

УДК 534.213

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕГИСТРАЦИИ

© 2004 г. В. И. Клячкин

Центральный научно-исследовательский институт "Морфизприбор"

197376 Санкт-Петербург, Чкаловский проспект 46

E-mail: mfp@mail.wplus.net

Поступила в редакцию 25.06.2003 г.

Исследованы статистические характеристики акустических полей, основанные на данных совместной регистрации давления и вектора колебательной скорости. Установлены условия формирования векторно-фазовых характеристик акустического поля в связи с дисперсионными свойствами среды. Приведены взаимно корреляционные функции для компонент векторного поля. С помощью функциональных методов найдены выражения для характеристических функционалов векторно-фазовых соотношений в акустических полях и, в частности, для потока акустической энергии. Исследованы алгоритмы пространственно-временной обработки вектора потока энергии и оптимального алгоритма регистрации векторно-фазового поля гауссова типа. Найдено отношение сигнал/шум как показатель качества алгоритмов векторного приема и установлена его связь с аналогичным параметром при регистрации только скалярного поля давления. Установлена связь показателей относительной эффективности векторных алгоритмов с дисперсионными характеристиками среды (алгоритм потока) и размерностью входного вектора наблюдений (оптимальный алгоритм).

В последние десятилетия отмечается значительный интерес к исследованию статистических свойств векторно-фазовых (В-Ф) характеристик акустических полей как в общенаучном, так и в практическом плане, применительно к созданию систем изучения акустических волноводов и синтеза алгоритмов регистрации В-Ф-полей. При этом термин В-Ф-поле означает четырехкомпонентное поле, объединяющее в себе акустические поля давлений (скаляр) и акустические поля колебательных скоростей (вектор).

Целью данной работы являются изучение вероятностной структуры В-Ф-характеристик акустических полей и анализ некоторых алгоритмов их регистрации и пространственно-временной обработки, что может рассматриваться как развитие работы [1], обсуждаемой в обзорной публикации [2].

Как известно, уравнения акустики непрерывных сред в адиабатическом приближении описывают структуру поля давления $P(\bar{x}, t)$ и колебательной скорости $\bar{V}(\bar{x}, t)$, связанных через уравнение Эйлера:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}(\bar{x}, t) = -\nabla_x P(\bar{x}, t); \quad (1)$$

$$\bar{V}(\bar{x}, t) = -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^t \nabla_x P(\bar{x}, \tau) d\tau \quad \bar{V}(\bar{x}_1 - \infty) = 0.$$

Оба поля в совокупности полностью описывают акустическую среду и связываются, помимо (1), уравнениями неразрывности и состояния:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{x}, t) + \rho_0 \operatorname{div} \bar{V}(\bar{x}, t) = 0; \quad (2)$$

$$p(\bar{x}, t) = c^2 \rho(\bar{x}, t).$$

Здесь, как обычно, плотность $\rho_0 = \text{const}$ (для однородной и нестратифицированной среды), c – скорость звука, $\rho(\bar{x}, t)$ – переменное акустическое поле плотности.

Уравнения (1), (2) допускают, как известно, введение потенциала $\Psi(\bar{x}, t)$

$$p(\bar{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\bar{x}, t); \quad \bar{V}(\bar{x}, t) = -\nabla_x \Psi(\bar{x}, t), \quad (3)$$

не являющегося непосредственно измеряемой характеристикой поля. Из (1), (2) вытекают волновые уравнения для P , \bar{V} и Ψ . Применительно к предложенным ниже алгоритмическим процедурам функционально связанные через (1) и непосредственно измеримые случайные поля P и \bar{V} могут рассматриваться как координаты полного вектора \bar{A} акустического состояния среды в четырехмерном $(p; V_1; V_2; V_3)$ фазовом пространстве. Линейная независимость компонент вектора $\bar{A} (A_1 \dots A_L) \equiv A(p; V_1; V_2; V_3)^1$ налагает определен-

ные физические условия на выбор согласованных с (1) акустических характеристик среды, в которой распространяется звук, специализированным требованием:

$$\text{Det } U_{kl} \neq 0; \quad k, l = 1 \dots L, \quad (4)$$

где $\text{Det } U_{kl}$ – определитель Грама, при этом $U_{kl} = (A_k, A_l) \equiv \int A_k(\bar{x}, t) A_l(\bar{x}, t) d\bar{x} dt$ – есть матрица скалярных произведений компонент акустического вектора \bar{A} в фазовом пространстве (\bar{p}, \bar{v}) . В указанном смысле система уравнений линейной акустики (1), (2) определяет пространственно-временную эволюцию четырехкомпонентного вектора $\bar{A}(\bar{p}, \bar{v})$.

В частности, для случая $\bar{A} \equiv \bar{A}(p, v_1)$ имеем ($v_1 \equiv v$)

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (p, p); (p, \bar{v}) \\ (\bar{v}, p); (\bar{v}, \bar{v}) \end{vmatrix}, \quad (4a)$$

где $(\cdot, \cdot) \equiv \int \dots d\bar{x} dt$ – скалярное произведение. Имеем связи:

$$(p, p) = 2\rho_0 c^2 V; \quad (\bar{v}, \bar{v}) = 2\rho_0^{-1} T, \quad (5)$$

где V, T – средняя потенциальная и кинетическая энергия в объеме $V_0 \times T_0$:

$$V = \frac{1}{2\rho_0 c^2} \int_{V_0 \times T_0} p^2(\bar{x}, t) d\bar{x} dt; \quad (5a)$$

$$T = \frac{\rho_0}{2} \int_{V_0 \times T_0} v^2(\bar{x}, t) d\bar{x} dt.$$

При этом $E = T + V$ – полная энергия; для колебательных движений $V = T = \frac{1}{2} E$. Соответственно

$(P, P) = \rho_0 c^2 E, (\bar{v}, \bar{v}) = \rho_0^{-1} E$. Аналогично:

$$(P, \bar{v}) = \int_{V_0 \times T_0} p(\bar{x}, t) \bar{v}(\bar{x}, t) d\bar{x} dt = \int_{V_0} S(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (5b)$$

где $S(\bar{x}) = U_{гр} \varepsilon(\bar{x})$, ε – полная средняя энергия единицы объема; $U_{гр}$ – групповая скорость.

Соответственно

$$(p, \bar{v}) = U_{гр} E. \quad (5в)$$

Из (4), (5) получаем:

$$\text{Det } A \equiv (p, p)(\bar{v}, \bar{v}) - (p, \bar{v})(\bar{v}, p) = (c^2 - U_{гр}^2) E^2. \quad (6)$$

При $c^2 \neq U_{гр}^2$, т.е. в системах с дисперсией любого происхождения, $\text{Det } A \neq 0$ и только при $c = U_{гр}$, т.е. в системах без дисперсии, например, в неограни-

ченной среде, компоненты P и \bar{v} не являются линейно независимыми.

В частности для плоских бегущих волн $p = F\left(t - \frac{1}{c} \bar{k}_0 \bar{x}\right)$, где \bar{k}_0 – нормальный к волновому фронту единичный фронту распространения, получаем связь:

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \frac{\bar{k}_0}{\rho_0 c} p(\bar{x}, t). \quad (7)$$

Поэтому для поля бегущей плоской волны информация о поле давления p делает излишней операцию непосредственного наблюдения колебательной скорости.

Однако для В-Ф-характеристик акустических полей общего типа (где (7) невыполнимо) прямая регистрация полей p и \bar{v} становится необходимой для полного описания. Этот результат физически очевиден, поскольку, как известно, решение волнового уравнения в ограниченной среде управляется (помимо сторонних источников) значениями полей давления (монополи) и нормальных компонент колебательной скорости (диполи) во всех точках ограничивающей поле поверхности. В этих условиях регистрация вектора (p, \bar{v}) является необходимой базой для полного описания В-Ф-характеристик акустического поля в некотором ограниченном объеме. Физически очевидно также, что переход к векторному (p, \bar{v}) -описанию обоснован также вблизи источников излучения в области дифракции Френеля, где соотношение (7) также теряет силу. При регистрации акустических полей общего типа использование векторного описания открывает физические возможности для селекции плосковолновых вкладов и непосредственного наблюдения – при регистрации ε и S – (см. (5)) – групповой скорости $U_{гр}$, т.е. экспериментального наблюдения дисперсионной структуры канала распространения. Разумеется, в прикладном плане переход к векторному описанию должен оправдываться его практической целесообразностью при построении решающих алгоритмов.

Перейдем теперь к изложению материалов данной работы.

Осредняя (1) по ансамблю реализаций, получим для первых статистических моментов $a_p = MP$ и $\bar{a}_{\bar{v}} = M\bar{V}$:

(M – математическое ожидание):

$$\begin{aligned} \bar{a}_p(\bar{x}, t) &= Mp(\bar{x}, t); \\ a_v(\bar{x}, t) &= -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^t \nabla_{\bar{x}} a_p(\bar{x}, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Центрированность поля p , т.е. $a_p = 0$ ведет к $\bar{a}_v = 0$ и к центрированности всех статистических моментов векторного поля p, \bar{v} .

Для вторых статистических моментов (корреляционных функций) вытекают связи:

$$B_{p\bar{v}}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) = -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \nabla_{\bar{y}} B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{y}, \varepsilon) d\varepsilon,$$

$$B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) = Mp(\bar{x}, t)p(\bar{y}, \tau),$$

$$B_{v_i v_j}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) = \rho_0^{-2} \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} B_{pp}(\bar{x}, \sigma/\bar{y}, \varepsilon) d\sigma d\varepsilon, \quad (9)$$

$$B_{v_i v_j}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) = Mv_i(\bar{x}, t)v_j(\bar{y}, \tau),$$

$$B_{v_i v_j}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) =$$

$$= -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{pv_j}(\bar{x}, \sigma/\bar{y}, \tau) d\sigma; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Впервые соотношение (9) встречается в дифференциальной форме в известной работе Экарта [4] (см. также [1-3]).

Для статистически стационарных полей давлений, т.е. при $B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{y}, \tau) \equiv B_{pp}(\bar{x}, \bar{y}, \tau - t)$ из (9) вытекают связи:

$$B_{p\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}, \tau - t) = -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau-t} \nabla_{\bar{y}} B_{pp}(\bar{x}, \bar{y}, \sigma) d\sigma =$$

$$= B_{v_p}(\bar{x}, \bar{y}, t - \tau), \quad (10)$$

$$B_{v_i v_j}(\bar{x}, \bar{y}, \tau - t) = \rho_0^{-2} \int_{-\infty}^{\tau-t} \int_{-\infty}^{\tau-t} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} B_{pp}(\bar{x}, \bar{y}, \sigma) d\sigma,$$

т.е. свойства стационарности переносятся и на взаимные статистические моменты.

Моментные функции являются достаточной базой для описания гауссовых полей p, \bar{v} . В общем случае, например, при описании полей потоков энергии $\bar{S}(\bar{x}, t) = p(\bar{x}, t)\bar{v}(\bar{x}, t)$, даже при гауссовом характере p, \bar{v} эти соотношения уже недостаточны и требуется анализ полной вероятностной структуры на базе функционалов плотности вероятности (ФПВ) или характеристических функционалов (ХФ) четырехмерных полей (p, \bar{v}) . При этом (см. [4, 5]) ХФ представляет собой континуальную Фурье-трансформанту ФПВ. Для этого, следуя методу работ [6, 7], введем совместный ФПВ $W_{p, \bar{v}}\{\mu, \bar{v}\}$ полей p, \bar{v} , где

μ, \bar{v} — их реализации соответственно. Для $W_{p, \bar{v}}$ имеем представление:

$$W_{p, \bar{v}}\{\mu, \bar{v}\} = W_{\bar{v}/p}\{v/\mu\}W_p\{\mu\}, \quad (11)$$

где $W_{\bar{v}/p}\{\cdot/\cdot\}$ есть функционал условной плотности вероятности поля \bar{v} , когда поле p задано; $W_p\{\cdot\}$ есть безусловный ФПВ поля p . Исходя из (1) имеем:

$$W_{\bar{v}/p}\{\bar{v}/\mu\} = D\left\{\bar{v} + \rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \nabla \mu d\tau\right\}, \quad (12)$$

где $D\{\cdot\}$ — дельта-функционал (континуальный аналог многомерной δ -функции), обладающий свойствами [8]:

$$\int_{D_{\bar{p}}} D\{\bar{p}\} d\Gamma(\rho) = 1; \quad (12a)$$

$$\int_{D_{\bar{p}}} D\{\bar{p} - \bar{r}\} G\{\bar{p}\} d\Gamma(\rho) = G\{\bar{r}\}.$$

Континуальные интегралы (12a) распространены по пространству функций $D_{\bar{p}}$ с мерой $d\Gamma(\rho)$ функционального объема; $G\{\bar{p}\}$ — произвольный функционал.

Из (11), (12) следует:

$$W_{p, \bar{v}}\{\mu, \bar{v}\} = D\left\{\bar{v} + \rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \nabla_{\bar{x}} \mu d\tau\right\} W_p\{\mu\}. \quad (13)$$

Соотношение (13) остается верным для любых статистических свойств поля p .

В частности, совместный ХФ $\theta_{p, \bar{v}}$ полей p, \bar{v} следует из (13) как трансформанта Фурье:

$$\theta_{p, \bar{v}}\{\alpha, \bar{\beta}\} = \theta_p\left\{\alpha - \rho_0^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} \operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{\beta} d\tau\right\}; \quad (14)$$

$$\theta_{\bar{v}}\{\beta\} \equiv \theta_{p, \bar{v}}\{0, \bar{\beta}\},$$

где θ_p есть ХФ поля давления; $\alpha = \alpha(\bar{x}, t)$, $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\bar{x}, t)$.

Формулы (13), (14) дают полное вероятностное описание векторного поля (p, \bar{v}) . При этом все моментные функции получаются из (14) вариационным дифференцированием по функциональным аргументам. Мы проиллюстрируем эту общую схему на примере определения ХФ случайного поля потока акустической мощности $S = p\bar{v}$.

Используя (1), получаем:

$$\bar{S}(\bar{x}, t) = -\rho_0^{-1} p(\bar{x}, t) \int_{-\infty}^t \nabla_{\bar{x}} p(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (15)$$

Вводя сингулярное ядро:

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{x}, t; \bar{r}, \mu/\bar{r}', \tau) &= \\ &= \rho_0^{-1} \delta(\bar{x} - \bar{r}) \delta(t - \mu) \sigma(t - \tau) \nabla_{\bar{r}} \delta(\bar{x} - \bar{r}'), \end{aligned} \quad (15a)$$

приводим (15) к квадратичной форме:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{x}, t) &= \\ &= \int \int \int \int_{V_r V_{r'}} \hat{K}_S(\bar{x}, t; \bar{r}, \mu/\bar{r}', \tau) p(\bar{r}, \mu) p(\bar{r}', \tau) d\bar{r}' d\bar{r} d\mu d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где ядро $\hat{K}_S = \frac{1}{2}[\hat{K} + \hat{K}^+]$ является симметричным; знак + означает эрмитово сопряжение. В операторной форме (16) имеет вид:

$$\bar{S} = (\hat{K}_S p, p). \quad (17)$$

Действуя теперь по схеме (11)–(13), получаем:

$$W_{\bar{S}}\{\bar{\sigma}\} = \int_{D_\varepsilon} D\{\bar{\sigma} - (\hat{K}_S \varepsilon, \varepsilon)\} W_p\{\varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon). \quad (18)$$

Переходя в (18) к ХФ, получим ($\bar{\xi}$ – вектор-функция):

$$\theta_{\bar{S}}\{\bar{\xi}\} = \int_{D_\eta} \theta_p\{\eta\} T\{\bar{\xi}, \eta\} d\Gamma(\eta), \quad (19)$$

где $\theta_{\bar{S}}, \theta_p$ – суть ХФ полей \bar{S} и p соответственно.

Функционал $T\{\bar{\xi}, \eta\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} T\{\bar{\xi}, \eta\} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{D_\varepsilon} \exp i[(\bar{\xi}, \hat{K}_S \varepsilon, \varepsilon) - (\eta, \varepsilon)] d\Gamma(\varepsilon). \end{aligned} \quad (19a)$$

Интегралы в (19) являются континуальными и при гауссовой структуре θ_p допускают полное вычисление. Проводя соответствующие выкладки (см. [16, 17]), получаем:

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{S}}\{\bar{\xi}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D_F^{-1/2} \{\hat{I} + 2i\hat{K}_0\} \times \\ &\times \int_{D_\eta} \theta_p\{\eta\} \exp -\frac{i}{4} (\hat{K}_0^{-1} \eta, \eta) d\Gamma(\eta), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\hat{K}_0 = (\bar{\xi}, \hat{K}_S)$ есть также симметричное ядро; скалярное произведение, согласно (15a), распро-

странено на (\bar{x}, t) -пространстве; D_F – определитель Фредгольма ядра $\hat{I} + 2i\hat{K}_0$; \hat{I}_0 – единичное ядро.

При гауссовой структуре централизованного поля p , т.е. при

$$\theta_p\{\eta\} = \exp -\frac{1}{2} (\hat{B}_{pp} \eta, \eta) \quad (21)$$

(\hat{B}_{pp} – корреляционное ядро), вычислив континуальный интеграл (20), окончательно получим:

$$\theta_{\bar{S}}\{\bar{\xi}\} = D_F^{-1/2} \{2i(\bar{\xi}, \hat{K}_S) \hat{B}_{pp}\}. \quad (22)$$

Моментные функции поля потока \bar{S} получаются из (22) чисто технической процедурой вариационного дифференцирования [7]. Для первых двух моментов поля S получаем:

$$\begin{aligned} MS_l(\bar{x}, t) &= Mp(\bar{x}, t) v_l(\bar{x}, t) \equiv B_{pv_l}(\bar{x}, t/\bar{x}, t) = \\ &= -\rho_0^{-1} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x_l} B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{x}, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} MS_l(\bar{x}, t) S_\sigma(\bar{x}', t') &= B_{S_l S_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') = \\ &= B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{v_l v_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') + \\ &+ B_{v_l p}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{pv_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') + \\ &+ B_{pv_l}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{pv_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t'). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (23), (24) следует ковариационная функция потока \bar{S} :

$$\begin{aligned} \Psi_{l\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') &= B_{pp}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{v_l v_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') + \\ &+ B_{v_l p}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{pv_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t'), \end{aligned} \quad (25)$$

из (25) и (9) следует также весьма полезное тождество:

$$\begin{aligned} \int \int_{V_0 T_0} \Psi_{l\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') d\bar{x} dt d\bar{x}' dt' &= \\ &= 2 \int \int_{V_0 T_0} B_{v_l p}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') B_{pv_\sigma}(\bar{x}, t/\bar{x}', t') d\bar{x} dt d\bar{x}' dt'. \end{aligned} \quad (26)$$

Разумеется, выражения (23)–(26) могут быть получены и прямым усреднением четвертых моментов для гауссовой структуры полей p, \bar{v} , не прибегая к вариационному дифференцированию. Однако получение высших моментов становится весьма трудоемким даже для гауссовых статистик. Использование же (20) для негауссовых p -статистик становится более предпочтительным. Замкнутая форма (22) для ХФ поля \bar{S} , очевидно, становится базовой при построении оптимальных алгоритмов пространственно-временной обра-

ботки в условиях регистрации энергетических потоков S акустического В-Ф-поля.

Перейдем теперь к анализу алгоритмов и их показателей эффективности (индикаторного отношения сигнал/шум) для случая векторного приема (регистрация (p, \bar{v}) -полей) в их сопоставлении с базовым традиционным алгоритмом, основанном на регистрации только скалярного поля давлений. Рассмотрим две разновидности алгоритмов:

- Подоптимальный алгоритм регистрации энергетических потоков $\bar{S}(\bar{x}, t) = p(\bar{x}, t)\bar{v}(\bar{x}, t)$;

- Оптимальный алгоритм регистрации (p, \bar{v}) -полей на базе исследования отношения правдоподобия и анализа индикаторного отношения сигнал/помеха.

В первом случае ограничимся оценочными расчетами, увязанными с физическими особенностями распространения потоков в акустической среде с выраженной пространственной дисперсией.

Во втором случае проведем более развернутый анализ, основанный на представлении о гауссовых статистиках регистрируемых В-Ф-полей p, \bar{v} .

Простейшей (подоптимальной) формой регистрации l – составляющей потока энергии (мощности) – является безвесовая обработка вида

$$\begin{aligned} Z_l &= \iint_{xT} p(\bar{x}, t) v_l(\bar{x}, t) d\bar{x} dt \equiv \\ &\equiv \iint_{k\omega} \tilde{p}(\bar{k}, \omega) \tilde{v}_l^*(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega. \end{aligned} \quad (27)$$

Интегрирование в (27) ведется в пространстве-времени (x, t) либо в области (\bar{k}, ω) пространственно-частотных масштабов; знак \sim обозначает четырехмерный спектр Фурье. Используя спектральную форму уравнения Эйлера (1), получим:

$$Z_l = \iint_{k\omega} \zeta_l(\bar{k}, \omega) \hat{\Phi}_p(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega, \quad (28)$$

где

$$\hat{\Phi}_p(\bar{k}, \omega) = |\tilde{p}(\bar{k}, \omega)|^2; \quad \zeta_l = \frac{k_l}{\rho_0 \omega}.$$

Поскольку Z_l есть случайная величина (процесс, поле), ее среднее значение и дисперсия для модели стационарного и однородного случайного поля давления определяются из (28):

$$\begin{aligned} \alpha_{Z_l} &= MZ_l = \iint_{k\omega} \zeta_l(\bar{k}, \omega) \Phi_p(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega; \\ \Phi_p &= M\hat{\Phi}_p; \end{aligned} \quad (29)$$

$$DZ_l = MZ_l^2 - \alpha_{Z_l}^2 = \iint_{k\omega} \zeta_l^2(\bar{k}, \omega) D_p(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega, \quad (29a)$$

где

$$D_p(\bar{k}, \omega) = M|\hat{\Phi}_p(\bar{k}, \omega)|^2 - |M\Phi_p^2(\bar{k}, \omega)|.$$

Для интересующих нас оценочных результатов определим нижнюю границу дисперсии D_{Z_l} из неравенства Коши–Шварца:

$$D_{Z_l} \leq \Delta_l d_p; \quad \Delta_l = \iint_{k\omega} \zeta_l^2(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega; \quad (30)$$

$$d_p = \iint_{k\omega} D_p(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega.$$

Если алгоритм (27) подчинен конечной цели выделения плоскостолновой компоненты полей p, \bar{v} (сигнал S) на фоне поля помех N общего типа (т.е. порождаемого различными физическими механизмами), то рассматривая p, \bar{v} и p -регистрацию и отбрасывая эффекты обработки сигнала во времени в обоих случаях $\sim (\Delta Ft)^{1/2}$, получим при выборе в качестве показателя эффективности индикаторного (последетекторного) отношения сигнал/шум:

$$\begin{aligned} Q_{Z_l} \equiv Q_{S_l} &= (\rho_0 c)^{-1} [DZ_l]_N^{-1/2} MZ_p^S, \\ Q_{pp} &= d_{pN}^{-1/2} MZ_p^S \end{aligned} \quad (31)$$

(при этом предполагается, что сигнал S распространяется вдоль горизонтальной оси плоского морского волновода).

Объединяя (30) и (31), получаем оценку нижней границы относительной эффективности двух типов алгоритмов:

$$\eta_p^{S_l} = \frac{Q_{S_l}}{Q_{pp}} \geq (\rho_0 c)^{-1} \Delta_N^{-1/2} = \hat{\eta}_p^{S_l}. \quad (32)$$

С учетом (30) и (28) из (32) следует:

$$\hat{\eta}_p^{S_l} = \left[\iint_{k\omega} \frac{c^2}{c_{\Phi l N}^2}(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega \right]^{-1/2}, \quad (33)$$

где $c_{\Phi l N}$ – фазовая скорость помехи N . Для идеально-го волновода, т.е. при $c_{\Phi l N}^2 U_{\Gamma l N} = c^2$ из (33) следует:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_p^{S_l} &= \frac{c}{\langle U_{\Gamma l N} \rangle}; \\ \langle U_{\Gamma l N} \rangle &= \left[\iint_{k\omega} U_{\Gamma l N}^2(\bar{k}, \omega) d\bar{k} d\omega \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\langle U_{грlN} \rangle$ – эффективное значение групповой скорости, осредненное по (\bar{k}, ω) -пространству.

Окончательно приходим к оценке

$$\eta_p^{S_i} = \frac{c}{\langle U_{грlN} \rangle} \quad (35)$$

Очевидно, сила неравенства (32) определяется дисперсионной структурой законов распространения полей помех. Нетрудно видеть, что, используя связь (5) между энергией E поля (p, \bar{v}) и ее потоком, для относительной эффективности $\eta_p^{S_i}$ получим ту же самую оценку (35) вне зависимости от механизма генерации и распространения полей помех.

Поскольку для морских шумов, генерируемых вибрирующими конструкциями, шумов гидродинамического (псевдозвукового) происхождения, гравитационно-капиллярных волн, динамических шумов морской поверхности $U_{гр} = \frac{d\omega}{dk} < c$, то в этом диапазоне физических условий получим:

$$\eta_p^{S_i} > 1. \quad (36)$$

Разумеется, выполнимость (36) определяется дисперсионной структурой распространяющихся полей помех. Тем самым задача алгоритмической полезности регистрации потоков энергии тесно увязывается с физическими механизмами генерации и распространения морских шумов.

В заключение рассмотрим оптимальный алгоритм В-Ф-обработки (p, \bar{v}) -полей на базе анализа отношения правдоподобия при гауссовой структуре полей сигналов S и помех N . Приведем анализ в пространственно-частотной области.

Отношение правдоподобия при В-Ф приеме гауссовых полей $U_k(\bar{x}, \omega)$; $\bar{x} \in X, \omega \in \Omega, k = 1 \dots L$ имеет вид:

$$\ln \Lambda = \ln \Lambda_0 + (2\pi)^2 \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \int d\omega \times \quad (37)$$

$$\times \int_{XX} H_{kl}(\bar{r}/\bar{p}, \omega) U_k^*(\bar{r}, \omega) U_l(\bar{p}, \omega) d\bar{r} d\bar{p},$$

где

$$(2\pi)^2 \hat{H}_{kl} = [\hat{B}_{kl}^N + \hat{B}_{kl}^S]^{-1} - [B_{kl}^N]^{-1}; \quad (37a)$$

$$k, l = 1 \dots L$$

и $\hat{B}_{kl}^N, \hat{B}_{kl}^S$ – взаимнокорреляционные спектры полей сигналов и помех;

$\hat{B}_{kl}^{N,S}(\bar{r}/\bar{p}, \omega) = M U_k^{N,S}(\bar{r}, \omega) U_l^{N,S*}(\bar{p}, \omega)$; знак * означает комплексное сопряжение.

Нетрудно видеть, что для точечного источника сигнала S , распространяющегося через детерминированный волновод, взаимный спектр \hat{B}_{kl}^S допускает факторизованное представление

$$B_{kl}^S(\bar{r}/\bar{p}, \omega) = S_k(\bar{r}, \omega) S_l^*(\bar{p}, \omega), \quad (38)$$

$$S_k(\bar{r}, \omega) = G_k(\bar{r}/\bar{a}, \omega) \sigma_S(\bar{a}, \omega),$$

где $G_k, k = 1 \dots L$ – компонента векторной функции Грина; $\sigma_S^2(\bar{a}, \omega) = F_S(\bar{a}, \omega) = M |f_S(\bar{a}, \omega)|^2$ – мощность источника S , расположенного в точке \bar{a} .

Используя (37) и (38), получаем для \hat{H} также факторизованное представление:

$$H_{kl}(\bar{r}/\bar{p}, \omega) = -h_k(\bar{r}, \omega) h_l^*(\bar{p}, \omega), \quad (39)$$

причем

$$h_k(\bar{r}, \omega) = h_0(\omega) \sum_{m=1}^L \int_{XX} R_{km}^N(\bar{r}/\bar{p}, \omega) S_m(\bar{p}, \omega) d\bar{p},$$

$$h_0(\omega) = (2\pi) \left[1 + (2\pi)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k,l=1}^L \int \int S_k^*(\bar{r}, \omega) R_{km}^N(\bar{r}/\bar{p}, \omega) S_m(\bar{p}, \omega) d\bar{r} d\bar{p} \right]^{-1/2},$$

где

$$R_{km}^N = (B_{km}^N)^{-1}. \quad (39a)$$

Соответственно из (37)–(39) следует представление для Λ :

$$\ln \Lambda = \ln \Lambda_0 - (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left| \sum_{k=1}^L \int h_k(\bar{r}, \omega) U_k^*(\bar{r}, \omega) d\bar{r} \right|^2, \quad (40)$$

что отвечает структуре пространственно-частотной обработки в виде весового сумматора-квадратора-осреднителя. При этом отношение сигнал/шум на входе квадратора определяется в виде:

$$Q(\omega) = (2\pi)^2 \sum_{k,l=1}^L \int \int S_k^*(\bar{r}, \omega) R_{kl}^N(\bar{r}/\bar{p}, \omega) S_l(\bar{p}, \omega) d\bar{r} d\bar{p}. \quad (41)$$

Соотношения (37)–(41) достаточно известны. Определим эти выражения, выбирая для векторного

поля U_k истокообразное (интегральное) представление

$$U_k(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{X}} Z_k(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) W(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (42)$$

где $Z_k, k = 1 \dots L$ – некоторое векторное ядро. Используя (42) для представления полей сигнала и шума в виде:

$$s_k(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{X}} Z_k(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) w_s(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (42a)$$

приводим (41) к эквивалентной форме:

$$Q(\omega) = \iint_{\mathbf{X}\mathbf{X}} W_S^*(\bar{\mathbf{r}}, \omega) T^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) W_S(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\mathbf{r}} d\bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (43)$$

$$T^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^L \iint_{\mathbf{X}\mathbf{X}} Z_k^*(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) R_{kl}^N(\bar{\boldsymbol{\rho}}/\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \omega) Z_l(\bar{\boldsymbol{\zeta}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\boldsymbol{\zeta}} d\bar{\boldsymbol{\rho}}.$$

Аналогично, образуя из (42a) истокообразное представление для $B_{kl}^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega)$ и $R_{kl}^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega)$ – см. (39a) – и используя (43), после преобразований получаем:

$$Q(\omega) =$$

$$= L^2 \iint_{\mathbf{X}\mathbf{X}} W_S^*(\bar{\mathbf{r}}, \omega) R_W^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) W_S(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\mathbf{r}} d\bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (44)$$

где

$$\hat{R}_W^N = [\hat{B}_W^N]^{-1}; \quad B_W^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) = M W_N^*(\bar{\mathbf{r}}, \omega) W_N(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega).$$

Интегральный член в (44), очевидно, представляет собой отношение сигнал/шум на выходе оптимального в смысле структуры отношения правдоподобия тракта пространственно-частотной обработки, если на его входе регистрируется гауссово поле $W = W_S + W_N$, где W – некоторое скалярное поле, связанное с В-Ф-полем U_k согласно (42). Из (44) видим, что регистрация вектора U_k относительно регистрации скаляра W в рамках гауссовых статистик ведет к возрастанию отношения сигнал/шум на частоте ω в L^2 раз, где L – размерность входного вектора наблюдений.

Конкретизируем полученные общие результаты применительно к поставленной нами акустической задаче – В-Ф-регистрации полей p, \mathbf{v} сигнала и шума.

В этом случае достаточно формально положить $\bar{U} [U_0, U_1, U_2, U_3] \equiv [p, v_1, v_2, v_3]$, где p – поле давления и $\bar{\mathbf{v}} [v_1, v_2, v_3]$ – поле колебательной скорости. Все компоненты вектора \bar{U} , как и выше, представляют собой аддитивную смесь сигнала и шума.

Учитываем связь между полями p и $\bar{\mathbf{v}}$ через уравнение Эйлера (1):

$$v_k(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = \frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial}{\partial r_k} p(\bar{\mathbf{r}}, \omega). \quad (45)$$

Тогда, представляя формально

$$p^{S,N}(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = \int \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) p^{S,N}(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (46)$$

$$v_k^{S,N}(\bar{\mathbf{r}}, \omega) = \frac{j}{\omega\rho_0} \int \frac{\partial}{\partial \rho_k} \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) p^{S,N}(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\boldsymbol{\rho}}$$

и сравнивая (46) и (42), имеем для векторного ядра:

$$Z_1(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) \equiv [Z_0(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega), Z_1(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega), Z_2(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega),$$

$$Z_3(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega)] \equiv \left[\delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}), \frac{j}{\omega\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}), \right.$$

$$\left. \frac{j}{\omega\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}), \frac{j}{\omega\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) \right]. \quad (47)$$

При этом введенному выше (см. (42)) скалярному полю W в связи с (46) отвечает поле давления $p = p^S + p^N$ сигнала и шума. Соответственно, применяя в (44) формальную замену $B_W^N \rightarrow B_p^N$; $R_W^N \rightarrow R_p^N$, приходим окончательно к выражению для отношения сигнал/шум на частоте ω на входе квадратора (пространственная обработка) при В-Ф-регистрации поля $p, \bar{\mathbf{v}}$:

$$Q_{p,\bar{\mathbf{v}}}(\omega) =$$

$$= L^2 \iint_{\mathbf{X}\mathbf{X}} p^{S*}(\bar{\mathbf{r}}, \omega) R_p^N(\bar{\mathbf{r}}/\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) p^S(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \omega) d\bar{\mathbf{r}} d\bar{\boldsymbol{\rho}}. \quad (48)$$

Учитывая, что интегральный член в (48) есть отношение сигнал/шум на входе квадратора для оптимальной обработки гауссовой смеси сигнала и шума, при регистрации только скалярного поля давления получаем в итоге простую связь:

$$Q_{p,\bar{\mathbf{v}}}(\omega) = L^2 Q_p(\omega), \quad (49)$$

где L – по-прежнему размерность входного вектора наблюдений (p, v_1, v_2, v_3). Результат (49) в рамках гауссовых статистик, очевидно, является потенциальной (верхней) оценкой отношения сигнал/шум для оптимальной в смысле отношения правдоподобия обработки при В-Ф-приеме акустических полей $p, \bar{\mathbf{v}}$, связанных соотношением (1).

При анализе параметра сигнал/шум в широкой полосе частот, определяемого как

$$Q = \frac{E_S}{E_N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E_S(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} E_N(\omega) d\omega}, \quad (50)$$

где E_S , E_N – спектры мощности сигнала и шума, использование развитой выше процедуры приводит к следующему результату:

$$Q_{p, \bar{v}} = L^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [1 + L^2 Q_p(\omega)]^{-1} Q_p^2(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} [1 + L^2 Q_p(\omega)]^{-1} Q_p(\omega) d\omega}, \quad (51)$$

который, очевидно, совпадает с (49) при слабой зависимости $Q_p(\omega)$ от частоты.

Переход к индикаторному отношению сигнал/шум на выходе квадратора-осреднителя проводится стандартными методами, и результат имеет вид:

$$Q_{p, \bar{v}}^U = \frac{1}{2\sqrt{2}} Q_{p, \bar{v}} [\Delta FT]^{1/2} \cong \frac{1}{2\sqrt{2}} L^2 Q_p [\Delta FT]^{1/2} \quad (52)$$

(ΔF – входная полоса, T – время осреднения); параметр $Q_{p, \bar{v}}$ определен в (49) и (51).

Сопоставляя результаты относительных эффектов роста параметра сигнал/шум для алгоритма регистрации потока (35) и алгоритма отношения правдоподобия при В-Ф-регистрации полей p , \bar{v} (см. (49)), приходим к результату вида:

$$\frac{c}{\langle U_{грлN} \rangle} \leq \eta_{p, \bar{v}} \leq L^2 \quad (53)$$

для гауссовых статистических характеристик В-Ф-полей.

Поскольку результат (35) относится к подоптимальному алгоритму (27), а (49) – к оптимальному алгоритму (37), то становится ясно, что возникает определенная перспектива в исследовании алго-

ритмов регистрации потоков энергии на базе анализа негауссовых структур для отношения правдоподобия и для алгоритма потока. Базовым началом такого исследования могут служить полученные выше (см. (22)) выражения для ХФ потока энергии как полевой характеристики с негауссовой структурой даже при гауссовых статистиках В-Ф-поля, образованного полями давления p и колебательной скорости \bar{v} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордиенко В.А., Ильичев В.И., Захаров Л.Н. Векторно-фазовые методы в акустике. М.: Наука, 1989. 223 с.
2. Ebeling K.J. Statistica properties of random wave fields // Physical Acoustics – Principles and Methods. V. XXII. Acad. Press, 1984. P. 233–310.
3. Воробьев С.Д., Сизов В.И. Векторно-фазовая структура и векторно-фазовый метод описания и анализа случайных акустических полей // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 654–659.
4. Eckart C. Theory of noise in continual medium // JASA. 1953. V. 25. P. 195–199.
5. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
6. Клячкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
7. Клячкин В.И. К теории нелинейных преобразований случайных процессов // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 1. С. 134–147.
8. Клячкин В.И. О вероятностной структуре поля давления звука, порожденного турбулентностью // Известия АН СССР. Мех. жидкости и газы. 1979. № 1. С. 131–145.
9. Новиков Е.Д. Решение некоторых уравнений с вариационными производными // Успехи математических наук. 1961. Т. 16. № 2. С. 135–141.

Vector-Phase Characteristics of Acoustic Fields: Statistical Analysis and Measurement Algorithms

V. I. Klyachkin

Statistical characteristics of acoustic field that are based on the data of simultaneous measurements of pressure and acoustic velocity vector are investigated. Conditions of the formation of vector-phase characteristics of acoustic field are formulated in relation to the dispersion properties of the medium. Cross-correlation functions of the components of the vector field are presented. Expressions for the characteristic functionals of vector-phase relationships in acoustic fields and, in particular, for the acoustic energy flux are derived with the use of functional methods. Algorithms of space-time processing of the energy flux vector and the optimum measurement algorithm for a Gaussian vector-phase field are considered. The signal-to-noise ratio is determined as the quality index of vector reception algorithms, and its relation to the corresponding parameter of scalar pressure field measurements is revealed. Indices of relative efficiency of vector algorithms are determined depending on the dispersion characteristics of the medium (the flux algorithm) and the dimension of the input vector of observations (the optimum algorithm).