

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3+534

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ, ВОЗБУЖДЕННОЕ ИЗГИБНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ
УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГЛЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

© 2007 г. В. А. Боровиков, А. Л. Попов, Д. А. Челюбеев

Институт проблем механики РАН
119526 Москва, пр-т Вернадского, 101, к. 1
E-mail: v_borovikov@sumail.ru; popov@ipmnet.ru
Поступила в редакцию 21.06.06 г.

Рассматривается звуковое поле, возбуждаемое изгибными колебаниями тонкой упругой пластины и возмущения этого поля, вызванные наличием однородного круглого включения с иными упругими свойствами. Ввиду резкого отличия плотности воздуха по сравнению с плотностью металла эту задачу можно с достаточной для практических приложений точностью решать в два этапа – сначала рассматривать колебания пластины в вакууме и затем искать звуковое поле, возбужденное найденным на первом этапе полем вертикальных смещений пластины. Основным результатом работы являются выражения для асимптотики в дальней зоне звукового поля, возбужденного каждой из компонент Фурье $F_m(r)\cos m\varphi$ изгибной волны, рассеянной на включении.

PACS: 46.70.Hg, 68.60.Bs

1. Формальное решение. Задача о возбуждении звукового поля изгибными колебаниями тонкой упругой пластины или оболочки рассматривалась во многих работах (см., например, [1–4]). Мы рассмотрим ниже задачу о звуковом поле, возбуждаемом в полупространстве $z > 0$ изгибными колебаниями расположенной в плоскости $z = 0$ тонкой упругой пластины и возмущении этого поля, вызванном наличием однородного круглого включения с иными упругими свойствами.

Потенциал $u(x, y, z)$ скоростей звукового поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad k = \omega/c \quad (1.1)$$

и отнормирован таким образом, чтобы давление p и скорость v выражались через u по формулам: $p = \omega^2 \rho_v u$; $v = -i\omega \text{grad} u$. Здесь c – скорость звука, ρ_v – плотность среды; зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ ниже опускается. Граничное условие для u при $z = 0$ имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = f(x, y), \quad (1.2)$$

где $f(x, y)$ – вертикальное смещение пластины.

Как было замечено выше, мы можем пренебречь обратным влиянием акустической среды на колебания пластины, т.е. полагать, что пластина находится в вакууме и ее вертикальное смещение $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению (см., например, [5])

$$\Delta^2 f - s^4 f = 0, \quad (1.3)$$

где $s = s_1$ вне включения, т.е. при $r > a$ (a – радиус включения, r, φ : $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ – полярные

координаты) и $s = s_2$ внутри включения, т.е. при $r < a$; $\Re s_{1,2} > 0, \Im s_{1,2} \geq 0$. Здесь s – волновое число изгибной волны тонкой упругой пластины, выражающееся через ее толщину h , плотность ρ , модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν по формуле (см., например, [5]):

$$s^4 = \frac{12(1-\nu^2)\rho\omega^2}{Eh^2}.$$

Задача о рассеянии на круглом включении радиуса a падающей плоской изгибной волны $f_{\text{inc}} = \exp(is_1 x)$ была рассмотрена в [6]. Использовался метод разделения переменных. Поле вертикальных смещений внутри включения представлялось в форме (r, φ – полярные координаты: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$):

$$f(x, y) = f_{\text{int}}(x, y); \quad (1.4)$$

$$f_{\text{int}}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m J_m(s_2 r) + b_m J_m(is_2 r)] \cos m\varphi,$$

где J_m – функции Бесселя. Вне включения вертикальное смещение представлялось в виде суммы невозмущенного поля $\exp(is_1 x)$ и рассеянного поля f_{sc} :

$$f(x, y) = f_{\text{inc}} + f_{\text{sc}} = e^{is_1 x} + \sum_{m=0}^{\infty} [c_m H_m^{(1)}(s_1 r) + d_m H_m^{(1)}(is_1 r)] \cos m\varphi, \quad (1.5)$$

где $H_m^{(1)}$ – функции Ганкеля первого рода.

Коэффициенты a_m, b_m, c_m, d_m определяются граничными условиями при $r = a$; эти условия и явные выражения для искомых коэффициентов выписаны в [6]. Ниже будет рассчитано возмущенное звуковое поле для предельного случая $f \equiv 0$ при $r < a$ и условия заземленного края $f = \partial f / \partial r = 0$ при $r = a$. В этом случае, очевидно, $a_m = b_m = 0$; выражения для c_m, d_m даны в (5.1).

Требуется найти обусловленное наличием включения возмущение звукового поля, возбужденного колебаниями пластины, и его асимптотику в дальней зоне.

Возмущенное колебаниями пластины звуковое поле u_{sc} может быть представлено в виде:

$$u_{sc} = \tilde{u} + u_- + u_+. \quad (1.6)$$

Здесь \tilde{u} – невозмущенное волновое поле, возбужденное колебаниями пластины при отсутствии включения, т.е. удовлетворяющее граничному условию (1.2) при $f(x, y) = f_{inc} = \exp(is_1 x)$, а $u_- + u_+$ – возмущение звукового поля, вызванное наличием включения. Очевидно,

$$\tilde{u} = \frac{\exp i[s_1 x + \sqrt{k^2 - s_1^2} z]}{i\sqrt{k^2 - s_1^2}}, \quad (1.7)$$

где при комплексном $\sqrt{k^2 - s_1^2}$ (т.е. при $s_1 > k$ или при комплексном s_1) выбирается ветвь радикала, для которой $\Im \sqrt{k^2 - s_1^2} > 0$, так что \tilde{u} экспоненциально затухает при удалении от плоскости $z = 0$. В случае вещественного $\sqrt{k^2 - s_1^2}$ положим $\sin \theta_0 = \sqrt{k^2 - s_1^2} / k$; тогда

$$\tilde{u} = \frac{\exp ik(x \cos \theta_0 + z \sin \theta_0)}{ik \sin \theta_0}, \quad (1.8)$$

откуда видно, что \tilde{u} – плоская волна, распространяющаяся под углом θ_0 к плоскости $z = 0$.

Функции u_-, u_+ удовлетворяют граничному условию (1.2) при, соответственно, $f = f_-, f_+$, где

$$f_-(x, y) = \begin{cases} f_{im}(x, y) - \exp(is_1 x) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a; \end{cases} \quad (1.9)$$

$$f_+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ f_{sc}(x, y) & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Отсюда

$$u_-(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\xi^2 + \eta^2 < a^2} \frac{\exp[ikR(\xi, \eta)]}{R(\xi, \eta)} f_-(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.10)$$

$$u_+(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\xi^2 + \eta^2 > a^2} \frac{\exp[ikR(\xi, \eta)]}{R(\xi, \eta)} f_+(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $R(\xi, \eta) = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. В дальней зоне функция u_- представляет собой сферическую волну (3.2) (см. п. 3).

Функция u_+ разлагается в ряд Фурье:

$$u_+ = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m w_m(r, z, s_1) + d_m w_m(r, z, is_1)) \cos m\varphi; \quad (1.11)$$

где $u_m(x, y, z, s) = w_m(r, z, s) \cos m\varphi$ в (1.11) – решение уравнения Гельмгольца (1.1) в области $z > 0$, удовлетворяющее при $z = 0$ граничному условию

$$\left. \frac{\partial u_m}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a, \\ H_m^{(1)}(rs) \cos m\varphi & \text{при } r > a; \end{cases} \quad (1.12)$$

предполагается, что $\Re s \geq 0, \Im s \geq 0$. Функция $w_m(R \cos \theta, R \sin \theta, s)$ представляет собой в дальней зоне сумму (4.14) сферической и конической волн; равномерная по углу θ асимптотика описывается ф-лой (4.13) (см. пп. 3–4).

2. Функции u_m . Введем сферические R, ϑ, φ и цилиндрические r, φ, z координаты

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = R \cos \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi = R \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \sin \vartheta \end{aligned} \quad (2.1)$$

и положим

$$G(r, \rho, \psi - \varphi, z) = \frac{-\exp[ik\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\psi - \varphi) + z^2}]}{4\pi\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\psi - \varphi) + z^2}}. \quad (2.2)$$

Тогда

$$u_m(r, \varphi, z, s) = \int_a^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} G(r, \rho, \psi - \varphi) H_m^{(1)}(\rho s) \cos m\psi d\psi.$$

Эта формула неудобна для численных расчетов и вычисления асимптотики u_m в дальней зоне. Чтобы выписать более удобное представление, положим

$$\vartheta_0 = \arcsin(\sqrt{k^2 - s^2}/k), \quad (2.3)$$

где выбирается ветвь радикала, для которой $\Re(\sin \vartheta_0) \geq 0$; тогда $\Im(\sin \vartheta_0) \leq 0$. При $s = s_1 + i\gamma$, где $s_1 > k$ вещественно и $0 \leq \gamma \ll 1$, будем полагать

$$k \sin \vartheta_0 = \sqrt{k^2 - s^2} = -i\sqrt{s^2 - k^2}.$$

В этом случае $\vartheta_0 = -\theta_0$; в остальных случаях $\vartheta_0 = \theta_0$. Обозначим через \mathcal{L}_z при $z > 0$ контур на комплексной плоскости ξ , состоящий из отрезка $0 < \xi < z$ и луча $\xi = z + \rho \exp(i\alpha)$, где $\alpha \geq 0$ выбрано таким образом, чтобы интеграл для v_2 в (2.5) сошелся. При $s = s_1 + i\gamma$, где $s_1 > k$ для этого требуется

$$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{k}{\sqrt{s_1^2 - k^2}} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Через \mathcal{L}_z^* обозначим контур, симметричный к \mathcal{L}_z относительно начала координат. Наконец, введем функцию

$$Q(r, a, \psi, \xi) = \frac{\partial H_m^{(1)}(sa)}{\partial a} G(r, a, \psi, \xi) - H_m^{(1)}(sa) \frac{\partial G(r, a, \psi, \xi)}{\partial a}. \quad (2.4)$$

В приложении 1 будет доказано, что

$$u_m(r, \varphi, z, s) = v_1 + v_2, \quad (2.5)$$

где

$$v_1 = \frac{-ia}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \times \int_{-\infty}^0 \exp(ik\xi \sin \vartheta_0) Q(r, a, \psi - \varphi, \xi - z) d\xi,$$

$$v_2 = \frac{ia}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \times \int_{\mathcal{L}_z^*} \exp(-ik\xi \sin \vartheta_0) Q(r, a, \psi - \varphi, \xi - z) d\xi.$$

В приложении 2 приводятся соображения, позволяющие существенно упростить и ускорить расчет ближнего звукового поля. В пп. 3, 4 выводятся явные формулы для асимптотики звукового поля в дальней зоне.

3. Поле в дальней зоне – функция u_- . Пусть точка наблюдения (x, y, z) находится в дальней зоне по отношению к включению, т.е.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg ka^2. \quad (3.1)$$

Положим $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \sin \psi$. Тогда $R(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi)^{-1}$ во внеэкспоненциальном множителе в (1.10) можно заменить на $R(0, 0)^{-1} = R^{-1}$, а выражение $kR(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi)$ в показателе экспоненты можно заменить на линейную функцию $k(R - \rho \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi))$, где R, ϑ, φ – введенные в (2.1) сферические координаты. В результате получим, что в дальней зоне поле u_- представляет собой направленный точечный источник

$$u_-(R, \vartheta, \varphi) \approx \frac{\exp(ikR)}{R} U_-(\vartheta, \varphi), \quad (3.2)$$

где диаграмма излучения $U_-(\vartheta, \varphi)$ имеет вид

$$U_-(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi)] \times f_-(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi. \quad (3.3)$$

Используя затем ряд (1.4) для f_{int} , получаем

$$U_- = \tilde{U} + \sum_{m=0}^{\infty} [a_m U_m(\vartheta, \varphi, s_2) + b_m U_m(\vartheta, \varphi, is_2)], \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} \exp[i\rho(-k \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi) + s_1 \cos \psi)] d\psi;$$

$$U_m(\vartheta, \varphi, s) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^a \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi)] J_m(\rho s) \cos m\psi d\psi.$$

Последовательное интегрирование по ψ и по ρ (см. [7], ф-ла 5.54) приводит к выражениям

$$\tilde{U} = \frac{a J_1(a\sqrt{k^2 \cos^2 \vartheta - 2ks \cos \vartheta \cos \varphi + s^2})}{\sqrt{k^2 \cos^2 \vartheta - 2ks \cos \vartheta \cos \varphi + s^2}} \quad (3.5)$$

и

$$U_m(\vartheta, \varphi, s) = -i^m \frac{a(k \cos \vartheta J_m(sa) J_{m-1}(ka \cos \vartheta) - s J_{m-1}(sa) J_m(k \arccos \vartheta))}{k^2 \cos^2 \vartheta - s^2} \cos m\varphi. \quad (3.6)$$

Формулы (3.4)–(3.6) дают искомое выражение для U_- .

4. Поле в дальней зоне – функция u_+ . Проблема сводится к вычислению асимптотики в дальней зоне функций $w_m(R, \vartheta, s) = u_m(R, \vartheta, 0, s)$, где $u_m(R, \vartheta, \varphi, s)$ определены интегралами (2.5). Заменяя в выражении (2.2) для $G(R \cos \vartheta, a, \psi, R \sin \vartheta - \xi)$ функцию $\sqrt{R^2 \cos^2 \vartheta + a^2 - 2R a \cos \vartheta \cos \psi + (R \sin \vartheta - \xi)^2}$ на $\sqrt{R^2 - 2R \xi \sin \vartheta + \xi^2} - R a \cos \vartheta \cos \psi (R^2 - 2R \xi \sin \vartheta + \xi^2)^{-1/2}$ в показателе экспоненты и на $\sqrt{R^2 - 2R \xi \sin \vartheta + \xi^2}$ в знаменателе, получим, после замены переменной интегрирования $\xi \rightarrow -R \xi$ и вычисления интеграла по ψ (см. [7], ф-ла 3.715):

$$w_m(R, \vartheta, s) \approx t_m^{(-)} + t_m^{(+)},$$

$$t_m^{(-)} = \frac{-1}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{\infty} \exp[ikR(\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2} - \xi \sin \vartheta_0)] \times \\ \times \frac{M_m(\xi) d\xi}{\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2}}, \quad (4.1)$$

$$t_m^{(+)} = \frac{1}{k \sin \vartheta_0} \int_{\mathcal{L}_2} \exp[ikR(\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2} + \xi \sin \vartheta_0)] \times \\ \times \frac{M_m(\xi) d\xi}{\sqrt{(1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2)}},$$

где

$$M_m(\xi) = \frac{i^{1-m} a}{2} \left[J_m \left(\frac{k a \cos \vartheta}{\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2}} \right) \frac{\partial}{\partial a} H_m^{(1)}(sa) - \right. \\ \left. - H_m^{(1)}(sa) \frac{\partial}{\partial a} J_m \left(\frac{k a \cos \vartheta}{\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2}} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Найдем асимптотику интегралов $t_m^{(+)}$ и $t_m^{(-)}$ при $kR \gg 1$, т.е. при расстоянии R от точки наблюдения до начала координат много больших, чем длина звуковой волны $\lambda = 2\pi/k$. Поскольку $R \gg a$, функция $M_m(\xi)$ является медленно меняющейся по сравнению с экспонентой функцией ξ , и для вычисления этой асимптотики можно использовать метод стационарной фазы.

Предположим сначала, что $|\sin \vartheta_0|$ ограничено снизу, т.е. что волновые числа s в пластине и k в воздухе не близки. Тогда асимптотика $t_m^{(+)}$ определяется начальной точкой $\xi = 0$ контура интегрирования, и мы получаем:

При ограниченном снизу $|\sin \vartheta_0|$:

$$t_m^{(+)} \approx \frac{e^{ikR}}{R} V_m(\vartheta, \vartheta_0); \quad (4.3)$$

$$V_m(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{iM_m(0)}{k^2 \sin \vartheta_0 (\sin \vartheta + \sin \vartheta_0)}.$$

Рассмотрим интеграл $t_m^{(-)}$. Как видно из (1.5), s принимает значения s_1 и is_1 , где s_1 – постоянная распространения падающей плоской изгибной волны $f_{inc} = \exp(is_1 x)$. Представляют интерес случаи положительного s_1 и s_1 с малой положительной мнимой частью $s_1 = s_R + i\gamma$ (что соответствует малому затуханию изгибных волн в пластине). Асимптотика $t_m^{(-)}$ зависит от соотношения между s и k :

A: $s = is_1$ или $s = s_1$; $s_1 = s_R + i\gamma$ при $\gamma \ll 1$, $s_R > k$ и ограниченных снизу $|\sin \vartheta_0|$. В этом случае асимптотика $t_m^{(-)}$ определяется начальной точкой $\xi = 0$ контура интегрирования и мы имеем:

$$t_m^{(-)} \approx \frac{\exp(ikR)}{R} V_m(\vartheta, -\vartheta_0); \quad (4.5)$$

$$u_m = (t_m^{(-)} + t_m^{(+)}) \cos m\varphi \approx \frac{e^{ikR}}{R} U_m(\vartheta, \vartheta_0) \cos m\varphi;$$

$$U_m(\vartheta, \vartheta_0) = (V_m(\vartheta, \vartheta_0) + V_m(\vartheta, -\vartheta_0)) = \\ = \frac{2iM_m(0)}{s^2 - k^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (4.6)$$

B: $s_1 = s_R + i\gamma$ при $\gamma \ll 1$, $s_R < k$ и ограниченных снизу $|\sin \vartheta_0|$.

Положим $\cos \vartheta_R = s_R/k$; $\sin \vartheta_R = \sqrt{1 - s_R^2/k^2}$. Если $\vartheta > \vartheta_R$, то стационарная точка $\tilde{\xi}$ фазовой функции $\sqrt{1 + 2\xi \sin \vartheta + \xi^2} - \xi \sin \vartheta_0$ в интеграле (4.1) находится вдали от контура интегрирования $\xi > 0$ и асимптотика $t_m^{(-)}$ имеет вид (4.5). Если же $\vartheta < \vartheta_R$, то стационарная точка $\tilde{\xi}$ оказывается вблизи контура интегрирования (и ложится на него при $\gamma = 0$), и мы должны учесть ее вклад в асимптотику $t_m^{(-)}$. В результате при $s_R < k$ получаем:

$$t_m^{(-)} \approx A \exp[ikR \cos(\vartheta - \vartheta_R)] H(\vartheta_R - \vartheta) + \frac{e^{ikR}}{R} V_m(\vartheta, -\vartheta_R),$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \exp[\pi i/4 - m\pi i/2] \exp[-\gamma R \sin(\vartheta_R - \vartheta)/\sin \vartheta_R]}{k \sin \vartheta_R \sqrt{\pi k R \cos \vartheta_R \cos \vartheta}}.$$
(4.7)

Здесь $H(\vartheta_R - \vartheta)$ – функция Хевисайда: $H(\vartheta_R - \vartheta) = 0$ при $\vartheta > \vartheta_R$ и $H(\vartheta_R - \vartheta) = 1$ при $\vartheta < \vartheta_R$. Первое слагаемое в (4.7) представляет собой коническую волну, лучи которой выходят из плоскости $z = 0$ под углом к этой плоскости ϑ_R по направлению от оси $r = 0$. Вдоль каждого луча $R \sin(\vartheta_R - \vartheta)$ постоянно и амплитуда A изменяется в соответствии с законами геометрической оптики. Граница $\vartheta = \vartheta_R$ области распространения этой волны составлена из лучей, выходящих из начала координат.

Асимптотика (4.7) неприменима в окрестности этой границы; при ϑ , близких к ϑ_R стационарная точка $\xi = \xi_0$ находится вблизи границы $\xi = 0$ области интегрирования в (4.1). Применяемая в этой ситуации равномерная асимптотика выражается (см., например, [8, 9, 10]) через интеграл Френеля $F(\zeta)$:

$$F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^{\zeta} \exp(it^2) dt.$$

В результате для асимптотики в дальней зоне функции $w_m(R, \vartheta, s)$ мы получаем:

$$w_m(R, \vartheta, s) \approx \frac{-\sqrt{2} e^{\pi i/4} e^{ikR \cos(\vartheta - \vartheta_0)}}{k \sin \vartheta_0 \sqrt{\pi k R \cos \vartheta_0 \cos \vartheta}} \times$$

$$\times F(\sqrt{2kR} \sin[(\vartheta_0 - \vartheta)/2]) +$$

$$+ \frac{\exp(ikR)}{R} (V_m^*(\vartheta, -\vartheta_0) + V_m(\vartheta, \vartheta_0)),$$
(4.8)

где

$$V_m^*(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{i}{k^2 \sin \vartheta_0} \times$$

$$\times \left(\frac{M_m(0)}{\sin \vartheta + \sin \vartheta_0} + \frac{i^{-m}}{2\pi \sin \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2} \sqrt{\cos \vartheta \cos \vartheta_0}} \right).$$
(4.9)

При $2kR \sin[(\vartheta - \vartheta_R)/2] \gg 1$ применима неравномерная асимптотика

$$w_m(R, \vartheta, s) \approx A \exp[ikR \cos(\vartheta - \vartheta_R)] H(\vartheta_R - \vartheta) +$$

$$+ \frac{\exp(ikR)}{R} U_m(\vartheta, \vartheta_R);$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \cos \vartheta \exp(\pi i/4) \exp[-\gamma R \sin(\vartheta_R - \vartheta)/\sin \vartheta_R]}{k \sin \vartheta_R \sqrt{\pi k R \cos \vartheta_R}}.$$
(4.10)

С. Малые ϑ_0 . При ограниченных снизу ϑ применима неравномерная асимптотика (4.6). При малых ϑ в обоих интегралах $t_m^{(+)}$ и $t_m^{(-)}$ стационарная точка фазовой функции близка к границе $\xi = 0$ контура интегрирования и потому их асимптотика выражается через интегралы Френеля:

$$w_m(R, \vartheta, s) \approx \frac{\sqrt{2} \exp(\pi i/4)}{k \sin \vartheta_0 \sqrt{\pi k R \cos \vartheta_0 \cos \vartheta}} \times$$

$$\times \{ \exp[ikR \cos(\vartheta + \vartheta_0)] \times$$

$$\times F(-\sqrt{2kR} \sin[(\vartheta_0 + \vartheta)/2]) -$$

$$- \exp[ikR \cos(\vartheta - \vartheta_0)] F(\sqrt{2kR} \sin[(\vartheta_0 - \vartheta)/2]) \} +$$

$$+ \frac{\exp(ikR)}{R} (V_m^*(\vartheta, \vartheta_0) + V_m^*(\vartheta, -\vartheta_0)).$$
(4.11)

5. Результаты численного расчета поля в дальней зоне. Численные расчеты проводились для случая стальной пластины толщиной $h = 10$ мм при неподвижном абсолютно жестком круговом включении радиуса $a = 2.5h$ и падающей волне $\exp i(sx - 2\pi ft)$ с круговой частотой $\omega = 389$ Гц, которая соответствует длине изгибной волны $\lambda_s = = 2\pi/s = 10a$ и длине звуковой волны $\lambda = 35.7a$ (см. рис. 1).

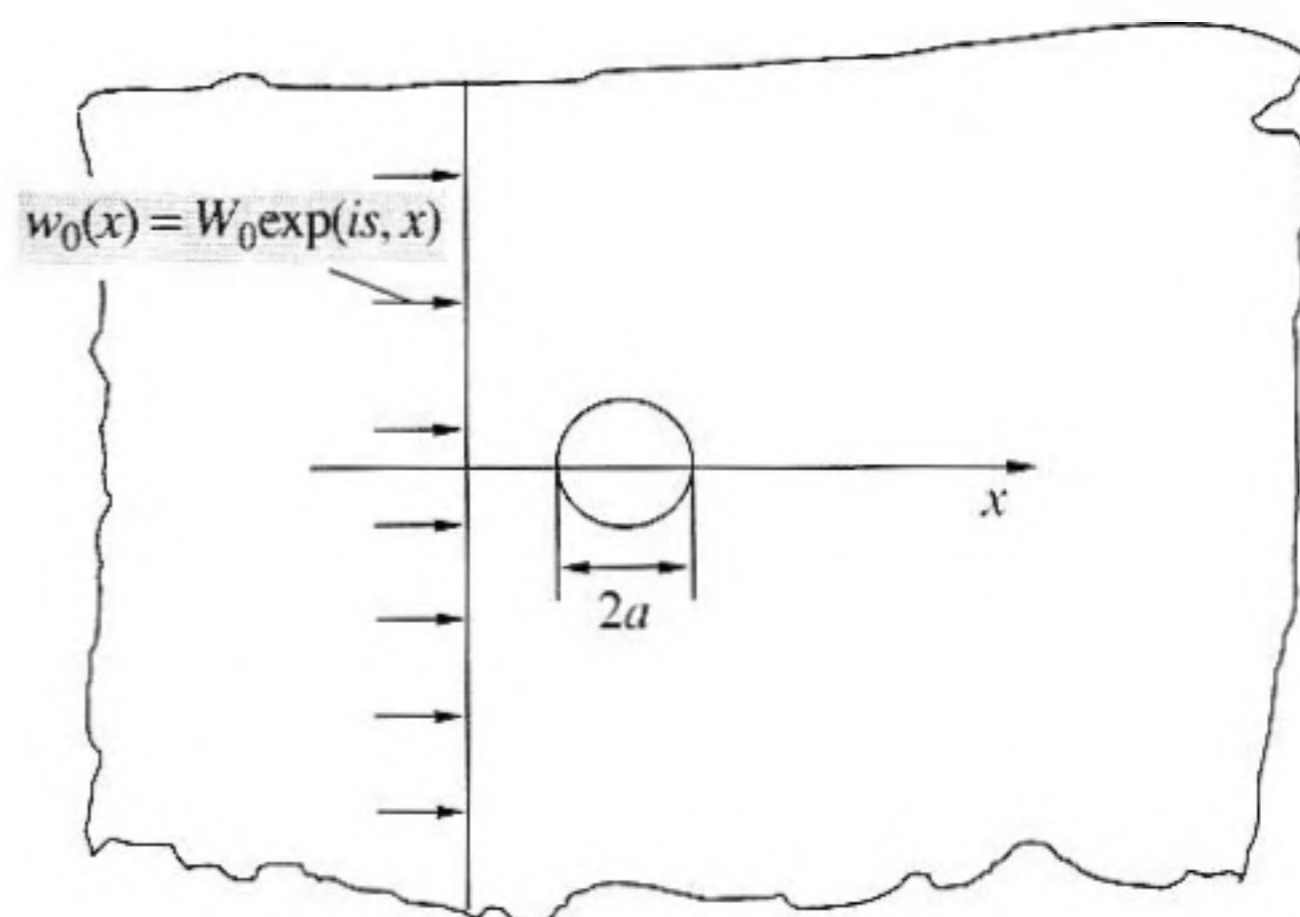


Рис. 1. Расчетная схема падения плоской волны на круглое включение.

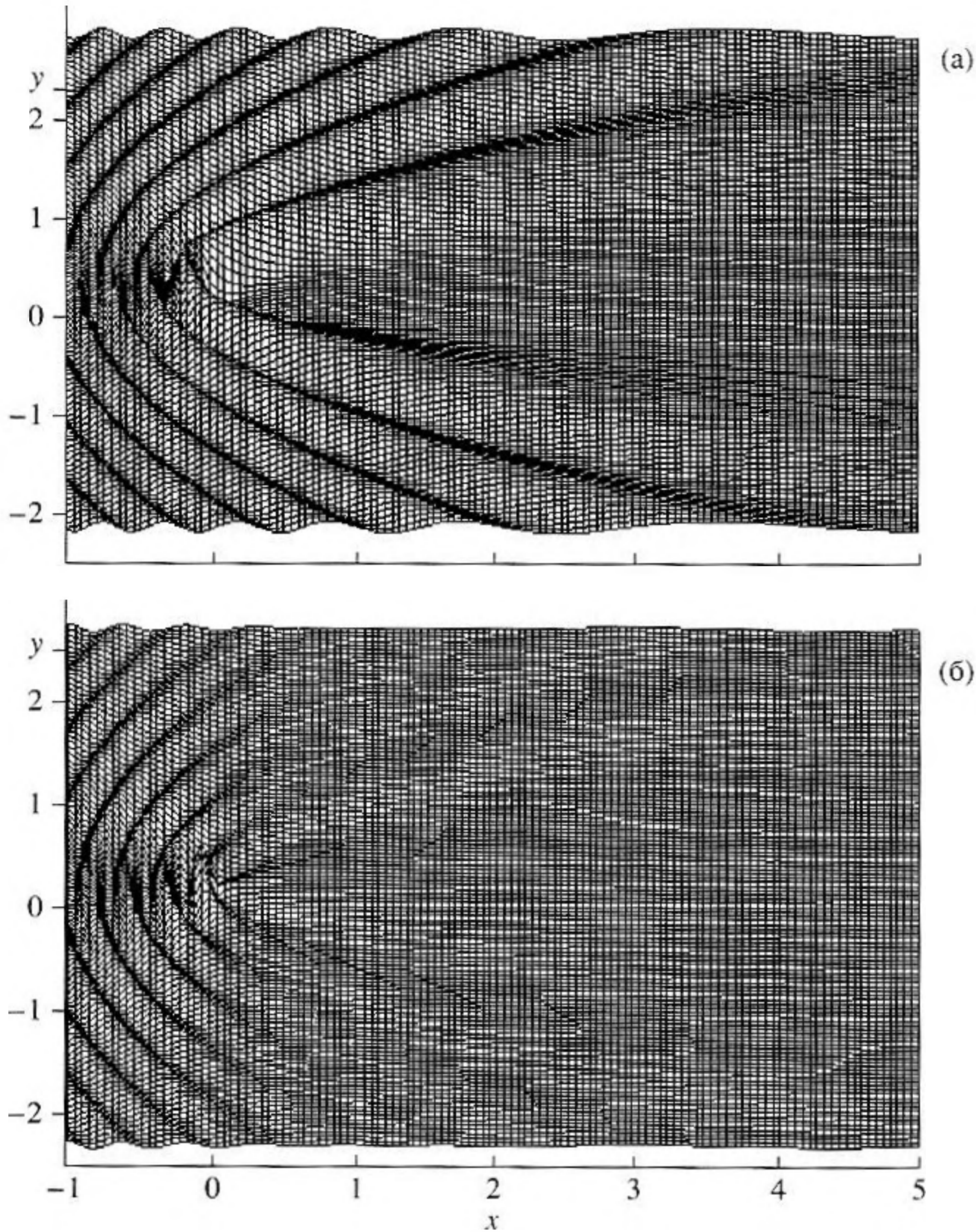


Рис. 2. Рельеф модуля динамического прогиба пластины в окрестности включения (а); поле, образующееся при падении акустической волны на жесткий цилиндр (б).

Поскольку $\lambda_s < \lambda$, невозмущенное звуковое поле экспоненциально затухало при удалении от пластины. Рассматривался случай вертикального смещения $f \equiv 0$ при $r < a$ и защемленного края $f = \partial f / \partial r = 0$ при $r = a$. В этих условиях в формуле (1.9) функция $f_- = -\exp(isx)$, а f_{sc} представляется в виде

$$f_{sc} = f_R + f_I; \quad f_R = \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m^{(1)}(sr) \cos m\varphi;$$

$$f_I = \sum_{m=0}^{\infty} d_m H_m^{(1)}(isr) \cos m\varphi,$$

где

$$c_m = \varepsilon_m e^{im\pi/2} \times \left(\frac{H_m^{(1)}(ias)J_{m+1}(as) - H_{m+1}^{(1)}(ias)J_m(as)}{H_{m+1}^{(1)}(ias)H_m^{(1)}(as) - H_m^{(1)}(ias)H_{m+1}^{(1)}(as)} \right), \quad (5.1)$$

$$d_m = \varepsilon_m e^{im\pi/2} \times \left(\frac{H_m^{(1)}(as)J_{m+1}(as) - H_{m+1}^{(1)}(as)J_m(as)}{H_{m+1}^{(1)}(ias)H_m^{(1)}(as) - H_m^{(1)}(ias)H_{m+1}^{(1)}(s)} \right).$$

Здесь $\varepsilon_0 = 1$; при $m > 0$ $\varepsilon_m = 2$. Кроме того, предполагалось, что расстояние z от точки наблюдения $\{x, y, z\}$ до пластины больше, чем радиус включения a .

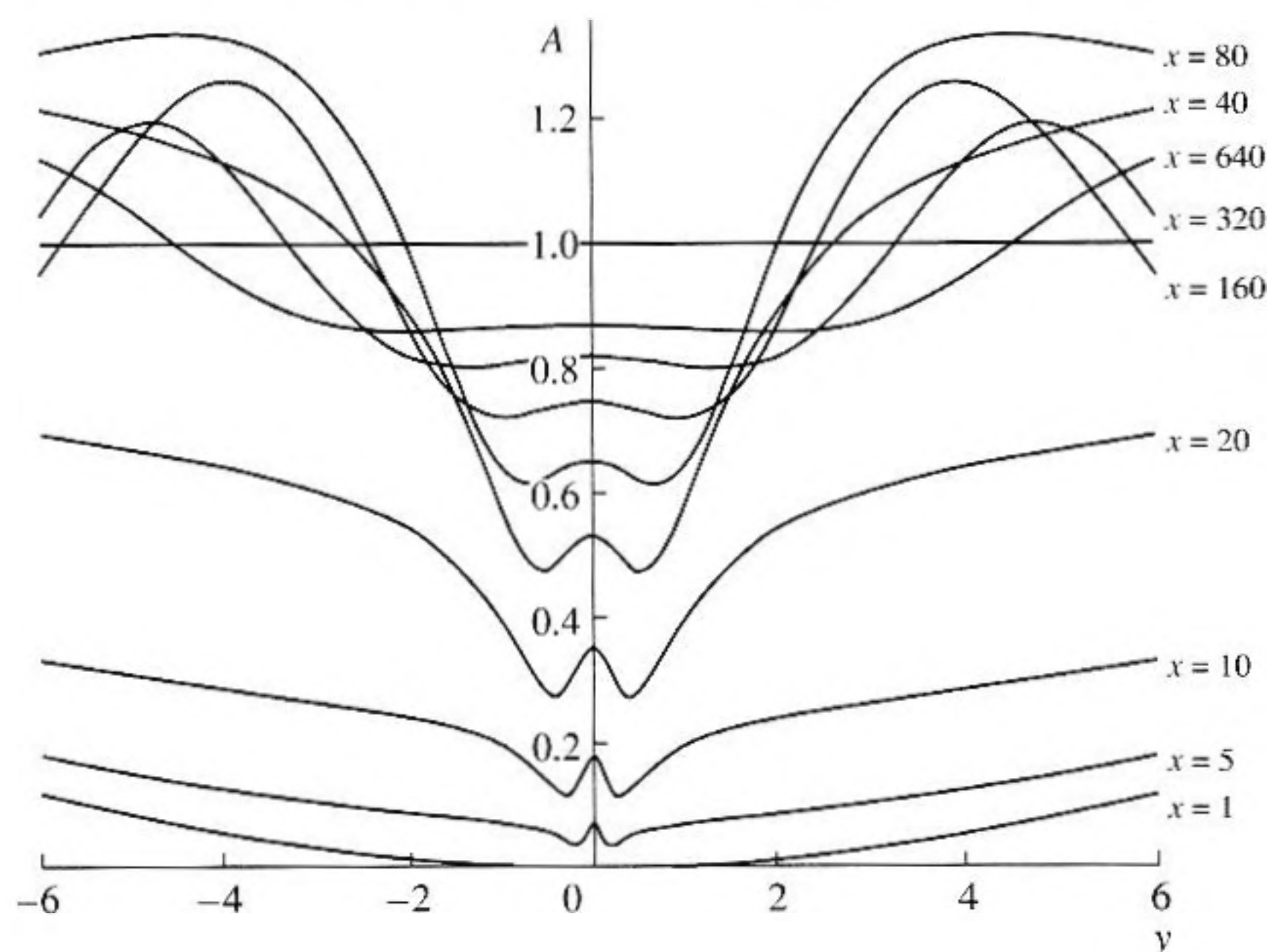


Рис. 3. Изменение поперечного профиля прогиба пластины за включением на удалении a и далее $5an$, $n = 1, 2, \dots, 8$ (соответствующие кривые располагаются снизу вверх по оси ординат) в сравнении с амплитудой падающей волны (горизонтальная линия на уровне "1").

Расчеты проводились по асимптотическим формулам пп. 3, 4. На рис. 2а представлен рельеф модуля полного динамического прогиба пластины. Интерференция падающей волны и волны, рассеянной препятствием, образует, как видно из рис. 2а, поле с гребнями параболической формы, огибающими включение. Форма гребней определяется тем обстоятельством, что поскольку $L \gg a$, то $c_0 \gg c_m$, $m > 0$ и поле f_{sc} близко к полю ненаправленной цилиндрической волны.

На рис. 2б дано аналогичное поле, образующееся при падении акустической волны той же длины на жесткий цилиндр радиуса a (см. [11]). Видно, что в акустическом приближении от препятствия отражается меньшая доля падающей волны, но это отражение сильнее сконцентрировано навстречу падающей волне, и относительная острота максимумов поля перед препятствием в этом случае выражена сильнее, в то время как тень менее заметна.

На рис. 3 приведена амплитуда прогиба за включением как функция y в поперечных сечениях пластины при $x/a = (1, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640)$ (кривые, располагающиеся последовательно снизу вверх, считая по оси ординат) в сравнении с амплитудой падающей волны (горизонтальная линия на уровне "1"). Видно, что непосредственно за препятствием формируется глубокая тень с небольшим центральным максимумом. Дальше от включения глубина тени уменьшается с расстоянием, но сохраняется ее форма; ширина тени уменьшается до расстояния $x \sim 100a$, а затем тень

начинает расширяться. С уменьшением длины падающей волны область тени сужается, но сохраняет при этом те же характерные особенности. На рис. 4 изображен (в Па/м) трехмерный график модуля акустического давления на высоте $z = 100h$ над включением, при частоте, которая соответствует длине изгибной волны в пластине $L = 20a$. Продольные (вдоль оси x) разрезы этой поверхности по линиям $y/a = (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70)$ (кривые, располагающиеся последовательно сверху вниз) даны на рис. 5. Поперечный разрез имеет одногорбую форму. Острота акустического максимума зависит от частоты: отношение амплитуды акустического давления в максимуме к амплитуде на расстоянии 1 м от включения со-

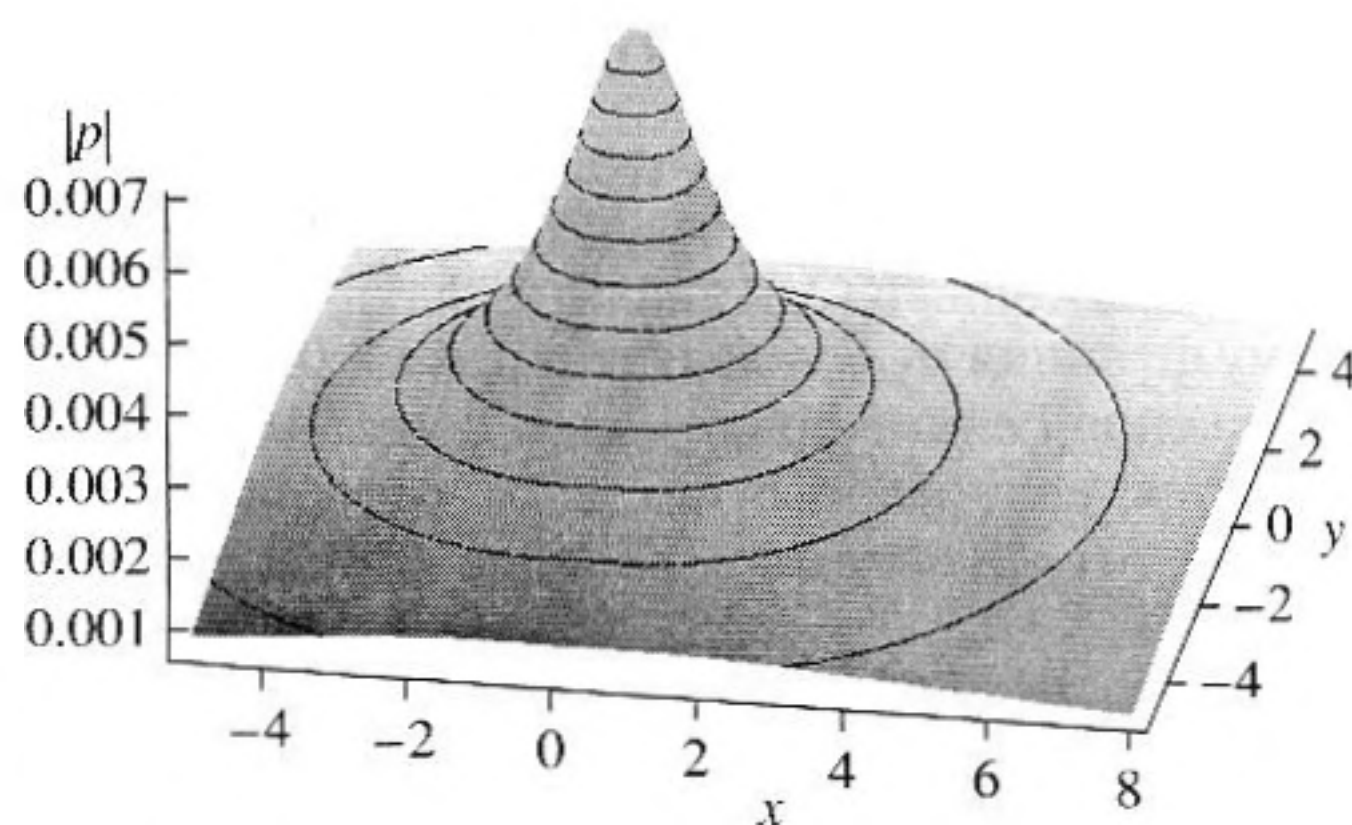


Рис. 4. Распределение амплитуды акустического давления на высоте $100h$ над включением.

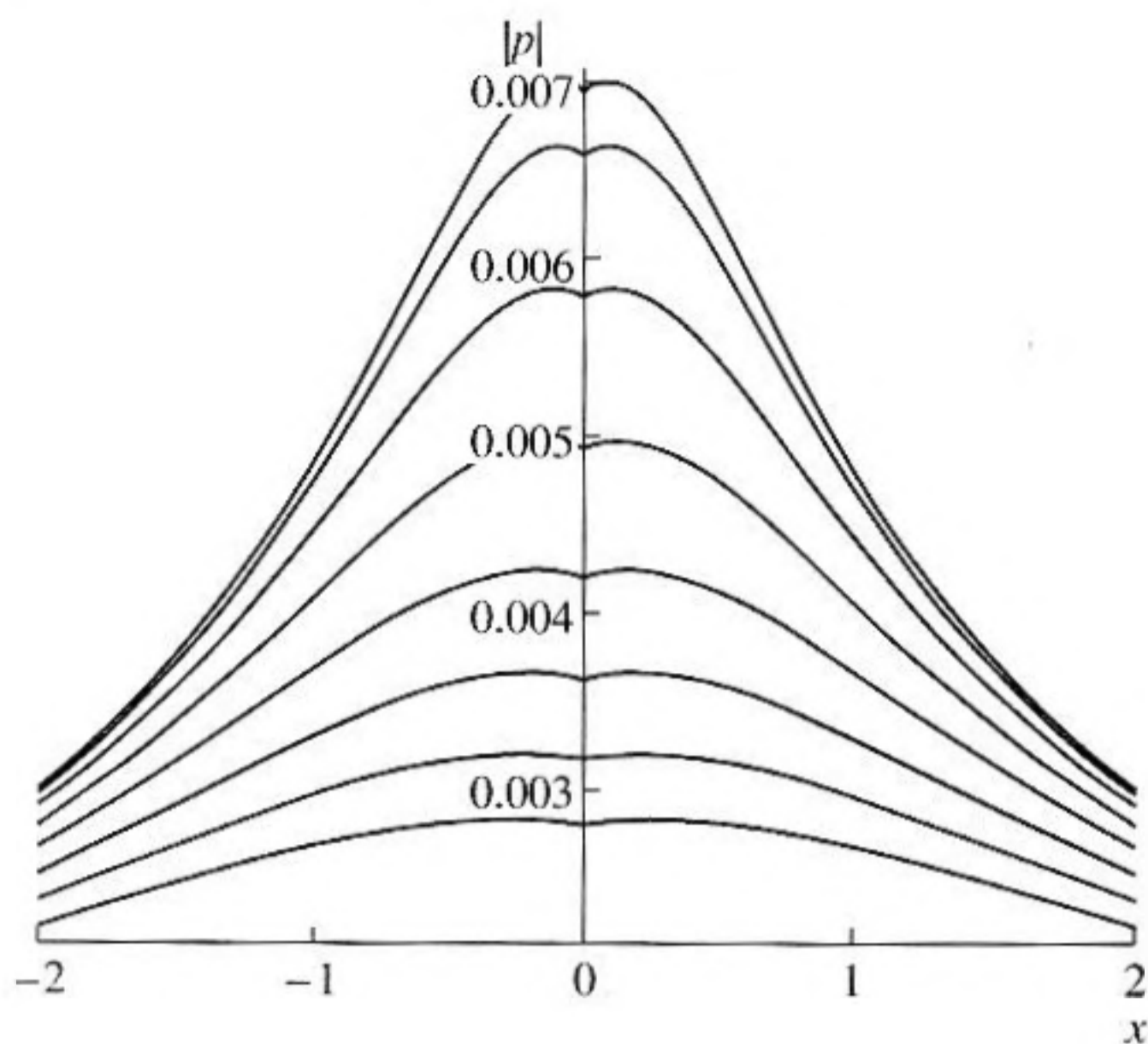


Рис. 5. Форма акустического давления при сечениях поверхности рис. 4 по направлению падающей волны над центром включения (верхняя линия) и при удалении от него на расстояния $10an$, $n = 1, 2, \dots, 7$ (соответствующие кривые расположены последовательно сверху вниз).

ставляет 1.41 на очень низких частотах, с ростом частоты снижается до 1.38, остается приблизительно постоянным в широком диапазоне частот и сильно растет с приближением к критической частоте, начиная с которой угол ϑ_0 (см. (2.3)) принимает действительные значения. Из приведенных рисунков видно, что в акустическом поле над вибрирующей пластиной малый дефект проявляется в виде заметного локального максимума, что позволяет бесконтактно идентифицировать наличие дефекта и определить его местоположение.

Приложение 1. Доказательство формулы (2.5). Следует проверить, что определенная формулой (2.5) функция $u_m(r, \varphi, z, s)$ является при $z > 0$ решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим граничному условию (1.11).

Заметим, во-первых, что поскольку $\Re \xi < 0$ на контурах интегрирования в (2.5), подинтегральные выражения в (2.5) аналитичны при $z > 0$ и потому функция $v_1 + v_2$ является при $z > 0$ решением уравнения Гельмгольца. Далее, функция u_m не изменится, если мы вычтем из v_1 и прибавим к v_2 один и тот же интеграл, т.е. положим в (2.5)

$$v_1 = \frac{-ia}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \left[\int_{-\infty}^0 + \int_{\mathcal{L}_z} \right] \times \\ \times \exp(ik\xi \sin \vartheta_0) Q(r, a, \psi - \varphi, \xi - z) d\xi;$$

$$v_2 = \frac{ia}{k \sin \vartheta_0} \left[\int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \int_{\mathcal{L}_z^*} \exp(-ik\xi \sin \vartheta_0) \times \right. \\ \times Q(r, a, \psi - \varphi, \xi - z) d\xi + \\ \left. + \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \int_{\mathcal{L}_z} \exp(ik\xi \sin \vartheta_0) \times \right. \\ \left. \times Q(r, a, \psi - \varphi, \xi - z) d\xi \right].$$

При таком определении v_1, v_2 производная $\partial v_2 / \partial z$ обращается в нуль при $z = 0$. Действительно, $\partial v_2 / \partial z$ при $z = 0$ может быть записана в виде

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \int_{\mathcal{L}_z} \exp(ik\xi \sin \vartheta_0) F(\xi^2) \xi d\xi + \\ + \int_{\mathcal{L}_z^*} \exp(-ik\xi \sin \vartheta_0) F(\xi^2) \xi d\xi \quad (A1)$$

(вид функции $F(\xi^2)$, включающей в себя, в частности, интегрирование по ψ , для нас несущественен), и после замены переменной $\xi \rightarrow -\xi$ в первом интеграле мы получим, что интегралы в (2.5) взаимно уничтожаются. Поэтому достаточно доказать, что v_1 удовлетворяет граничному условию:

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a; \\ H_m^{(1)}(rs) \cos m\varphi & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (A2)$$

Проведем в выражении для v_1 интегрирование по ξ . Полагая последовательно $\xi = z + p \operatorname{sh} \eta$; $\eta = \zeta - \operatorname{arch}(\cos^{-1} \vartheta_0)$, и используя [7], формула 8.421.1, получим при $p = \sqrt{r^2 + a^2 - 2rac \cos(\psi - \varphi)}$:

$$\left[\int_{-\infty}^0 + \int_{\mathcal{L}_z} \right] \exp[ik(\xi \sin \vartheta_0 + \sqrt{(\xi - z)^2 + p^2})] \times \\ \times \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - z)^2 + p^2}} = \exp(ikz \sin \vartheta_0) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty + i\alpha} \exp[ikp(\operatorname{sh} \eta \sin \vartheta_0 + \operatorname{ch} \eta)] d\eta = \\ = \exp(ikz \sin \vartheta_0) \int_{-\infty}^{\infty + i\alpha} \exp[ikp \cos \vartheta_0 \operatorname{ch} \zeta] d\zeta =$$

$$= \pi i \exp(ikz \sin \vartheta_0) H_0^{(1)}(ps).$$

Поэтому

$$v_1 = \frac{-a \exp(ikz \sin \vartheta_0)}{4k \sin \vartheta_0} \int_0^{2\pi} \cos m \psi \times \\ \times \left(\frac{\partial H_m^{(1)}(sa)}{\partial a} H_0^{(1)}(sp) - H_m^{(1)}(sa) \frac{\partial H_0^{(1)}(sp)}{\partial a} \right) d\psi.$$

Положим $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $\mathbf{\rho} = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi)$, $u(\mathbf{r}) = H_m^{(1)}(sr) \cos m \varphi$. Функция $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет при $r \neq 0$ двумерному уравнению Гельмгольца $\Delta u + s^2 u = 0$; функция $G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{\rho}|) = (4i)^{-1} H_0^{(1)}(s \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi)})$ удовлетворяет уравнению $\Delta G_2 + s^2 G_2 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{\rho})$. Поэтому

$$v_1 = \frac{-i \exp(ikz \sin \vartheta_0)}{k \sin \vartheta_0} \times \\ \times \int_{|\rho|=a} \left(\frac{\partial u(\rho)}{\partial a} G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{\rho}|) - u(\rho) \frac{\partial G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{\rho}|)}{\partial a} \right) a d\psi = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a; \\ \frac{-i \exp(ikz \sin \vartheta_0)}{k \sin \vartheta_0} u(r) & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Дифференцируя это выражение по z , получим (A2).

Приложение 2. О расчете поля в ближней зоне. Приведенные ниже соображения позволяют существенно сократить объем численных расчетов при вычислении поля в ближней зоне. Расчет функции u_- из (1.10) не вызывает каких-либо затруднений, т.к. интегрирование проводится по ограниченной области. Рассмотрим функцию u_+ из (1.11) и представим ее в виде $u_+ = u_R + u_I$, где

$$u_R = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(r, \varphi, z, s); \\ u_I = \sum_{m=0}^{\infty} d_m u_m(r, \varphi, z, i, s); \quad s = s_1.$$

Поле смещений f_{sc} при $r > a$ имеет вид $f_{sc} = f_R + f_I$, где

$$f_R = \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m^{(1)}(sr) \cos m \varphi; \\ f_I = \sum_{m=0}^{\infty} d_m H_m^{(1)}(isr) \cos m \varphi.$$

Положим

$$T(r, a, \psi, z, s) = \frac{-ia}{k \sin \vartheta_0} \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^0 \exp(ik\xi \sin \vartheta_0) G(r, a, \psi, \xi - z) d\xi - \right. \\ \left. - \int_{\mathcal{L}_z^*} \exp(-ik\xi \sin \vartheta_0) G(r, a, \psi, \xi - z) d\xi \right], \quad (\text{A3})$$

где ϑ_0 определено в (2.3). Используя теперь формулы (2.4) для Q и (2.5) для u_m , получим:

$$u_R(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f_R(a, \varphi - \psi)}{\partial a} T(r, a, \psi, z, s) - \right. \\ \left. - f_R(a, \varphi - \psi) \frac{\partial T(r, a, \psi, z, s)}{\partial a} \right] d\psi, \quad (\text{A4}) \\ u_I(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f_I(a, \varphi - \psi)}{\partial a} T(r, a, \psi, z, is) - \right. \\ \left. - f_I(a, \varphi - \psi) \frac{\partial T(r, a, \psi, z, is)}{\partial a} \right] d\psi.$$

Рассмотрим вычисление интегралов (A3). Масштаб l_e изменения экспоненты в этих интегралах имеет порядок $|k \sin \vartheta_0|^{-1}$; масштаб изменения l_G функции Грина имеет порядок $|k \partial R / \partial \xi|$, где $R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \psi} + (z - \xi)^2$ и при малых $z - \xi$, $r - a$, ψ может быть много меньше, чем l_e . Поэтому целесообразно выделить в (A3) интегрирование по малым $|\xi|$, заменив предварительно \mathcal{L}_z^* на \mathcal{L}_a^* , что, очевидно, не изменит значения T . Положим $T(r, a, \psi, z, s) = T_1(r, a, \psi, z, s) + T_2(r, a, \psi, z, s) + T_3(r, a, \psi, z, s)$, где

$$T_1 = \frac{-ia}{k \sin \vartheta_0} \int_{-a}^0 [e^{ik\xi \sin \vartheta_0} - e^{-ik\xi \sin \vartheta_0}] \times \\ \times G(r, a, \psi, \xi - z) d\xi, \quad (\text{A5}) \\ T_2 = \frac{-iae^{-ika \sin \vartheta_0}}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{\infty} e^{-ik\eta \sin \vartheta_0} G(r, a, \psi, a + z + \eta) d\eta, \\ T_3 = \frac{iae^{ika \sin \vartheta_0} \exp(i\gamma)}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{\infty} e^{ik\eta \sin \vartheta_0} G(r, a, \psi, a + z + \eta) d\eta,$$

$\eta = -a - \xi$, и неотрицательная постоянная $\gamma < \pi/2$ выбрана таким образом, чтобы интеграл T_3 сошелся на бесконечности, т.е. чтобы выполнялось неравенство $\Im(k\eta \sin \vartheta_0 + k\eta) = \Im[\eta(\sqrt{k^2 - s^2} + k)] \geq 0$, где знак радикала выбирается из условия $\Im\sqrt{k^2 - s^2} \leq 0$.

Интеграл T_1 не допускает дальнейших преобразований; его значение определяется непосредственным численным расчетом. Интегралы T_2, T_3 сходятся на бесконечности. Эту сходимость можно существенно ускорить, если воспользоваться следующим приемом. Рассмотрим T_2 . Положим $h = 2/k$, обозначим через n некоторое целое число, и представим T_2 в виде суммы двух интегралов $T_2 = I_n + J_n$, где I_n вычисляется в пределах от нуля до nh , а J_n от nh до бесконечности. Интеграл I_n будем вычислять численно; для расчета J_n воспользуемся методом стационарной фазы и подберем n настолько большим, чтобы погрешностью расчета J_n можно было пренебречь. Чтобы формализовать эту процедуру, обозначим через W_n значение J_n , вычисленное методом стационарной фазы и положим:

$$T_2 \approx S_n = \frac{-ia \exp(-ika \sin \vartheta_0)}{k \sin \vartheta_0} \int_0^{nh} \exp(-ik\eta \sin \vartheta_0) \times \\ \times G(r, a, \psi, a + z + \eta) d\eta + W(nh). \quad (\text{A6})$$

Выпишем выражение для W_n . Мы имеем

$$J_n = \int_{nh}^{\infty} \exp[ik\Phi(\eta)] A(\eta) d\eta,$$

где

$$\Phi(\eta) = -\eta \sin \vartheta + R(\eta); \\ A(\eta) = \frac{ia \exp(-ika \sin \vartheta_0)}{4\pi k \sin \vartheta_0 R(\eta)};$$

$$R(\eta) = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \psi + (a + z + \eta)^2}.$$

Используя метод стационарной фазы, получим

$$J_n \approx W_n = \frac{iA(nh) \exp[ik\Phi(nh)]}{k\Phi'_\eta(nh)} = \\ = \frac{-a \exp[ik(R(nh) - (a + \eta) \sin \vartheta_0)]}{4\pi k \sin \vartheta_0 (a + z + \eta - R(nh) \sin \vartheta_0)}. \quad (\text{A7})$$

Расчет целесообразно проводить по рекуррентным формулам

$$S_0 = 0; \quad S_{n+1} = S_n + \delta_n; \\ \delta_n = \frac{-ia \exp(-ika \sin \vartheta_0)}{k \sin \vartheta_0} \times \\ \times \int_{nh}^{h(n+1)} \exp[ik\Phi(\eta)] A(\eta) d\eta + W_{n+1} - W_n \quad (\text{A8})$$

до тех пор, пока не установятся значения S_n , т.е. пока $|\delta_n|$ не окажется достаточно малым. Заметим, что при стандартном методе расчета несобственных интегралов численный расчет интеграла T_2 проводится до тех пор, пока не окажется пренебрежимо малой не приращение δ_n , а интеграл J_n , для чего, очевидно, требуются существенно большие значения n .

Аналогично проводится расчет интеграла T_3 , а также вычисление производных $\partial T(r, a, \psi, z, s)/\partial a$ и $\partial T(r, a, \psi, z, is)/\partial a$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евсеев В.Н. Излучение звука бесконечной пластины с периодическими неоднородностями. Акуст. журн. 1973. Т. 19. Вып. 3. С. 345–350.
2. Вяльцев А.И., Дубинин А.И., Тартаковский Б.Д. Активная звукоизоляция пластины. Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 159–164.
3. Клещев А.А., Ростовцев Д.М. Рассеяние звука упругой и жидкой эллипсоидальными оболочками вращения. Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 5. С. 691–694.
4. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. "Наука", Физматгиз, 1994. 206 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Физматгиз, 1965. 204 с.
6. Коненков Ю.К. Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в пластине. Акуст. журн. 1964. Т. X. Вып. 2. С. 186–190.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. Федорюк М.В. Метод перевала. Физматгиз, 1977. 368 с.
9. Felsen L.B., Marcuvitz N. Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall, inc., New Jersey, 1973 (Русский перевод – Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн, т. 1, "Мир", Москва, 1978. 548 с.).
10. Borovikov V.A. Uniform stationary phase method. IEE Electromagnetic waves series 40, London, 1994. P. 1–233.
11. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

The Acoustic Field Excited by Flexural Vibrations of an Elastic Plate with a Circular Inclusion

V. A. Borovikov, A. L. Popov, and D. A. Chelyubeev

Institute for Problems of Mechanics, Russian Academy of Sciences, 117526 Russia

e-mail: v_borovikov@sumail.ru, popov@ipmnet.ru

Abstract—The acoustic field excited by flexural vibrations of a thin elastic plate and the perturbations of this field caused by a homogeneous circular inclusion with other elastic properties are considered. Because the density of air widely differs from that of a metal, this problem can be solved with fair accuracy in two steps: first, by considering the vibrations of the plate in a free space, and, then, by calculating the acoustic field excited by the field of plate's vertical deflections. The main results of this work are the asymptotic expressions for the far acoustic field excited by each of the Fourier components $F_m(r)\cos m\varphi$ of the flexural wave scattered by the inclusion.