АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 6, с. 741–748

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ НА КОМПАКТНЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ МОДЕЛЬЮ УФЛЯНДА–МИНДЛИНА

© 2007 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет 198504 Петродворец, ул. Ульяновская 1/1

E-mail: iva—@list.ru

Поступила в редакцию 06.04.06 г.

Рассматривается трехмерная задача рассеяния акустической волны на компактном препятствии общего вида в пластине, описываемой моделью Уфлянда–Миндлина. Устанавливается формула, выражающая рассеянное поле через аналитическое продолжение диаграммы направленности, а также формулы связи каналов рассеяния, позволяющие вычислять амплитуды поверхностных волн через вычеты диаграммы направленности. Для препятствий, не излучающих энергии, устанавливается единственность решения задачи рассеяния в отсутствие поглощения. Приводится пример локализованной сдвиговой волны.

PACS: 43.20. Tb, 43.40.Dx, 43.40. Fz

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ свойств рассеянных полей позволяет наиболее полно понять акустические свойства открытых систем. В [1] и др. работах А.Г. Кюркчана, В.Ф. Апельцина и их соавторов, где исследовались задачи рассеяния на компактных препятствиях, получены формулы разложения рассеянных полей по плоским волнам и показано, что плотностью в этих разложениях выступает аналитическое продолжение диаграммы рассеянного поля. Задачи рассеяния в присутствии пластины имеют дело с полями более сложной структуры. Вдали от препятствия рассеянное поле представляет собой совокупность волн разной природы: пространственных и поверхностных. В задачах, имеющих трансляционную симметрию и сводящихся к двумерным свойства дальних полей, исследовались в [2], [3], где предполагалось, что пластина совершает лишь изгибные колебания, описываемые моделью Жермен–Лагранжа [4]. В этих работах было установлено, что и в присутствии бесконечной пластины рассеянное поле можно представить в виде разложения по плоским волнам. Однако вблизи контура интегрирования в комплексной плоскости угла появляются дополнительные полюсы, вычеты в которых соответствуют поверхностным волнам. В результате возникает формула связи каналов рассеяния, согласно которой амплитуды рассеянных поверхностных волн равны вычетам в соответствующих полюсах от аналитического продолжения диаграммы направленности расходящейся волны. В [5] эти результаты обобщены на модель пластины Уфлянда–Миндлина. Однако в этой работе накладывалось ограничение на частоту, гарантирующее отсутствие второй распространяющейся моды. В [6] результаты [2], [3] распространены на трехмерные задачи рассеяния для пластины Жермен–Лагранжа.

В данной работе рассматриваются трехмерные задачи рассеяния на компактных препятствиях в присутствии пластины, описываемой моделью Уфлянда–Миндлина, причем ограничение работы [5] снимается.

2. МОДЕЛЬ УФЛЯНДА–МИНДЛИНА

2.1. Условия на пластине

При исследовании совместных колебаний акустической среды и находящейся с ней в контакте тонкой упругой пластины в ряде случаев можно ограничиться учетом лишь изгибных деформаций пластины и использовать модель Жермен–Лагранжа для их описания. В диапазоне более высоких частот необходимо вводить поправки.

В модели Уфлянда–Миндлина, которая помимо изгибных учитывает также сдвиговые деформации, состояние пластины описывается тремя скалярными функциями: смещением срединной поверхности $w(x, y)$ и двумя углами $\boldsymbol{\xi}(x, y) = (\xi_x(x, y), \xi_y(x, y))$, характеризующими поворот. Эти функции подчиняются следующей системе динамических уравнений

$$\frac{D}{2}((1-\sigma)\Delta\boldsymbol{\xi}+(1+\sigma)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{\xi})-\\-\kappa^2Gh(\boldsymbol{\xi}+\nabla w)+\frac{\varrho h^3\omega^2}{12}\boldsymbol{\xi}=0, \tag{1}$$

$$\kappa^2Gh(\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}+\Delta w)+\omega^2\varrho hw=P|_{z=0}. \tag{2}$$

Здесь $D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ – цилиндрическая жесткость, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, h – толщина пластины, ϱ – ее плотность, ω – частота и κ^2 – поправочный коэффициент. Акустическое давление $P(x, y, z)$ подчиняется уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)P(x,y,z)=0$$

и играет роль внешней нагрузки в уравнении (2). Оно связано со смещением пластины w условием неразрывности. Если пластина находится в одностороннем контакте с акустической средой, занимающей полупространство $\{z>0\}$,

$$w(x,y)=\frac{1}{\varrho_0\omega^2}\frac{\partial P(x,y,0)}{\partial z}, \tag{3}$$

где ϱ_0 – плотность акустической среды.

Уравнениям (1), (2) теории Уфлянда–Миндлина отвечают следующие выражения для перерезывающей силы F и изгибающих моментов $\mathbf{M}$, с которыми деформированная пластина действует на тело, прикрепленное к ней вдоль линии l

$$F=-\kappa^2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial\nu}+\xi^\nu\right), \tag{4}$$

$$\mathbf{M}=-\frac{D}{2}\left((1-\sigma)\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial\nu}+(1+\sigma)\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\mathbf{e}^\nu\right). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{e}^\nu$ – единичный вектор, направленный вдоль нормали ν к линии l.

2.2. Формулы Грина

Для дальнейшего анализа задач рассеяния нам понадобятся формулы типа формул Грина. Отметим, что в случае пластины Жермен–Лагранжа вывод аналогичных формул приведен в [7].

Пусть $(P_1, w_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ и $(P_2, w_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ удовлетворяют в некоторой конечной области Ω на пластине уравнениям (1), (2), (3). Рассмотрим уравнение (1) для первого решения, домножим его скалярным образом на $\boldsymbol{\xi}_2$ и проинтегрируем по области Ω. Теперь обратимся к уравнению (2), написанному относительно второго решения. Домножим это уравнение на w_1 и также проинтегрируем по области Ω. Вычтем это тождество из первого и проинтегрируем по частям. Учитывая выражения (4) и (5) для силы и момента, получим

$$-\frac{D}{2}(1-\sigma)\iint_\Omega((\nabla\xi_1^x)(\nabla\xi_2^x)+(\nabla\xi_1^y)(\nabla\xi_2^y))d\Omega-\\-\frac{D}{2}(1+\sigma)\iint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}_1\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}_2d\Omega+\\+\left(\frac{\varrho h^3\omega^2}{12}-\kappa^2Gh\right)\iint_\Omega\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2d\Omega+\\+\kappa^2Gh\iint_\Omega\nabla w_2\cdot\nabla w_1d\Omega-\omega^2\varrho h\iint_\Omega w_2w_1d\Omega=\\=-\iint_\Omega P_2|_{z=0}w_1d\Omega+\int_{\partial\Omega}\mathbf{M}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2ds-\int_{\partial\Omega}F_2w_1ds. \tag{6}$$

Меняя индексы в тождестве (6) и вычитая одно равенство из другого, получим формулу Грина

$$\iint_\Omega(P_2|_{z=0}w_1-P_1|_{z=0}w_2)d\Omega=\\=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{M}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2+F_1w_2-\mathbf{M}_2\cdot\boldsymbol{\xi}_1-F_2w_1)ds. \tag{7}$$

Полагая в (6) $P_2=\bar{P}_1$, $w_2=\bar{w}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2=\bar{\boldsymbol{\xi}}_1$ и выделяя мнимую часть, получим

$$\operatorname{Im}\iint_\Omega P|_{z=0}wd\Omega=\operatorname{Im}\int_{\partial\Omega}(\mathbf{M}\cdot\bar{\boldsymbol{\xi}}+F\bar{w})ds. \tag{8}$$

2.3. Обобщенное импедансное условие и поверхностные волны

Из системы (1), (2), (3) можно исключить функции $\boldsymbol{\xi}(x, y)$ и $w(x, y)$, что позволяет записать краевое условие на пластине в форме обобщенного импедансного условия. Для этого вычислим дивергенцию уравнения (1) и при помощи уравнения (2) исключим функцию $\boldsymbol{\xi}$, имеем

$$(\Delta^2+F_1\Delta-k_0^4(1-\varepsilon))\frac{\partial P(x,y,0)}{\partial z}-\\-(F_2\Delta-N(1-\varepsilon))P(x,y,0)=0. \tag{9}$$

Здесь аналогично [8], [5] введены обозначения

$$F_1 = \left(\frac{1}{\kappa^2 G} + \frac{h^3}{12D}\right)\omega^2, \quad F_2 = \frac{\varrho_0\omega^2}{\kappa^2 Gh},$$

$$\varepsilon = \frac{\varrho h^2\omega^2}{12\kappa^2 G}, \quad k_0^4 = \frac{\varrho h\omega^2}{D}, \quad N = \frac{\varrho_0\omega^2}{D}.$$

Отметим, что волновое число k_0 и параметр N совпадают с волновым числом и соответствующим параметром в модели Жермен–Лагранжа. Таким образом, полагая $F_1 = F_2 = \varepsilon = 0$, мы получаем краевое условие, отвечающее модели Жермен–Лагранжа. В системе (1), (2), (3) этому отвечает предел при $\kappa^2 Dh \longrightarrow +\infty$ и $\varrho h^3\omega^2 \longrightarrow 0$.

Задача отражения плоской волны

$$P^{(i)} = A\exp(ikx\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 + iky\cos\vartheta_0\sin\varphi_0 - ikz\sin\vartheta_0)$$

от пластины, описываемой условием (9), имеет простое решение

$$P = P^{(i)} + AR(\vartheta_0)\exp(ikx\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 + iky\cos\vartheta_0\sin\varphi_0 + ikz\sin\vartheta_0), \tag{10}$$

где коэффициент отражения имеет вид

$$R(\vartheta) = \frac{L(\vartheta) - 2L_1(\vartheta)}{L(\vartheta)},$$
$$L(\vartheta) = ik\sin\vartheta(k^4\cos^4\vartheta - F_1k^2\cos^2\vartheta - k_0^4(1-\varepsilon)) + L_1(\vartheta), \tag{11}$$
$$L_1(\vartheta) = N(1-\varepsilon) + F_2k^2\cos^2\vartheta.$$

Краевое условие (9) допускает существование поверхностных волн

$$P = \exp(i\mu x - \sqrt{\mu^2 - k^2}z).$$

Волновое число μ найдем из дисперсионного уравнения

$$l(\mu^2) \equiv (\mu^4 - F_1\mu^2 - k_0^4(1-\varepsilon))\sqrt{\mu^2 - k^2} - (F_2\mu^2 + N(1-\varepsilon)) = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала уравнение для мод в изолированной пластине

$$\mu^4 - F_1\mu^2 - k_0^4(1-\varepsilon) = 0.$$

На комплексной плоскости параметра μ располагаются 2 пары корней этого уравнения $\mu = \pm\mu_0$, $\mu = \pm\mu_1$, где

$$\mu_0^2 = \frac{F_1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}F_1^2 + k_0^4(1-\varepsilon)},$$
$$\mu_1^2 = \frac{F_1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}F_1^2 + k_0^4(1-\varepsilon)}.$$

Корни μ_0 и $-\mu_0$ всегда, то есть при любом соотношении параметров пластины, вещественны. Корни μ_1 и $-\mu_1$ комплексны, если $\varepsilon < 1$, и вещественны, если $\varepsilon > 1$. То есть, при $\varepsilon < 1$ имеется одна распространяющаяся мода, а при $\varepsilon > 1$ появляется вторая.

Введем величину $\mu_2 = \sqrt{N(\varepsilon - 1)/F_2}$. Можно показать, что при $\varepsilon < 1$ имеют место неравенства $\mu_2^2 < \mu_1^2 < 0 < 0 < \mu_0^2$, а при $\varepsilon > 1$ выполняются неравенства $0 < \mu_1^2 < \mu_2^2 < \mu_0^2$. Анализ дисперсионного уравнения (12) с помощью правила знаков Декарта [9] показывает, что при любых значениях параметров задачи на полубесконечном интервале $\mu > \mu_0$ существует одно решение κ_1. При $\varepsilon > 1$ и $k \le \mu_2$ на интервале $[\max(\mu_1, k), \mu_2]$ появляется второе решение κ_2. Других положительных решений дисперсионного уравнения (12) не существует.

3. ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Рассмотрим поле точечного источника, располагающегося в некоторой точке $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ в акустическом полупространстве, ограниченном бесконечной пластиной Уфлянда–Миндлина. Это поле является решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)G(x, y, z; \mathbf{r}_0) = \\ = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), \quad z > 0, \\ (\Delta^2 + F_1\Delta - k_0^4(1-\varepsilon))\dfrac{\partial G(x, y, 0; \mathbf{r}_0)}{\partial z} - \\ -(F_2\Delta - N(1-\varepsilon))G(x, y, 0; \mathbf{r}_0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Решение будем понимать в смысле принципа предельного поглощения.

Решение задачи (13) может быть получено при помощи двукратного преобразования Фурье по координатам x и y

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda(x - x_0) + i\mu(y - y_0)) \times (\exp(-\gamma|z - z_0|) + r(\lambda^2 + \mu^2)\exp(-\gamma(z + z_0)))\frac{d\lambda d\mu}{\gamma}. \tag{14}$$

Здесь $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - k^2}$, а $r(\lambda^2 + \mu^2)$ – Фурье образ коэффициента отражения (11)

$$r(\tau^2) = \frac{l(\tau^2) + 2l_1(\tau^2)}{l(\tau^2)},$$
$$l_1(\tau^2) = N(1-\varepsilon) + F_2\tau^2.$$

3.1. Асимптотика на бесконечности

Интегральное представление (14) позволяет получить асимптотику функции Грина на больших расстояниях от источника, то есть при $|\mathbf{r}| \longrightarrow +\infty$. Применим двумерный метод перевала [10]. Вклад в асимптотику дают точка перевала $\lambda = k\cos\vartheta\cos\varphi$, $\mu = k\cos\vartheta\sin\varphi$ и возможно полюсы. Вклад точки перевала имеет вид расходящейся сферической волны. В сферических координатах (r, φ, ϑ), (r – радиус, φ – долгота, ϑ – широта) имеем

$$G^{\mathrm{sph}} \sim \frac{2\pi}{kr}e^{ikr - i\pi/2}\Psi_G(\varphi, \vartheta; \mathbf{r}_0), \tag{15}$$

где

$$\Psi_G(\varphi, \vartheta; \mathbf{r}_0) = \frac{ik}{8\pi^2}e^{-ik\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\times$$
$$\times\{e^{-ikz_0\sin\vartheta} + R(\vartheta)e^{ikz_0\sin\vartheta}\}. \tag{16}$$

Вклады также могут давать вычеты в полюсах $\tau = \kappa_1$ и $\tau = \kappa_2$. Если точка наблюдения удаляется от пластины, то вычеты в этих полюсах оказываются экспоненциально малы. Однако, в том случае, если точка наблюдения стремится к бесконечности вдоль пластины, то есть $z = \mathrm{const}$, вычеты дают круговые поверхностные волны (ρ – радиус в цилиндрической системе координат)

$$G^{\mathrm{surf}_j} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_j\rho}}e^{i\kappa_j\rho - i\pi/4}\psi_G(\varphi, j; \mathbf{r}_0)e^{-\sqrt{\kappa_j^2-k^2}z}. \tag{17}$$

Диаграммы поверхностных волн (17) выражаются формулами

$$\psi_G(\varphi, j; \mathbf{r}_0) = \frac{i}{2Q_j\kappa_j}e^{-i\kappa_j\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0) - \sqrt{\kappa_j^2-k^2}z_0}, \tag{18}$$

$$Q_j = \frac{5\kappa_j^4 - (4k^2 + 3F_1)\kappa_j^2 + 2F_1k^2 - k_0^4(1-\varepsilon) - 2F_2\sqrt{\kappa_j^2 - k^2}}{N(1-\varepsilon) + F_2\kappa_j^2}. \tag{19}$$

Отметим, что полюсы $\tau = \kappa_1$ и $\tau = \kappa_2$ не зависят от точки наблюдения. Точка перевала $\tau = k\cos\vartheta$ ни при каких условиях не приближается к полюсам. Диаграмма Ψ_G является мероморфной функцией угла ϑ. Анализируя формулы (16) и (17), несложно установить, что

$$\psi_G(\varphi, j; \mathbf{r}_0) = -2\pi i\frac{\kappa_j}{k}\operatorname*{Res}_{\vartheta = \vartheta_j^*}\Psi_G(\varphi, \vartheta; \mathbf{r}_0),$$

где

$$\theta_j^* = \arccos\left(\frac{\kappa_j}{k}\right) = i\ln\left(\frac{\kappa_j}{k} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_j}{k}\right)^2 - 1}\right).$$

Вернемся к представлению (14) для функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Произведем замену переменных интегрирования сначала по формулам $\lambda = \tau\cos\phi$, $\mu = \tau\sin\phi$, а затем перейдем от τ к θ по формуле $\tau = k\cos\theta$. При этом $\sqrt{\tau^2 - k^2} = -ik\sin\theta$. В результате получим

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik}{8\pi^2}\int_З \cos\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\times$$
$$\times\exp(ik(x-x_0)\cos\theta\cos\phi + ik(y-y_0)\cos\theta\sin\phi)\times$$
$$\times(\exp(ik|z-z_0|\sin\theta) + R(\theta)\exp(ik(z+z_0)\sin\theta)).$$

Здесь интегрирование по θ ведется по половине модифицированного контура Зоммерфельда (см. рис. 1) от $+i\infty$ до $\pi/2$, обходя полюсы в точках θ_1^* и θ_2^* слева.

Если точка наблюдения лежит выше точки источника, то есть $z > z_0$, знак абсолютной величины можно убрать, после чего отделим в показателе экспоненты слагаемые с координатами точки наблюдения от слагаемых, содержащих координаты точки источника. Учитывая также выражение (16) для диаграммы $\Psi_G(\vartheta, \varphi; \mathbf{r}_0)$ сферической волны, получим

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_З \cos\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\times$$
$$\times\exp(ik(x\cos\phi + y\sin\phi)\cos\theta + ikz\sin\theta)\Psi_G(\theta, \phi; \mathbf{r}_0). \tag{20}$$

Формула (20) дает разложение функции Грина по плоским волнам, уходящим на бесконечность по действительным и по комплексным направлениям. Амплитудное распределение в этом интеграле совпадает с аналитическим продолжением диаграммы расходящейся сферической волны. Отметим, что при применении метода перевала к интегралу (20) для вычисления асимптотики дальнего поля легко получить выражение (15).

4. ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

4.1. Условия излучения

Пусть в ограниченной области полупространства находится некоторое препятствие Ω, вызывающее рассеяние. Тогда к полю (10), которое мы будем далее называть геометрической частью, добавится некоторое рассеянное поле $P^{(s)}$. Рассеянное поле $P^{(s)}$ представляет собой волну или совокупность волн, убегающих от препятствия на бесконечность. Для математически корректной постановки задачи рассеяния необходимо помимо условий на препятствии задать условия на бесконечности, которые бы отбраковывали волны, приходящие от бесконечно далеких источников. Эти условия, называемые условиями излучения, мы зададим в виде асимптотик функций $P^{(s)}$ и соответствующих этой части акустического поля составляющих смещений $w^{(s)}$ и углов поворота $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$.

От рассеянного поля будем требовать такого же поведения на бесконечности как у функции Грина. То есть будем требовать, чтобы вдали от препятствия рассеянное поле $P^{(s)}$ можно было разделить на две составляющие P^{sph} и P^{surf}. Составляющая P^{sph} представляет собой расходящуюся сферическую волну

$$P^{\mathrm{sph}} \sim \frac{2\pi}{kr}e^{ikr - i\pi/2}\Psi(\varphi, \vartheta), \quad r \longrightarrow +\infty. \tag{21}$$

Составляющая P^{surf} является поверхностным волновым процессом, экспоненциально затухающим при удалении от пластины. В зависимости от числа положительных решений дисперсионного уравнения (12) поверхностный волновой процесс представляет собой одну или две расходящиеся круговые волны P_1^{surf}, P_2^{surf}, каждая из которых имеет асимптотику вида

$$P_j^{\mathrm{surf}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_j\rho}}e^{i\kappa_j\rho - i\pi/4}\psi_j(\varphi)e^{-\sqrt{\kappa_j^2 - k^2}z}, \quad \rho \longrightarrow +\infty. \tag{22}$$

Поверхностные волны давления P_j^{surf} сопровождаются деформациями пластины. Смещения w_j^{surf} могут быть найдены из условия неразрывности (3). Для нахождения углов поворота $\boldsymbol{\xi}_j^{\mathrm{surf}}$ надо

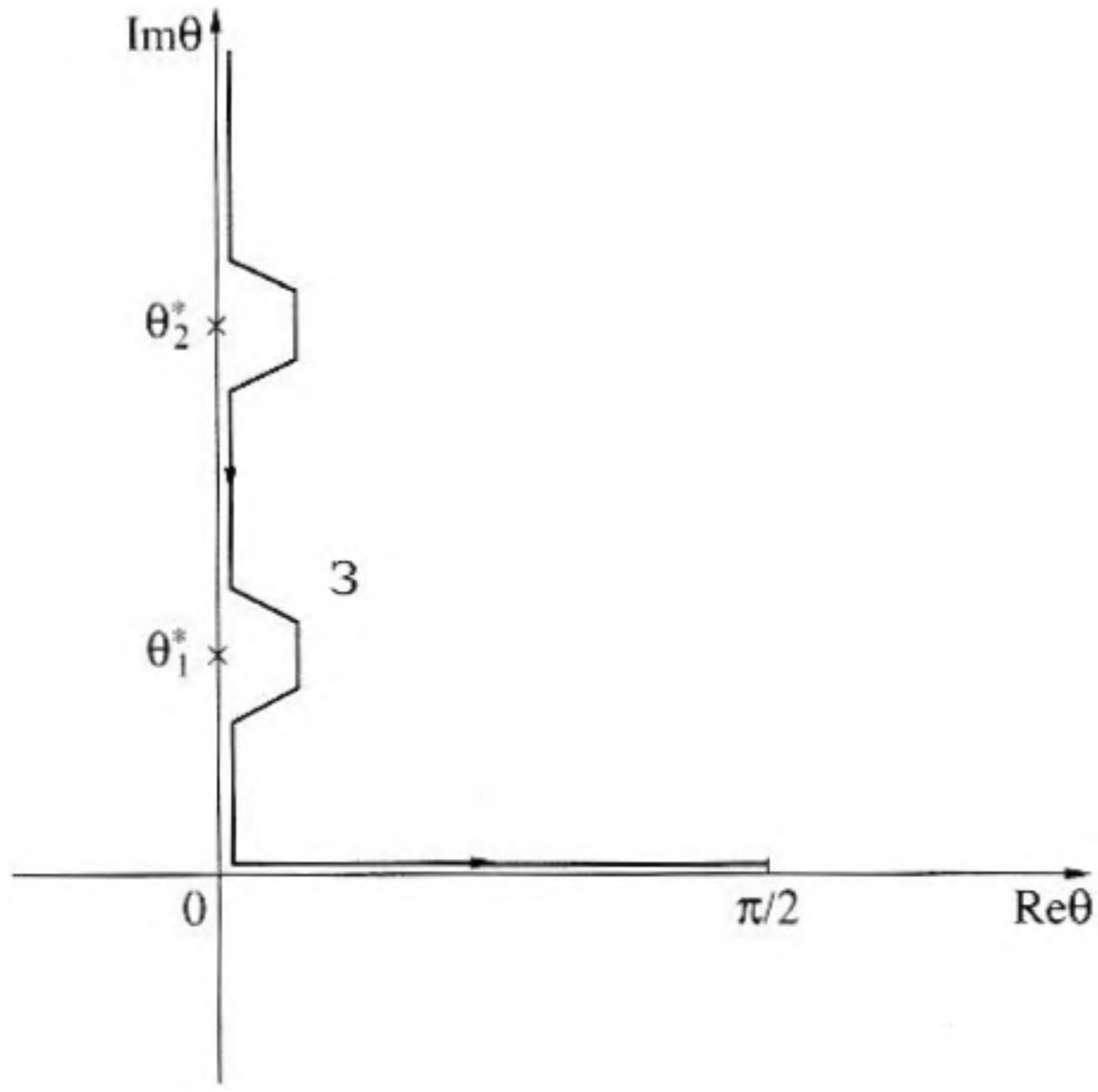

Рис. 1. Контур интегрирования в интеграле разложения по плоским волнам.

решить систему уравнений (1), (2). Асимптотики деформаций пластины имеют вид

$$\begin{gathered} w_j^{\mathrm{surf}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_j\rho}}e^{i\kappa_j\rho - i\pi/4}\alpha_j(\varphi), \\ \boldsymbol{\xi}_j^{\mathrm{surf}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_j\rho}}e^{i\kappa_j\rho - i\pi/4}\boldsymbol{\beta}_j(\varphi), \quad \rho \longrightarrow +\infty, \end{gathered} \tag{23}$$

где амплитуды α_j и $\boldsymbol{\beta}_j$ выражаются через ψ_j.

Итак, в качестве условий излучения в задаче рассеяния на компактном препятствии в присутствии пластины Уфлянда–Миндлина потребуем, чтобы рассеянное поле в дальней зоне представляло собой сумму полей P^{sph}, P_1^{surf} и возможно P_2^{surf}, имеющих асимптотики вида (21) и (22) соответственно. Для деформаций пластины потребуем выполнения асимптотик (23). Амплитуды $\Psi(\varphi, \vartheta)$, $\psi_1(\varphi)$, $\psi_2(\varphi)$, $\alpha_1(\varphi)$, $\boldsymbol{\beta}_1(\varphi)$, $\alpha_2(\varphi)$ и $\boldsymbol{\beta}_2(\varphi)$ в этих асимптотиках должны быть ограниченными функциями своих аргументов, а асимптотики должны допускать дифференцирование: асимптотики акустических полей – однократное по r, асимптотики смещений – однократное по ρ, а асимптотики углов – однократное по ρ и применение оператора дивергенции.

4.2. Интегральное представление

Пусть гладкая поверхность Σ, опирающаяся на пластину по гладкому контуру Γ, окружает препятствие, вызывающее рассеяние. Рассмотрим область $\mathscr{V}$, ограниченную поверхностью Σ, пластиной и полусферой S^R большого радиуса R. Применим в этой области формулу Грина для рассеянного поля $P^{(s)}$ и функции Грина G. При этом будем считать, что точка источника расположена в области $\mathcal{V}$. Имеем

$$-P^{(s)}(\mathbf{r}_0) = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} \left(P^{(s)}(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} - \frac{\partial P^{(s)}(\mathbf{r})}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) dS(\mathbf{r}).$$

Здесь n – нормаль к границе области $\mathcal{V}$.

Поверхность $\partial\mathcal{V}$ состоит из трех частей: полусферы большого радиуса S^R, части пластины П, заключенной между контуром Г и окружностью C^R, и поверхности Σ. В интеграле по пластине воспользуемся условием неразрывности и тождеством (7)

$$-P^{(s)}(\mathbf{r}_0) = \iint\limits_{S^R} \left(P^{(s)}(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} - \frac{\partial P^{(s)}(\mathbf{r})}{\partial r} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) dS(\mathbf{r}) +$$
$$+ \iint\limits_{\Sigma} \left(P^{(s)}(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} - \frac{\partial P^{(s)}(\mathbf{r})}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) dS(\mathbf{r}) +$$
$$+ \rho_0\omega^2 \int\limits_{\Gamma\cup C^R} (w^{(s)}(x, y) F_G(x, y; \mathbf{r}_0) - F^{(s)}(x, y) w_G(x, y; \mathbf{r}_0) +$$
$$+ \boldsymbol{\xi}^{(s)}(x, y) \cdot \mathbf{M}_G(x, y; \mathbf{r}_0) - \mathbf{M}^{(s)}(x, y) \cdot \boldsymbol{\xi}_G(x, y; \mathbf{r}_0)) ds$$

(Величины F_G, $\mathbf{M}_G$, $\boldsymbol{\xi}_G$ и w_G обозначают силу, моменты, углы и смещения, отвечающие функции Грина).

Теперь устремим радиус R большой полусферы к бесконечности и воспользуемся асимптотикой функции Грина и асимптотикой рассеянного поля. С учетом характера убывания полей на бесконечности несложно заметить, что в пределе исчезают вклады от поправочных членов асимптотических разложений, а при дифференцировании старших членов можно дифференцировать только экспоненциальные множители по радиальным переменным. Такое дифференцирование сводится к умножению на ik в интеграле по полусфере S^R и на $i\kappa_j$ в интеграле по окружности C^R. В результате интегралы по полусфере S^R большого радиуса и по окружности C^R в пределе исчезают. Таким образом, рассеянное поле может быть восстановлено в произвольной точке $\mathbf{r}_0$ по его значениям на введенной вспомогательной поверхности Σ по формуле типа формулы Кирхгофа

$$-P^{(s)}(\mathbf{r}_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left(P^{(s)}(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} - \frac{\partial P^{(s)}(\mathbf{r})}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) dS(\mathbf{r}) +$$
$$+ \rho_0\omega^2 \int\limits_{\Gamma} (w^{(s)}(x, y) F_G(x, y; \mathbf{r}_0) - F^{(s)}(x, y) w_G(x, y; \mathbf{r}_0) + \tag{24}$$
$$+ \boldsymbol{\xi}^{(s)}(x, y) \cdot \mathbf{M}_G(x, y; \mathbf{r}_0) - \mathbf{M}^{(s)}(x, y) \cdot \boldsymbol{\xi}_G(x, y; \mathbf{r}_0)) ds.$$

В правой части формулы (24) рассеянное поле можно заменить полным. Действительно, вклад геометрической части поля (10) равен нулю, в чем легко убедиться, если провести аналогичные выкладки в области, ограниченной пластиной и поверхностью Σ.

4.3. Разложение по плоским волнам

Будем рассматривать правую часть формулы (24) как результат применения оператора к функции Грина (для удобства воспользуемся симметрией функции Грина и поменяем ролями $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$)

$$-P^{(s)}(\mathbf{r}) = \Lambda G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$$

Оператор Λ содержит интегрирование по $\mathbf{r}_0$ по ограниченной поверхности Σ и конечному контуру Λ. Подинтегральные выражения являются ограниченными функциями, ввиду чего интегралы сходятся равномерно по параметру $\mathbf{r}$. Ввиду этого при вычислении асимптотики рассеянного поля при $|\mathbf{r}_0| \longrightarrow +\infty$ можно произвести замену функции Грина ее асимптотикой под знаком интеграла. В результате получаем асимптотику (21) с диаграммой, выражающейся формулой

$$\Psi(\vartheta, \varphi) = \Lambda \Psi_G(\vartheta, \varphi; \mathbf{r}_0).$$

Можно также заменить функцию Грина в формуле (24) ее разложением по плоским волнам (20), а затем поменять порядок интегрирования. В результате представление (20) унаследуется рассеянным полем

$$P^{(s)}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathcal{J}} \cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \times \tag{25}$$
$$\times \exp(ikx\cos\theta\cos\phi + iky\cos\theta\sin\phi + ikz\sin\theta)\Psi(\theta, \phi).$$

Отметим, что поскольку поверхность Σ выбиралась произвольной охватывающей препятствие, формула (25) будет справедлива при всех $z > z^*$, где z^* – максимально удаленная от пластины точка препятствия. В частности, в задаче дифракции на наборе отверстий формула (25) справедлива при любых $z > 0$.

Аналогичным образом переносится на рассеянное поле и формула связи каналов

$$\psi_j = -2\pi i \frac{\kappa_j}{k} \operatorname*{Res}_{\vartheta = \vartheta_j^*} \Psi. \tag{26}$$

Эта формула устанавливает связь каналов рассеяния и позволяет вычислять амплитуды поверхностных волн через вычеты аналитического продолжения диаграммы сферической волны. Аналогичная формула для случая пластины Жермен–Лагранжа установлена в [6].

5. БАЛАНС ЭНЕРГИИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

5.1. Оптическая теорема

При выводе формул (25) и (26) не были задействованы условия на препятствии, вызывающем рассеяние. Поэтому формулы остаются справедливы и для решений неправильно поставленных задач (например подобных рассмотренной в [8]), а также для задач излучения. Мы лишь предполагали, что решение существует, и что препятствие (или излучатель) может быть окружено конечной поверхностью. В этом параграфе мы сформулируем критерий корректной постановки краевых условий на препятствии в задаче рассеяния. Для этого получим формулировку баланса энергии (см. [11], [5]). В области $\mathcal{V}$ применим формулу Грина к полному полю P и $\bar{P}$ и отделим мнимую часть. Затем продеформируем поверхность Σ в поверхность рассеивателя $\partial\Omega$ и перейдем к пределу $R \longrightarrow +\infty$. Выкладки с использованием тождества (8) повторяют приведенные при выводе формулы (24). Отличие состоит в том, что теперь вклад интеграла по полусфере большого радиуса и интеграла по окружности не исчезает. В результате получим следующее тождество

$$E = E_\Omega + E^{(s)}, \tag{27}$$

где E – поток энергии, взятый у отраженной волны, E_Ω – поток энергии, поглощаемый препятствием, $E^{(s)}$ – поток энергии излучения, который уносится рассеянным полем. Справедливы формулы

$$E = -\frac{4\pi^2}{\rho_0\omega k}\mathrm{Re}(AR(\vartheta_0)\overline{\Psi(\vartheta_0, 0)}),$$

$$E_\Omega = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\rho_0\omega}\int\int_{\partial\Omega} P\frac{\partial\bar{P}}{\partial n}dS + \frac{\omega}{2}\int_{\partial\Omega\cap\{z=0\}}(F\bar{w} + \mathbf{M}\cdot\bar{\boldsymbol{\xi}})ds\right),$$

$$E^{(s)} = \frac{1}{2\rho_0\omega}\left\{\frac{4\pi^2}{k}\int\int|\Psi(\vartheta, \varphi)|^2\cos\vartheta d\vartheta d\varphi + \sum_j Q_j\int|\psi_j(\varphi)|^2 d\varphi\right\}.$$

Здесь n – нормаль к поверхности препятствия, суммирование в последней формуле проводится по распространяющимся поверхностным волнам ($j = 1$ и если есть вторая волна $j = 2$), а величины Q_j приведены в (19)).

5.2. Единственность решения

Пусть условия на препятствии, вызывающем рассеяние, таковы, что $E_\Omega \geq 0$, то есть препятствие не излучает энергию. Это имеет место, например, при выполнении условий Дирихле или Неймана на $\partial\Omega$ и условий жесткой заделки $w = 0$, $\boldsymbol{\xi} = 0$ на контуре $\partial\Omega \cap \{z = 0\}$, вдоль которого тело прикреплено к пластине. Тогда тождество (27) позволяет доказать единственность решения P задачи рассеяния. Действительно, предположим противное, то есть пусть существуют два решения P_1 и P_2. Тогда их разность $P = P_1 - P_2$ является решением задачи без падающего поля, то есть с $A = 0$. Тождество (27) позволяет заключить, что поле P не уносит энергию на бесконечность ($E^{(s)} = 0$). Анализ величин Q_j показывает, что $Q_j > 0$. Тогда из $E^{(s)} = 0$ следует $\Psi(\vartheta, \varphi) = 0$ для действительных углов. Ввиду аналитичности $\Psi \equiv 0$ и по формуле (25) поле $P \equiv 0$ при $z > z^*$. В область $z \leq z^*$ поле P продолжается нулем как решение уравнения Гельмгольца. Таким образом, $P_1 = P_2$ и тем самым поле давления единственно.

Ввиду условий неразрывности единственно и поле смещений. Что же касается углов $\boldsymbol{\xi}$, то можно предложить конфигурацию препятствия, допускающую неединственность сдвиговых деформаций. Пусть, например, препятствие вырезает на пластине круговой контур радиуса ρ_0, на котором выполнены условия импедансного типа $F = Z_f w$, $\boldsymbol{M} = Z_m\boldsymbol{\xi}$. При специальном выборе импедансов возможно существование ненулевого решения однородной задачи. Будем искать его в виде $P = 0$, $w = 0$, $\boldsymbol{\xi} = \mathrm{rot}(u\mathbf{e}^z)$. Подставляя в (1) (2), получим уравнение для функции u

$$\frac{D}{2}(1-\sigma)\Delta u(x, y) + \left(\frac{\rho h^3\omega^2}{12} - \kappa^2 Gh\right)u(x, y) = 0.$$

При $\varrho_0 h^2\omega^2 < 12\kappa^2 G$ имеем экспоненциально убывающее решение, выражающееся через функцию Макдональда,

$$u = K_0(\kappa_3\rho), \quad \kappa_3 = \sqrt{\frac{2}{D(1-\sigma)}\left(\kappa^2 Gh - \frac{1}{12}\varrho h^3\omega^2\right)}.$$

Сила F, отвечающая этому решению, тождественно равна нулю, поэтому Z_f может быть любым, а моментный импеданс Z_m выражается формулой

$$Z_m = \frac{\mathbf{M}}{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{D}{2}(1-\sigma)\left(\kappa_3\frac{K_0(\kappa_3\rho_0)}{K_1(\kappa_3\rho_0)} + \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Важно, что этот импеданс вещественный. Поэтому $E_\Omega = 0$. Если условие $\varrho_0 h^2\omega^2 < 12\kappa^2 G$ не выполнена, сдвиговая волна оказывается убывающей как $O(1/\sqrt{\rho})$, а моментный импеданс становится чисто мнимым.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00132.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г.* Аналитические свойства волновых полей, М.: Изд. МГУ, 1990. 208 с.
2. *Andronov I.V., Belinskiy B.P., Dauer J.P.* The connection between the scattering diagram and the amplitudes of the surface waves for acoustic scattering by a baffled flexible plate // J. Sound Vibration. 1996. V. 195. № 4. P. 667–673.
3. *Andronov I.V., Belinskiy B.P.* Sommerfeld's formula and uniqueness for the boundary value contact problems // J. Physics A. Math. Gen. 1998. V. 31. P. L405–L411.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.* Теоретическая физика, т. 7 Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
5. *Andronov I.V., Belinskiy B.P.* Acoustic scattering on an elstic plate described by the Timoshenko model: Contact conditions and uniqueness of the solution // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. № 2. P. 673–682.
6. *Andronov I.V.* Generalized point models in structural mechanics. World Scientific, 2002. 262 c.
7. *Белинский Б.П., Коузов Д.П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 5. С. 710–718.
8. *Woolley B.L.* Acoustic scattering from a submerged plate. I. one reinforcing rib // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. P. 1642–1653.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
10. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
11. *Белинский Б.П., Коузов Д.П.* Оптическая теорема для системы пластина – жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 1. С. 13–19.

The Analytic Properties and Uniqueness of the Solutions to Problems of Scattering by Compact Obstacles in an Infinite Plate Described by the Uflyand–Mindlin Model

I. V. Andronov

St. Petersburg State University, ul. Ul'yanovskaya 1/1, Petrodvorets, 198504 Russia
e-mail: iva—@list.ru

Abstract—The three-dimensional problem of the sound wave scattering by a compact obstacle of a general form in an Uflyand–Mindlin plate is considered. A formula that expresses the scattering field in terms of the analytic continuation of the directivity pattern is derived, and the formulas that describe the coupling of the scattering channels and allow the calculation of the surface wave amplitudes from the residues of the directivity pattern are obtained. For the case of nonradiating obstacles, the uniqueness of the solution to the scattering problem in the absence of absorption isestablished. An example of a localized shear wave is considered.