

ВОЛНЫ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ У СЛАБОКОНТРАСТНЫХ ГРАНИЦ

© 2004 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет
198504 Санкт-Петербург, Петропавловская, ул. Ульяновская 1
E-mail: iva@aa2628.spb.edu

Поступила в редакцию 15.05.2003 г.

Исследуется возбуждение и распространение акустических волн вдоль криволинейных границ двух сред. Строятся формальные высокочастотные асимптотики, которые могут быть использованы для приближенных расчетов в случае сред с мало отличающимися скоростями. Проведено численное исследование дисперсионных уравнений и коэффициентов возбуждения волн на мало контрастной границе сред.

ВВЕДЕНИЕ

Высокочастотные асимптотические разложения позволяют эффективно вычислять акустические поля. При этом обычно ограничиваются старшим членом асимптотического разложения (см. например [1]). Однако для конкретных значений параметров точность таких приближенных формул может оказаться недостаточной. В частности, при исследовании волн, сосредоточенных у криволинейной границы раздела двух сред, в асимптотическую формулу наряду с частотой входит параметр, пропорциональный разности скоростей звука. Для сред с мало отличающимися скоростями звука стандартные асимптотические формулы могут оказаться непригодными для нахождения акустических полей. Возникает необходимость вывода новых приближенных формул, которые имели бы более широкий диапазон применимости. Такие приближенные формулы могут быть построены как асимптотические разложения по двум (или более) параметрам.

Для рассматриваемых в данной работе волн, сосредоточенных у криволинейной границы двух сред, таким дополнительным параметром является разность медленностей волн в контактирующих средах. В зависимости от соотношения параметров выделяются случаи существенного контраста и малого контраста. В первом случае выявляются два типа волн. Волны первого типа напоминают волны соскальзывания, бегущие с выпуклой стороны границы раздела, волны второго типа имеют характер волн шепчущей галереи, бегущих с вогнутой стороны. Для описания волн обоих типов можно пользоваться стандартными асимптотическими разложениями. В случае малого контраста волны оказываются смешанного типа. Они подчиняются более сложному дисперсионному уравнению. Для их описания выводятся новые приближенные формулы. Выясняется,

что эти формулы имеют равномерный характер по параметру, характеризующему “контраст” сред.

Первая часть работы повторяет результаты, полученные ранее [2]. Во второй части рассматривается возбуждение волн, бегущих вдоль границы раздела двух сред, падающих на границу лучевым полем. Сначала в случае значительного контраста вычисляются коэффициенты возбуждения волн первого типа. Затем исследуется возбуждение волн на мало контрастной границе сред и при асимптотическом переходе к значительному контрасту находятся коэффициенты возбуждения волн второго типа. Если скорость в среде с вогнутой стороны границы больше, чем в среде с выпуклой стороны, происходит сшивание приближенных формул с полученным ранее [3] асимптотическим разложением поля головной волны рефракционного типа. В случае обратного соотношения скоростей в средах выявляется эффект экспоненциально слабого тунелирования падающей волны в волны типа шепчущей галереи. В конце статьи приводятся результаты численного анализа дисперсионного уравнения для волн смешанного типа и вычисляются коэффициенты возбуждения таких волн.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть гладкая поверхность S разделяет две акустические среды Ω_1 и Ω_2 . Пусть Ω_2 – выпуклая. Скорости в областях постоянны. Без ограничения общности можно считать, что скорость в первой среде равна единице. Введем кусочно-постоянную медленность

$$N(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_1, \\ N, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Стационарное волновое поле (множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен) удовлетворяет уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{r}) + \omega^2 u(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_1, \\ \Delta u(\mathbf{r}) + \omega^2 N^2 u(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_2.\end{aligned}$$

На границе S выполнены условия непрерывности давления и нормальных смещений

$$\lim_{n \rightarrow +0} u = \lim_{n \rightarrow -0} u, \quad \lim_{n \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial n} = \kappa \lim_{n \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (2.1)$$

Здесь n – нормаль к границе, κ – отношение плотностей акустических сред.

Будем искать волны, сосредоточенные вблизи S и удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности.

Можно ожидать существования двух типов волн, распространяющихся вдоль границы. Волны первого типа бегут вдоль границы с волновым числом ω и в области Ω_1 аналогичны волнам соскальзывания. Будем искать их в виде формального асимптотического разложения

$$u = \exp(i\omega s + i\omega^{1/3} \varphi(s, \alpha)) \sum_{j=0}^{\infty} U_j(s, v_1, \alpha) \omega^{-j/3}. \quad (2.2)$$

Здесь введены геодезические координаты (s, α, n) , так что s – длина дуги геодезической на границе S , и произведено растяжение нормали

$$v_1 = \begin{cases} \omega^{2/3} n, & n > 0, \\ \omega^q n, & n < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Показатель q определяет растяжение нормали в области Ω_2 и, как будет показано ниже, его величина зависит от асимптотического порядка разности $N - 1$.

Волны второго типа сосредоточены в основном в Ω_2 и распространяются с волновым числом ωN . Такие волны будем искать в виде формального разложения

$$\begin{aligned}u &= \exp(i(\omega N)s + i(\omega N)^{1/3} \varphi(s, \alpha)) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} U_j(s, v_2, \alpha) (\omega N)^{-j/3},\end{aligned} \quad (2.4)$$

где растяжение нормали произведено следующим образом

$$v_2 = \begin{cases} (\omega N)^q n, & n > 0, \\ (\omega N)^{2/3} n, & n < 0. \end{cases}$$

Процедура определения функций φ и U_j состоит в подстановке разложений в уравнения Гельмгольца и в краевые условия (2.1) и в прирав-

нении членов одного порядка по большому параметру. Ограничимся лишь старшим членом асимптотических разложений (2.2) и (2.4).

СЛУЧАЙ ЗНАЧИТЕЛЬНОГО КОНТРАСТА

Для построения асимптотик (2.2) и (2.4) важно знать асимптотический порядок величины $N - 1$. Предположим сначала, что $N - 1 = O(1)$.

Рассмотрим волны первого типа. Подставляя разложение (2.2) в уравнение Гельмгольца в Ω_1 и приравнявая члены при одинаковых степенях ω , получим стандартную для волн соскальзывания [4] рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 U_0 &= 0, \quad \mathcal{L}_0 U_1 + \mathcal{L}_1 U_0 = 0, \quad \dots \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} + 2\left(\frac{v_1}{\rho} - \varphi'\right), \quad \mathcal{L}_1 = 2i\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{h'}{h}.\end{aligned} \quad (3.1)$$

Радиус кривизны геодезической ρ и расхожимость h зависят от поверхностных координат s и α ; штрих обозначает производную по s .

Производя аналогичные преобразования в области Ω_2 , получим в старшем порядке (при ω^2) уравнение

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial n^2} + \omega^2(N^2 - 1)U_0 = 0,$$

откуда следует, что показатель q в (2.3) должен быть выбран равным единице. Тогда имеем следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 U_0 &= 0, \quad \mathcal{M}_0 U_1 = 0, \quad \mathcal{M}_0 U_2 - 2\varphi' U_0 = 0, \quad \dots, \\ \mathcal{M}_0 &= (N^2 - 1) + \frac{\partial^2}{\partial v_1^2}.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Краевые условия при $n = 0$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}U_j(s, +0, \alpha) &= U_j(s, -0, \alpha), \\ \frac{\partial U_{j-1}(s, +0, \alpha)}{\partial v_1} &= \kappa \frac{\partial U_j(s, -0, \alpha)}{\partial v_1}.\end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $j = 0, 1, \dots$ и положено $U_{-1} \equiv 0$.

Уравнения (3.1), (3.2), условия (3.3) и условия излучения при $v_1 \rightarrow \pm\infty$ определяют рекуррентную систему задач Штурма–Лиувилля. Решение первого уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям излучения, имеет вид

$$\begin{aligned}U_0 &= A_0(s, \alpha) w_1(\xi - v), \\ v &= (2/\rho)^{1/3} v_1, \quad \xi = 2^{1/3} \rho^{2/3} \varphi'.\end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $w_1()$ – функция Эйри, а $\xi(s, \alpha)$ и $A_0(s, \alpha)$ – пока произвольные функции. Решениями U_0 и U_1 уравнений (3.2) являются экспоненты

$$U_j = B_j \exp(-iDv_1), \quad D = \sqrt{N^2 - 1}, \quad j = 0, 1 \quad (3.5)$$

Знак “-” выбран в (3.5) в соответствии с условиями излучения в Ω_2 при $v_1 \rightarrow -\infty$. В случае $N < 1$ ветвь корня фиксируется так, что $D = i\sqrt{1 - N^2}$.

Подставляя (3.4) и (3.5) в граничные условия (3.3), получим $B_0 = 0$.

$$w_1(\xi) = 0. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы определить зависимость амплитуды A_0 от s , рассмотрим уравнения в следующем порядке. С помощью (3.5) исключим из рассмотрения внутренность Ω_2 . При $v_1 > 0$ функция U_1 должна удовлетворять неоднородному уравнению Эйри

$$\mathcal{L}_0 U_1 = -\mathcal{L}_1 U_0,$$

краевому условию (здесь и далее точка обозначает производную функции)

$$\lim_{v_1 \rightarrow +0} U_1 = -i \left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/3} \frac{1}{D\kappa} A_0 \dot{w}_1(\xi)$$

и условию излучения при $v_1 \rightarrow +\infty$. Для разрешимости этой задачи Штурма–Лиувилля правая часть должна удовлетворять некоторому условию совместности. Избавляясь от неоднородности в краевом условии и применяя результаты [4], условие разрешимости может быть записано в виде

$$A_0' + \left(\frac{1}{6\rho} + \frac{1}{2h} - \frac{1}{\rho D\kappa}\right) A_0 = 0.$$

Окончательно поле волны первого типа дается в Ω_1 приближенной формулой

$$u = A_0(0) \exp \left\{ i\omega s + i \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/3} \int_0^s \frac{\xi ds}{\rho^{2/3}} + \frac{1}{D\kappa} \int_0^s \frac{ds}{\rho} \right\} \times R^{1/6} H^{1/2} w_1(\xi - v), \quad (3.7)$$

$$R = \rho(0, \alpha) / \rho(s, \alpha), \quad H = h(0, \alpha) / h(s, \alpha).$$

Рассмотрение волн второго типа может быть произведено аналогичным образом. Приведем лишь окончательную формулу для поля в Ω_1 :

$$u = A_0(0) \sqrt{RH} \exp \left\{ i(\omega N)s - \omega Dn + i \left(\frac{\omega N}{2}\right)^{1/3} \int_0^s \frac{\eta ds}{\rho^{2/3}} + i \frac{\kappa N}{D} \int_0^s \frac{ds}{\rho} \right\}. \quad (3.8)$$

Параметр η определяется из дисперсионного уравнения

$$v(\eta) = 0 \quad (3.9)$$

(здесь v – функция Эйри, экспоненциально убывающая на $+\infty$) и является вещественным. При $N > 1$ волны (3.8) распространяются вдоль границы без затухания. При $N < 1$ зависимость от n становится осциллирующей, что отвечает уходящим от границы волнам. При этом появляется затухание, характеризуемое множителем

$$\exp \left(-\frac{\kappa N}{\sqrt{1 - N^2}} \int_0^s \frac{ds}{\rho} \right). \quad (3.10)$$

СЛУЧАЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ МАЛОГО КОНТРАСТА

Формулы (3.7) и (3.8) справедливы для $D = O(1)$. Они остаются справедливыми также для меньших значений D , если $D > O(\omega^{-1/3})$. Для $D = O(\omega^{-1/3})$ асимптотический характер разложений (3.7) и (3.8) теряется, поскольку последние два слагаемых в показателях экспоненты становятся одного порядка. Такого же порядка оказываются и все дальнейшие, не приведенные в формулах, члены.

Для того, чтобы получить асимптотику волн, сосредоточенных около криволинейной границы сред с мало отличающимися параметрами, введем коэффициент δ , так что $D^2 = \omega^{-2/3} \delta$, и будем считать $\delta = O(1)$. Тогда растяжение нормали в Ω_1 и в Ω_2 должно быть произведено с одинаковыми показателями $q = 2/3$, и формулы (2.2) и (2.4) становятся похожими.

Рассмотрим формальное разложение (2.2). В Ω_1 рекуррентная система уравнений остается такой же как в случае $D = O(1)$ для волн первого типа. Приравнявая члены при одинаковых степенях ω в уравнении Гельмгольца в Ω_2 , несложно получить рекуррентную систему

$$(\mathcal{L}_0 + \delta)U_0 = 0, \quad (\mathcal{L}_0 + \delta)U_1 + \mathcal{L}_1 U_0 = 0, \quad \dots$$

В старшем порядке решение дается функцией Эйри, удовлетворяющей условиям излучения при $v_1 \rightarrow -\infty$,

$$U_0 = B_0 v(\xi - d - v), \quad d = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \delta. \quad (4.1)$$

Используя граничные условия для поля u , находим

$$B_0 = A_0 \frac{w_1(\xi)}{v(\xi - d)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{w_1(\xi)}{\dot{w}_1(\xi)} = \frac{1}{\kappa} \frac{v(\xi - d)}{\dot{v}(\xi - d)}.$$

Чтобы найти зависимость амплитуды A_0 от длины дуги s , так же как и в случае $D = O(1)$, надо рассмотреть уравнения в следующем порядке и выписать условия их разрешимости. Подставляя

(3.4) и (4.1) в уравнение для U_1 , домножая на решение

$$W(v) = \begin{cases} w_1(\xi - v), & v > 0, \\ \kappa \frac{w_1(\xi)}{v(\xi - d)} v(\xi - d - v), & v < 0 \end{cases}$$

сопряженной задачи и интегрируя, найдем условие разрешимости в виде дифференциального уравнения для A_0 [2]

$$A_0' + \left(\frac{1}{6} \frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{1}{2} \frac{Q'}{Q} \right) A_0 = 0.$$

Здесь введена функция

$$Q = ((1 - \kappa)\xi + \kappa d) w_1^2(\xi) + \frac{1 - \kappa}{\kappa} \dot{w}_1^2(\xi).$$

Окончательно асимптотика волн, сосредоточенных вблизи границы, имеет в старшем порядке следующий вид ($n > 0$)

$$u = A_0(0) \exp \left\{ i\omega s + i \left(\frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{\xi}{\rho^{2/3}} ds \right\} \times \\ \times R^{1/6} \sqrt{\frac{H Q(0, \alpha)}{Q(s, \alpha)}} w_1(\xi - v). \quad (4.3)$$

Параметр ξ в асимптотике (4.3) определяется из дисперсионного уравнения (4.2) и является функцией точки на границе S .

Аналогичным образом можно построить формальное асимптотическое разложение по параметру $\tilde{\omega} = \omega N$. В старшем порядке для $n > 0$ получим

$$u = C_0(0) \exp \left\{ i\tilde{\omega} s + i \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{\eta}{\rho^{2/3}} ds \right\} \times \\ \times R^{1/6} \sqrt{\frac{H P(0, \alpha)}{P(s, \alpha)}} w_1(\eta + \tilde{d} - v), \quad (4.4)$$

$$P(s, \alpha) = (\eta(1 - \kappa) + \tilde{d}) w_1^2(\eta + \tilde{d}) + \\ + (\kappa^{-1} - 1) \dot{w}_1^2(\eta + \tilde{d}), \quad \tilde{d} = N^{-4/3} d.$$

Параметр η определяется из дисперсионного уравнения

$$\frac{w_1(\eta + \tilde{d})}{\dot{w}_1(\eta + \tilde{d})} = \frac{1}{\kappa} \frac{v(\eta)}{\dot{v}(\eta)}. \quad (4.5)$$

Отметим, что разложение (4.3) переходит в (4.4) при замене ω на $\tilde{\omega}$, ξ на $\eta + \tilde{d}$ и d на \tilde{d} . В случае асимптотически малого контраста такие замены приводят к различию формул в членах порядка $O(\omega^{-1/3})$.

Можно проверить, что формулы (4.2) и (4.3) дают равномерную по d асимптотику волн первого типа, а формулы (4.5) и (4.4) равномерны для волн второго типа. Действительно, пусть $D = O(1)$. Тогда параметр d становится большим, и функции Эйри в дисперсионном уравнении (4.2) могут быть заменены асимптотиками. Полагая $\xi = O(1)$ и заменяя в (4.2) функцию Эйри $v(\xi - d)$ ее асимптотикой, приходим к уравнению

$$\kappa \sqrt{d} w_1(\xi) + i \dot{w}_1(\xi) \approx 0,$$

откуда находим

$$\xi = \xi^\circ - \frac{i}{\kappa \sqrt{d}} + \dots,$$

где ξ° – корень уравнения (3.6). Легко убедиться, что показатели экспонент в (4.3) и (3.7) при этом совпадают. Кроме того, величина Q асимптотически переходит в $\kappa d w_1^2(\xi^\circ)$ и перестает зависеть от s . Таким образом, формула (4.3) при больших d и $\xi = O(1)$ переходит в асимптотику (3.7).

Обратимся теперь к асимптотике (4.4). Полагая в (4.5) $\eta = O(1)$ и заменяя асимптотикой функцию Эйри $w_1(\eta + \tilde{d})$, приходим к уравнению

$$\sqrt{\tilde{d}} v(\eta) - \kappa \dot{v}(\eta) \approx 0,$$

откуда

$$\eta = \eta^\circ + \frac{\kappa}{\sqrt{\tilde{d}}} + \dots,$$

где η° – корень уравнения (3.9). Функция $P(s, \alpha)$ может быть представлена в виде

$$P \approx \frac{\tilde{d}}{\kappa} w_1^2(\eta + \tilde{d}).$$

Кроме того,

$$w_1(\eta + \tilde{d} - v) / w_1(\eta + \tilde{d}) \approx \\ \approx \exp(-\sqrt{\tilde{d}} v) = \exp(-\omega D n).$$

Таким образом, асимптотика (4.4) переходит в (3.8) с

$$A_0(0) = C_0(0) w_1(\tilde{d}(0) + \eta).$$

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ПАДАЮЩИМ ПОЛЕМ

Рассмотрим процесс возбуждения волн, изученных в предыдущих параграфах. Очевидно, что волны первого типа зарождаются в зоне Фока в окрестности точки падения касательного луча на границу S . Помимо нормали растяжению под-

вергнем и координату s и будем искать решение в виде

$$u = \exp(i\omega s) \sum_j U_j(\sigma, \nu) \omega^{-j/3}, \quad (5.1)$$

$$\sigma = \omega^{1/3} 2^{-1/3} \rho_0^{-2/3} s.$$

Здесь ρ_0 – радиус кривизны геодезической на S в точке границы свет–тень.

Подставим представление (5.1) в уравнение Гельмгольца и приравняем члены при одинаковых степенях большого параметра ω . В старшем порядке получим параболическое уравнение, к которому применим преобразование Фурье. В результате трансформанта Фурье $\hat{U}_0(\xi, \nu, \alpha)$ в Ω_1 запишется в виде

$$\hat{U}_0 = \hat{A}_0(\xi, \alpha) w_1(\xi - \nu), \quad \nu > 0.$$

Падающее поле в рассматриваемой малой окрестности границы свет–тень имеет в старшем порядке вид плоской волны с некоторой амплитудой $A(\alpha)$. Его преобразование Фурье, как известно [4], следующее:

$$A(\alpha) \frac{1}{\sqrt{\pi}} v(\xi - \nu), \quad \nu > 0.$$

Рассмотрим случай существенного контраста $D = O(1)$. Найдем

$$\hat{U}_0 = \hat{B}_0(\xi, \alpha) e^{-iD\omega n}, \quad n < 0.$$

Амплитуды \hat{A}_0 и \hat{B}_0 находятся из граничных условий (2.1). В старшем порядке акустическое поле не проникает в Ω_2 , $\hat{B}_0 = 0$. Для \hat{A}_0 формула оказывается такой же, как и в случае акустически мягкой границы [4]:

$$\hat{A}_0 = -\frac{A(\alpha) v(\xi)}{\sqrt{\pi} w_1(\xi)},$$

что приводит к следующей асимптотике поля в Ω_1 :

$$u^s \approx -\frac{A(\alpha)}{\sqrt{\pi}} e^{i\omega s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\xi} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} w_1(\xi - \nu) d\xi. \quad (5.2)$$

Интеграл в (5.2) может быть вычислен по вычетам. Для асимптотически больших значений координаты σ наибольший вклад дает вычет в ближайшем к вещественной оси полюсе. Этот вклад сшивается с асимптотикой (4.2) первой волны. Сравнивая амплитуды, найдем коэффициент возбуждения

$$A_0(0, \alpha) = -2A(\alpha) \sqrt{\pi} i v(\xi^\circ) / \dot{w}_1(\xi^\circ). \quad (5.3)$$

Здесь ξ° – корень дисперсионного уравнения (3.6).

Перейдем к случаю асимптотически малого контраста, $D = O(\omega^{-1/3})$. Используя выражение (5.1), аналогично предыдущему, получим

$$\hat{A}_0(\xi, \alpha) = \frac{A(\alpha) \kappa \dot{v}(\xi - d) v(\xi) - v(\xi - d) \dot{v}(\xi)}{\sqrt{\pi} \kappa \dot{v}(\xi - d) w_1(\xi) - v(\xi - d) \dot{w}_1(\xi)}. \quad (5.4)$$

Вычисляя вычеты в нулях знаменателя (5.4), которые совпадают с решениями дисперсионного уравнения (4.2), и производя сшивание с асимптотикой (4.3), найдем коэффициенты возбуждения волн

$$A_0(0, \alpha) = A(\alpha) \frac{2\sqrt{\pi}i}{Q(0, \alpha)}. \quad (5.5)$$

Формула (5.5) справедлива для волн, представленных как разложением (4.3), так и разложением (4.4). Несложно проверить, что при увеличении δ для волн первого типа она переходит в (5.3).

Чтобы найти коэффициенты возбуждения волн второго типа, описываемых формулой (3.8), произведем в (5.5) замены, указанные в конце § 4,

$$C_0(0) = A(\alpha) \frac{2\sqrt{\pi}i}{P(0, \alpha)} w_1(\eta + N^{-4/3}d),$$

а затем произведем асимптотический переход к $D = O(1)$. Заменяя функцию Эйри w_1 асимптотикой, для случая $N > 1$ получаем экспоненциально малую амплитуду

$$C \sim \frac{2\sqrt{\pi}i\kappa}{X^{3/2}} \exp\left(-\frac{2}{3}X^3 - X\eta^\circ - \kappa\right), \quad (5.6)$$

$$X = \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N^{2/3}}.$$

Для случая $N < 1$ получаем

$$C \sim \frac{2\sqrt{\pi}i\kappa}{Y^{3/2}} \exp\left(-\frac{2i}{3}Y^3 - iY\eta^\circ - i\kappa - i\frac{\pi}{4}\right), \quad (5.7)$$

$$Y = \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{1 - N^2}}{N^{2/3}}.$$

Таким образом, в случае существенного контраста, волны первого типа достаточно хорошо возбуждаются падающим полем, но быстро затухают. Волны второго типа при $N > 1$ возбуждаются экспоненциально слабо, но далее распространяются практически без затухания. Для $N < 1$ коэффициент возбуждения волн второго типа оказывается порядка $O(\omega^{-1/2})$, но при распространении вдоль границы такие волны имеют затухание, определяемое множителем (3.10).

Асимптотики (5.6) и (5.7) справедливы при $N \approx 1$, когда точки падения касательного луча и луча,

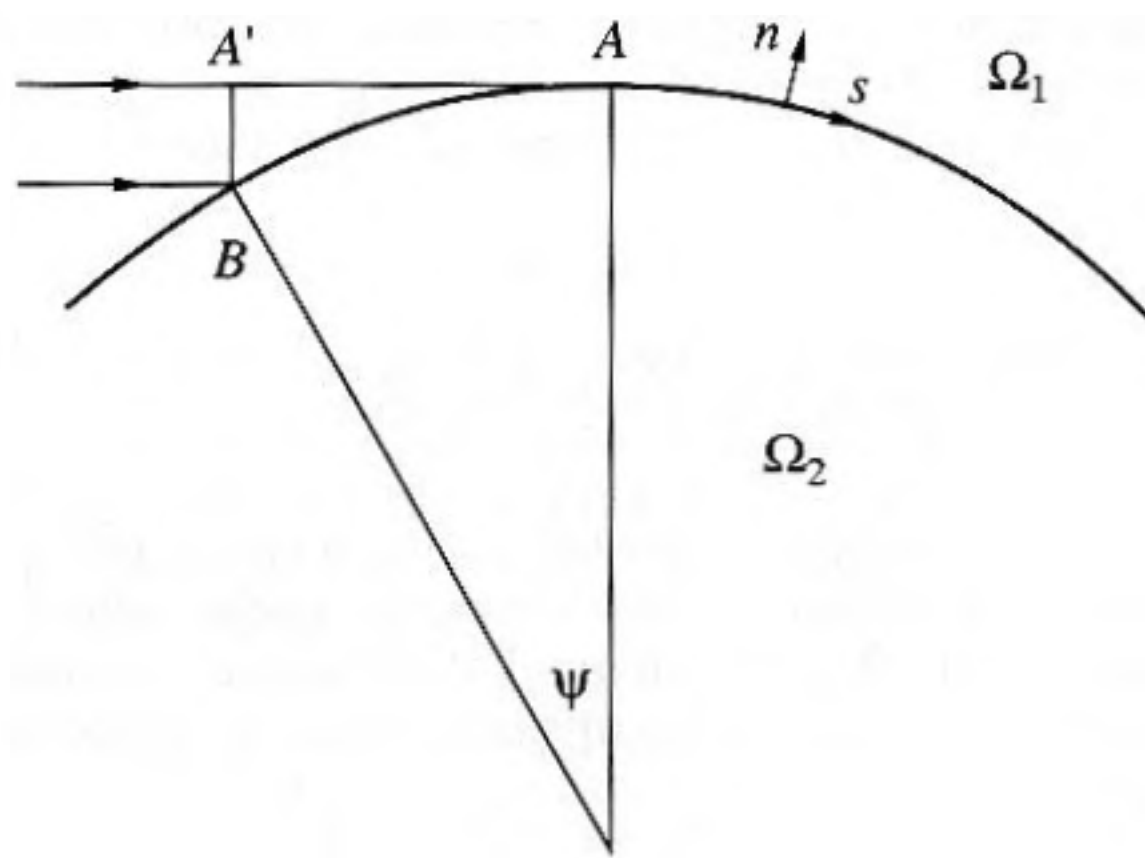


Рис. 1. Геометрическая трактовка асимптотики (5.7).

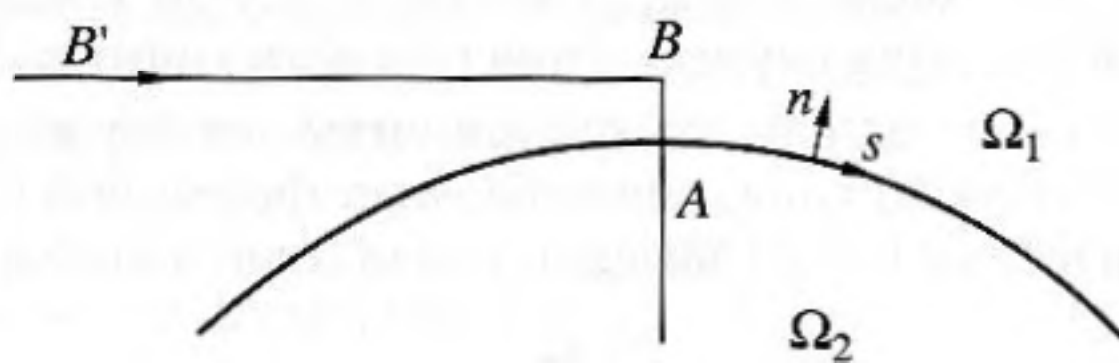


Рис. 2. Геометрическая трактовка асимптотики (5.6).

падающего на S под углом полного внутреннего отражения, близки. Асимптотика (5.7) согласуется с результатами [3]. При этом фазовый множитель в старшем по ω порядке отвечает разности фаз волн, пробегающих отрезок $A'A$ и дугу $\overset{\frown}{BA}$ в области Ω_2 (см. рис. 1). Действительно, полагая $N = 1 + \omega$, найдем $\tau_1 = |A'A| = \rho_0 \sin \psi \approx \rho_0 \sqrt{2\epsilon} (1 - \epsilon/4)$, $\tau_2 = N|\overset{\frown}{BA}| = N\rho_0 \psi \approx \rho_0 \sqrt{2\epsilon} (1 - 11\epsilon/12)$. Старший

член в показателе экспоненты в (5.7) дает $-\frac{2}{3} iY^3 \approx -i\omega \frac{2}{3} \rho_0 \sqrt{2} \epsilon^{3/2} \approx i\omega(\tau_2 - \tau_1)$.

Асимптотика (5.6) также допускает геометрическое истолкование. Старший член в ее экспоненте отвечает туннелированию волны, распространяющейся по лучу, отстоящему от границы S на расстоянии $(N - 1)\rho_0$ (см. рис. 2). Рассмотрим волну, бегущую в Ω_2 с угловым фактором $i\omega N\rho_0 \psi = i\omega Ns$. Заметим, что такая волна в старшем порядке зависит от радиуса r по закону

$$V(r) = \exp\left(\pm \omega N \int_{\rho_0}^r \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_0}{l}\right)^2} dl\right).$$

Теперь мысленно продолжим эту волну за границу S . При $r = \rho_0 N$ фактор, определяющий зависимость от угла ψ , совпадет с фазовым множителем волны, бегущей в Ω_1 по лучу $B'B$. При этом

$$V(\rho_0 N) = \pm \omega (\sqrt{1 - N^{-2}} - \arccos(N^{-1})) \approx \pm \omega \frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{3/2},$$

что совпадает с половиной показателя экспоненты в (5.6). Таким образом, экспоненциальный множитель в (5.6) описывает туннелирование акустической волны из точки B в точку A и аналогичное туннелирование волны шепчущей галереи из области Ω_2 в область Ω_1 .

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ФОРМУЛ ДЛЯ МАЛОГО КОНТРАСТА

Для малых значений контраста при $\delta = O(1)$ необходим численный анализ дисперсионных урав-

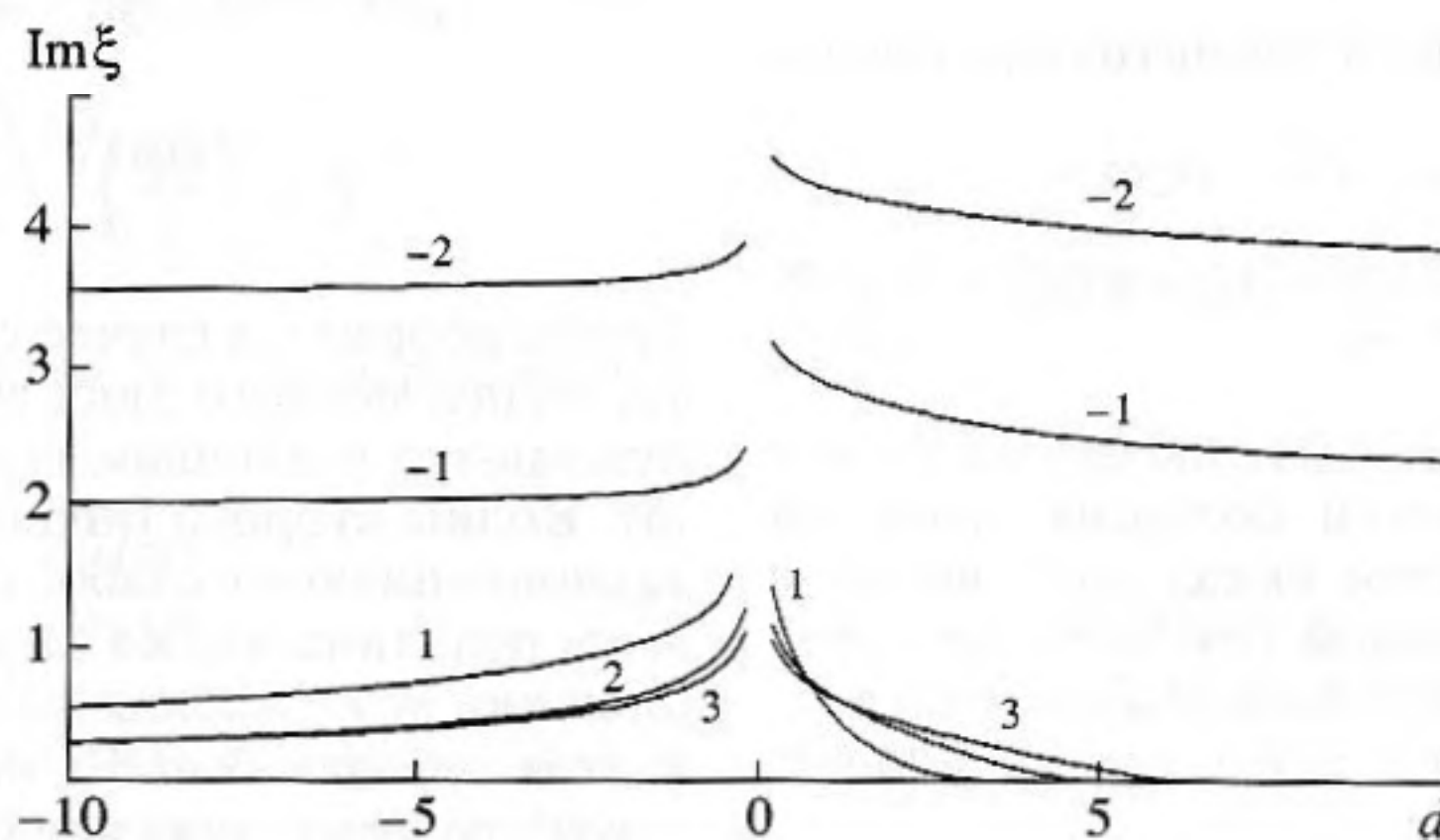


Рис. 3. Мнимые части решений ξ_j дисперсионного уравнения (4.2) в зависимости от параметра d .

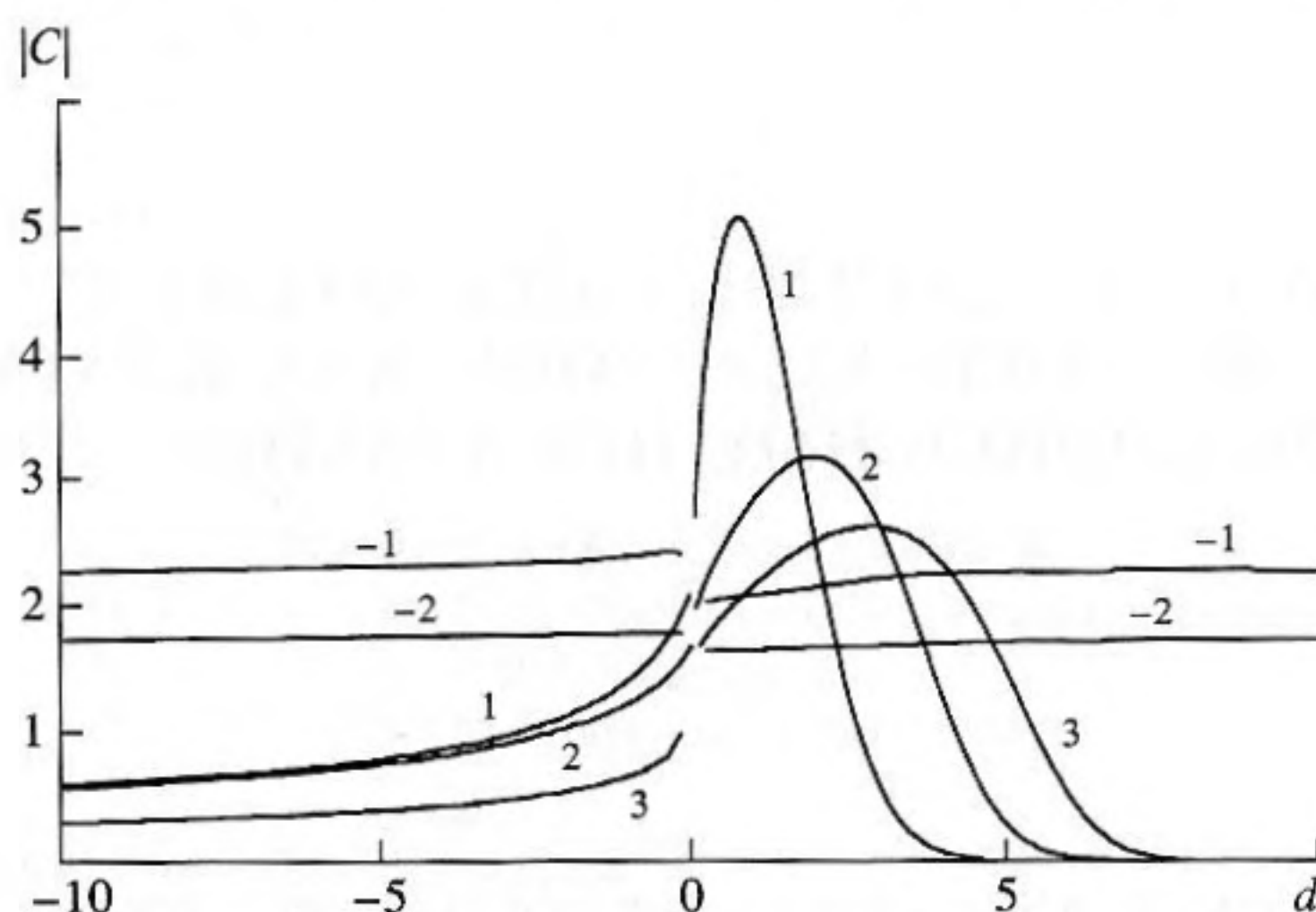


Рис. 4. Модули коэффициентов возбуждения в зависимости от d .

нений и формул для коэффициентов возбуждения волн. Ограничимся ситуацией с равными плотностями сред, $\kappa = 1$. Дисперсионное уравнение (4.2) имеет бесконечное множество решений. При увеличении параметра d , как было указано в § 4, корни дисперсионного уравнения группируются в две полубесконечные последовательности. Одна, отвечающая волнам первого типа, стремится к нулям функции Эйри w_1 , лежащим на луче $\arg(\xi) = \pi/3$. Пронумеруем эти корни числами $-1, -2, -3, \dots$. Другая серия корней (4.2) отвечает волнам второго типа и при $d \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулям функции v , лежащим на отрицательной полуоси η . Пронумеруем эти корни числами $1, 2, 3, \dots$. Мнимые части решений дисперсионного уравнения характеризуют затухание волн и представляют наибольший интерес. Эволюция $\text{Im}\xi$ при уменьшении параметра d представлена для решений $\xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_1, \xi_2$ и ξ_3 на рис. 3.

Коэффициенты возбуждения волн представлены на рис. 4. Для волн первого типа коэффициенты возбуждения почти не зависят от контраста. При малых положительных значениях параметра d коэффициенты возбуждения волн второго типа оказываются больше коэффициентов возбуждения волн первого типа. При увеличении d наблюдаются характерные максимумы, а затем происходит экспоненциальный спад, согласующийся с

эффектом туннелирования, описываемым формулой (5.6). Одновременно с этим уменьшаются и мнимые части показателя η , т.е. уменьшается затухание волн. Для отрицательных d коэффициенты возбуждения волн второго типа убывают при увеличении контраста степенным образом, что согласуется с (5.7).

Настоящая работа поддержана грантом РФФИ 02-02-16560.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smyshlyaev V.P., Babich V.M., Dementiev D.B., Samikish B.A. Diffraction of creeping waves by conical points // Fluid mechanics and its applications, 2002. V. 68. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London. P. 209–216.
2. Andronov I.V., Bouche D. The creeping and whispering gallery waves on the surface of a transparent body // J. of Electromagnetic Waves and Applications. 1995. V. 9. P. 503–520.
3. Булдырев В.С. Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 5. С. 699–711.
4. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд. ЛГУ, 1974. 125 с.

Waves Concentrated Near Weak-Contrast Boundaries

I. V. Andronov

Excitation and propagation of acoustic waves along curvilinear boundaries between two media are investigated. Formal high-frequency asymptotic expressions practicable for approximate calculations in the case of media with slightly different velocities are derived. Dispersion equations and wave excitation coefficients at weak-contrast boundaries are investigated numerically.