тогда к измерению ограниченного числа параметров, присущих изучаемому типу турбулентного обтекания: функции пространственной корреляции $R_G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ турбулентных пульсаций давления для гауссового поля и зависимостей ν_P, $\chi(\mu)$; $g_P(\boldsymbol{\rho})$ – для пуассоновой компоненты поля турбулентных давлений.

Разумеется, дальнейшее развитие функционального подхода в гидродинамической акустике, основанного на разработанном авторами методе экспериментального определения характеристического функционала и анализе функциональных моделей пристеночных турбулентных давлений, предполагает сопоставление этих результатов с массивами экспериментальных данных, отвечающих различным типам турбулентного обтекания.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 01-07-90008) и РЦП "Интеграция" (проект № А-0030).

Авторы признательны профессору Ю.А. Кравцову за полезные замечания и содержательное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bull M.K.* Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers: some reflections of forty years of research // J. Sound Vibration. 1996. V. 190(3). P. 299–315.
2. *Cantwell B.J.* Organized motion in turbulent flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1981. V. 13. P. 457–515.
3. *Corcos G.M.* The Structure of the Turbulent Pressure Field in Boundary – Layer Flows // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. P. 353–378.
4. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. С. 463.
5. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
6. *Клячкин В.И.* Функциональные модели в статистической гидроакустике / Труды 5 Всес. Школы-семинара по статистич. гидроакустике. Новосибирск, 1974. С. 5–25.
7. *Клячкин В.И.* О вероятностной структуре поля давления звука, порожденного турбулентностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 131–145.
8. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Экспериментальный метод оценки характеристического функционала и многомерных характеристических функций турбулентных пульсаций давления // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 524–528.
9. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Моделирование и экспериментальное исследование пространственного характеристического функционала поля турбулентных давлений на поверхности обтекания / Архитектурная акустика. Шумы и вибрации. Сборник трудов X Сессии Российского Акустического общества. М.: НИИСФ РААСН. 2000. Т. 3. С. 113–116.
10. *Kudashev E.B., Yablonik L.R.* Bursting coherent structures detection in turbulent boundary layer by the characteristic functional method / International Conference Fluxes and Structures in Fluids. Abstracts. June 10–12, 1999. St. Petersburg, Russia. P. 71.
11. *Kudashev E.B., Yablonik L.R.* Flow noise and functional models of wall-turbulent pressure / 17 International Congress on Acoustics. Rome. September 2–7, 2001.
12. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Функциональные модели поля пристеночных турбулентных давлений / Сборник трудов XI сессии Российского акустического общества. Т. 1. М., 2001. С. 262–266.
13. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Определение частотно-волнового спектра турбулентных пульсаций давления // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 615–620.
14. *Кудашев Е.Б.* Систематические погрешности пространственного спектрального анализа / Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. XI Всесоюзный Симпозиум. Сухуми. 1980. Тезисы докладов. Секция 1. Л., 1980. С. 58–63.
15. *Грешилов Е.М., Липатов Б.В., Лямшев Л.М., Ткаченко В.Г.* Структура пульсаций давления в потоках растворов полимеров, проявляющих эффект Томса / Второй Всесоюзный Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. Суздаль, 1979. Труды симпозиума. М.: Наука, 1982. С. 127–130.
16. *Scheve G.* On the structure and resolution of wall-pressure fluctuations associated with turbulent boundary-layer flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 311–328.
17. *Gravante S.P., Naguib A.M., Wark C.E., Nagib H.M.* Characterization of the pressure fluctuations under a fully developed turbulent boundary layer // AIAA Journ. 1998. V. 36. № 10. P. 1808–1816.

Simple Models of the Characteristic Functional in Hydrodynamic Acoustics

E. B. Kudashev* and L. R. Yablonik**

** Institute of Space Research, Russian Academy of Sciences, ul. Profsoyuznaya 84/32, Moscow, 117810 Russia*

e-mail: eco@iki.rssi.ru

*** NPO Polzunov Central Boiler and Turbine Institute, ul. Atamanskaya 3/6, St. Petersburg, 193167 Russia*

e-mail: lry@ckti.nw.ru

Abstract—Simple models of the characteristic functional are considered in the context of analyzing the probabilistic characteristics of turbulent pressure fluctuations. The Gaussian model of the spatial characteristic functional of wall-pressure fluctuations is shown to be more appropriate for jet flows, while the Poisson model better describes the characteristic features (splashes) of pressure fluctuations in a turbulent boundary layer. The suggestion is made that the representation of the characteristic functional as a superposition of simple models can reduce the experimental determination of the characteristic functional and the multidimensional distribution functions to measuring only a limited number of parameters and dependences characterizing the turbulent flow under study.