

“СВЕРХФОКУСИРОВКА” СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

© 2007 г. М. Ю. Гуреев, М. А. Миронов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника, 4

Тел.: (095) 126-9835; Факс: (095) 126-8411

E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 17.04.06 г.

Теоретически и экспериментально исследуется возможность фокусировки сферической волны в области значительно меньшей длины волны. При отражении сферической волны от малых жесткой, или мягкой сфер коэффициент отражения равен -1 . Следовательно, полное поле вблизи таких рассеивателей остается конечным при стремлении радиуса сферы к нулю. Мощность звукового поля в этом случае концентрируется в объеме с радиусом, пропорциональным длине звуковой волны. Увеличения поля можно добиться за счет изменения коэффициента отражения. Например, если коэффициент отражения сделать равным 0 , звуковое давление будет создаваться только сходящейся волной. При стремлении к центру это поле стремится к бесконечности как $1/r$, где r – расстояние от центра. В статье анализируются конструкции, обеспечивающие поглощение сходящейся волны. Описана экспериментальная установка и приведены результаты эксперимента, подтверждающие существенное поглощение (коэффициент отражения не превосходит 0.2) сходящейся волны. Главный результат работы состоит в экспериментальном подтверждении возможности фокусировки в объеме с размерами значительно меньшими длины волны.

PACS: 43.20.Mv

Принято считать, что при фокусировке волн любой природы волновая энергия концентрируется в области с размером не меньшим половины длины волны (см. напр. [1]). При отклонении от идеальной ситуации – сферической симметрии падающей волны, неоднородности среды (линзы, зеркала) – фокальное пятно увеличивает свои размеры и фокусировка ослабляется еще больше. На первый взгляд представляется, что, независимо от того, какое поле мы фокусируем – электромагнитное, акустическое, или квантово-механическую пси-функцию – сконцентрировать его в объеме, с размерами, меньшими длины соответствующей волны, невозможно. В настоящей работе показана возможность сконцентрировать сферическую волну в области много меньшей длины волны. Эта возможность подтверждена экспериментально на установке, в которой измеряется коэффициент отражения сферических волн.

В книге “Общая акустика” [2] М.А. Исакович рассматривает различные типы сферических волн – бегущих и стоячих – и их связь между собой, не вводя требования отсутствия особенности в центре. В частности, на равных правах рассматриваются функции $\sin(kr)/r$ и $\cos(kr)/r$ (k – волновое число, r – расстояние от центра). Обе функции состоят из двух бегущих сферических волн: $\exp(-ikr)/r$ (бежит к центру) и $\exp(+ikr)/r$ (бежит от

центра). Каждая из волн имеет особенность в центре. При отражении с коэффициентом отражения -1 получаем поле без особенности – $\lim_{r \rightarrow 0} [\sin(kr)/r] \sim k$. Если же коэффициент отражения равен $+1$, получим стоячую волну с особенностью – $\lim_{r \rightarrow 0} [\cos(kr)/r] \sim r^{-1}$. Наличие особенности

можно интерпретировать как сверхфокусировку поля. В первом случае поле постоянно в области $r \leq k^{-1}$, во втором же оно неограниченно стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Поле с особенностью можно получить также, если устроить полное поглощение отраженной волны. В этом случае останется одна падающая волна – $\exp(-ikr)/r$ с особенностью в центре.

возникает естественный вопрос, возможны ли такие рассеиватели с малым волновым размером a , коэффициент отражения от которых заметно отличается от -1 ? При поверхностном рассмотрении этого вопроса обращают на себя внимание различия между отражением плоской волны от плоской границы и сферической волны от сферической границы (рис. 1). При отражении плоской волны коэффициент отражения $+1$ получается при отражении от акустически жесткой границы, коэффициент отражения -1 – при отражении от акустически мягкой границы. При отражении сферической волны, как от жесткого, так и от

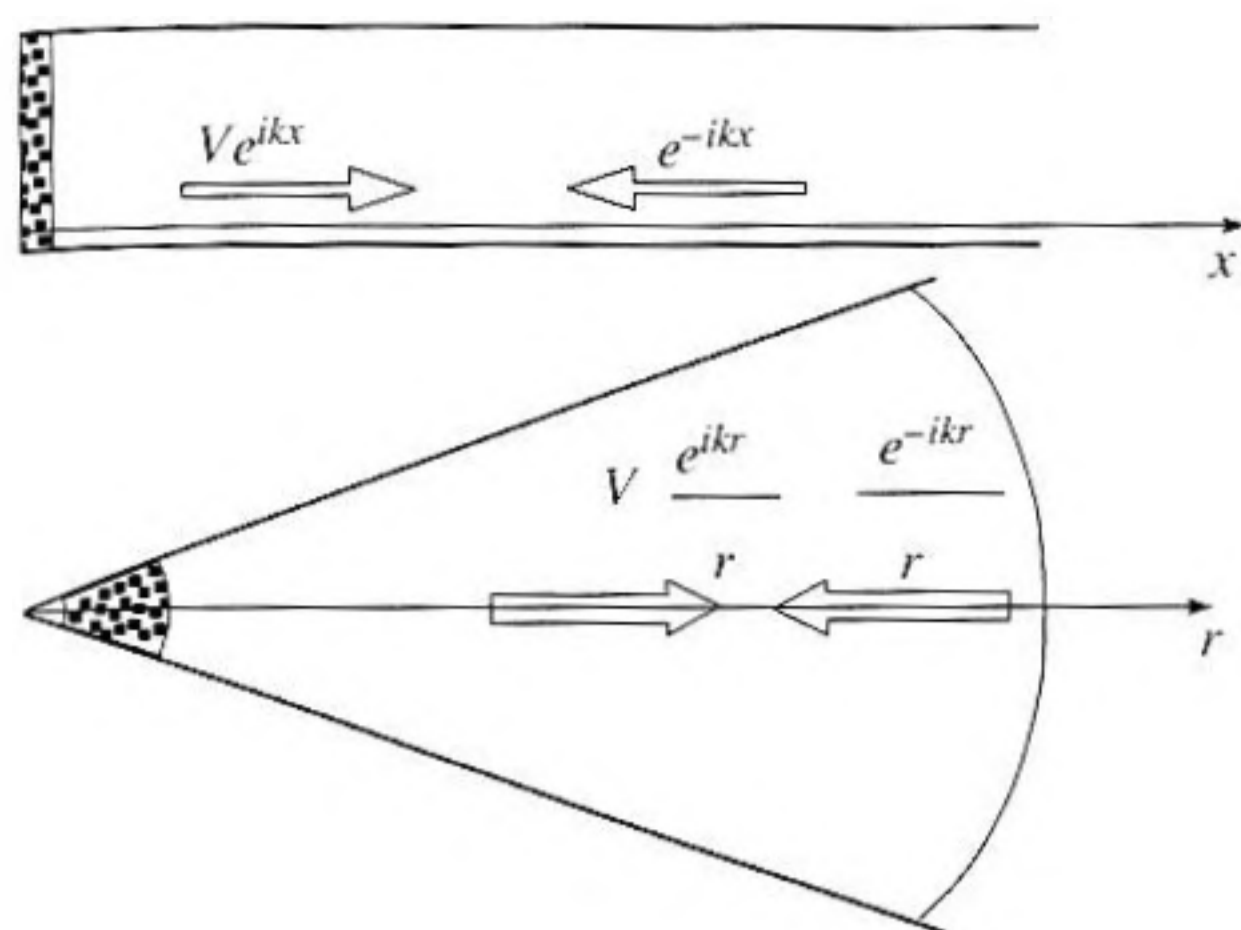


Рис. 1. Отражение от препятствия плоской и сферической волны.

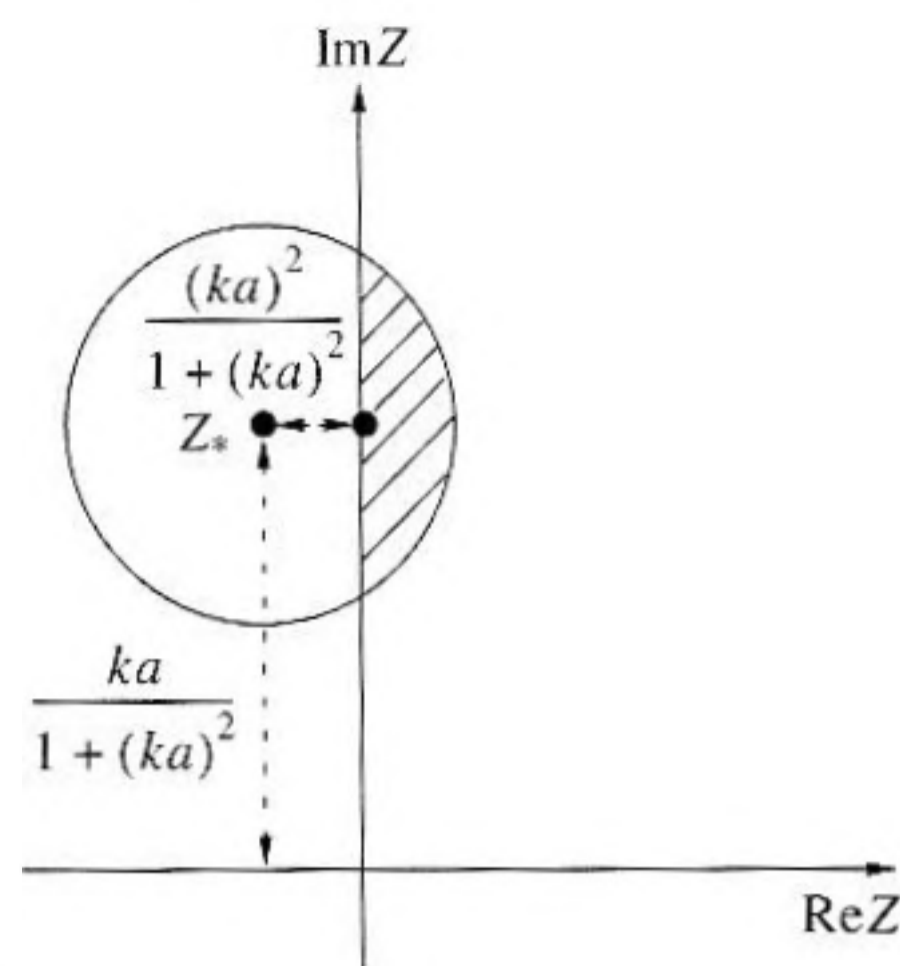


Рис. 2. Функция $F(Z)$ на комплексной плоскости. Z_* – точка, где функция имеет особенность.

мягкого центра коэффициент отражения равен -1 (см. ниже формулу (1)). Более того, как отмечено в [2], при отражении от малой сферы с любым чисто активным импедансом коэффициент отражения близок к -1 . Рассмотрим задачу об отражении от малого препятствия с заданным импедансом более подробно.

Пусть в центре сходящейся сферически симметричной волны $P_{in}(r) = P_0 \frac{\exp(-ikr)}{kr}$ расположено сферическое препятствие радиусом a , характеризующееся нормированным импедансом $Z = -\frac{1}{\rho c u(a)} \frac{p(a)}{r}$. Коэффициент отражения выражается через импеданс следующим образом:

$$V = e^{-2ika} \frac{Z(ika + 1) - ika}{Z(ika - 1) + ika} \quad (1)$$

Эта формула, в частности, дает при $Z = 0$ (акустически мягкая граница) $V = -e^{-2ika} \approx -1$, а при $|Z| = \infty$ (акустически жесткая граница) $V = e^{-2ika} \frac{ika + 1}{ika - 1} \approx -1$.

Давление на границе препятствия также выражается через его импеданс:

$$\begin{aligned} P(a) &= P_0 \frac{\exp(-ika)}{ka} \frac{2Zika}{Z(ika - 1) + ika} = \\ &= P_0 \frac{\exp(-ika)}{ka} F(Z) \\ F(Z) &= \frac{2Zika}{Z(ika - 1) + ika} \end{aligned} \quad (2)$$

Функция $F(Z)$ описывает отличие полного давления на границе препятствия от давления в падающей волне. Анализ поведения функции $F(Z)$ удобно провести, рассматривая эту функцию как комплексное преобразование плоскости Z на

плоскость $F(Z)$. Функция $F(Z)$ имеет особенность, когда знаменатель в (2) равен 0, т.е. при $Z = Z_* = \frac{-ika}{-1 + ika} = \frac{ika - (ka)^2}{1 + (ka)^2}$. Этот импеданс имеет отрицательную вещественную часть. Если ограничиться только пассивными отражателями, не добавляющими энергию в систему, то всю полуплоскость $\text{Re}Z < 0$ следует считать нефизичной. Ближайшая физическая реализуемая точка на комплексной плоскости импеданса находится на мнимой оси в точке $Z = ika$, и в этой точке достигается максимум функции $F(Z)$ при $\text{Re}(Z) \geq 0$. Подставив это значение в (1), получим, что при таком импедансе коэффициент отражения равен $+1$. При $|Z| \gg ka$ $F(Z) = 2ka$, соответственно в таком случае результирующее давление много меньше давления в падающей волне.

Далее исследуем ширину области изменения Z , в которой у давления на препятствии сохраняется особенность $1/ka$. Это позволит определить требования к настройке импеданса, или частоты.

Представим Z вблизи точки $Z = ika$ в виде

$$Z = ika(1 + \epsilon), \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (3)$$

Разлагая функцию $F(Z)$ в районе максимума $Z = ika$ по ϵ , находим область, в которой $|F(\epsilon)|$ уменьшается не более, чем в 2 раза по сравнению с максимальным значением. Эта область – круг с радиусом $2(ka)^2$ с центром в точке $-(ka)^2 + ika$ (рис. 2).

Например, при $Z = \frac{ika}{ika + 1}$, $F(Z) = 1$, $V = 0$, что соответствует полному поглощению отраженной волны.

Далее вместо сферической волны будет рассматриваться волна в конусе с жесткими стенками, так как экспериментально проблема исследовалась именно в этой постановке.

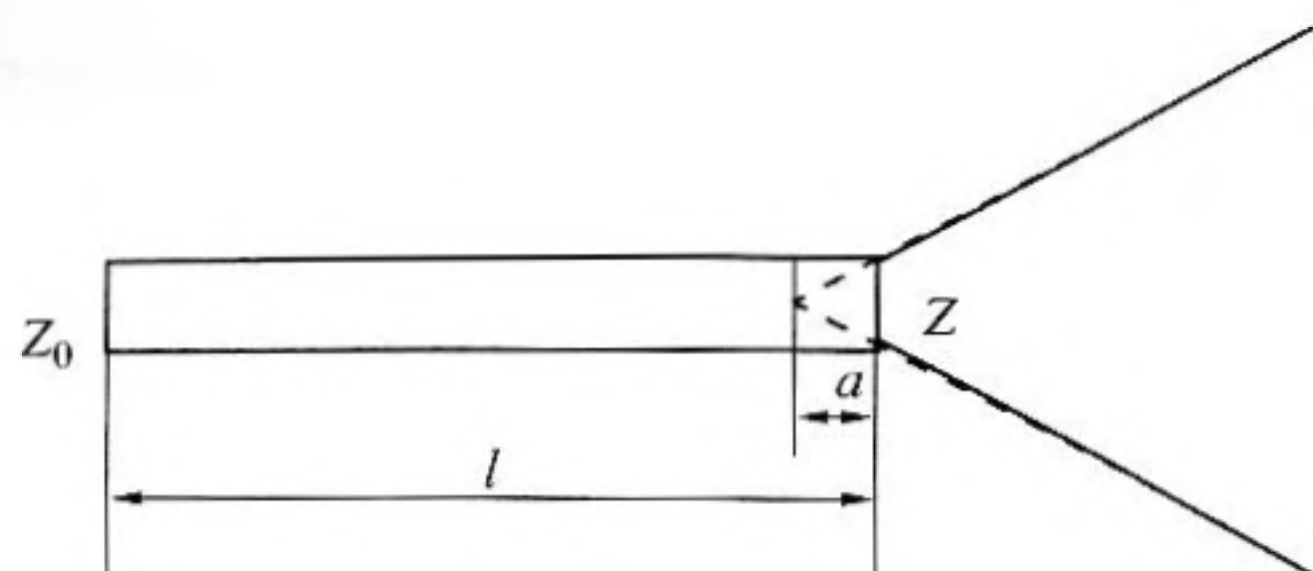


Рис. 3. Конус с присоединенной трубкой. Z_0 – импеданс у свободного конца трубки, Z – импеданс на стыке трубка – конус.

Для получения необходимого импеданса можно использовать либо трубку, либо компактную (все размеры много меньше длины волны) полость, присоединенные к узкой части конуса. При присоединении к конусу трубки длины l (рис. 3), импеданс на свободном конце которой равен Z_0 , импеданс на конце трубки, присоединенной к конусу равен:

$$Z = \frac{Z_0 + 1 + (Z_0 - 1)e^{2ikl}}{-Z_0 - 1 + (Z_0 - 1)e^{2iikl}} \quad (4)$$

Если $Z_0 = 0$, т.е. трубка открыта, то формула (4) принимает вид:

$$Z = \frac{-1 + e^{2ikl}}{1 + e^{2iikl}} = itg(kl) \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что для выполнения условия (3) длина трубки должна быть близка к $\lambda n/2$, где λ – длина звуковой волны, $n = 1, 2, \dots$. Если трубка закрыта, то $l \approx \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda n}{2}$.

Компактная полость, присоединенная к конусу, создает импеданс $Z = i \frac{c\sigma}{\omega\Omega}$, σ – площадь сечения отверстия, Ω – объем. Условие выполнения (3) записывается в этом случае следующим образом:

$$\Omega = \frac{\sigma a}{(ka)^2} \quad (6)$$

Эксперименты по измерению коэффициента отражения проведены на установке, схема которой дана на рис. 4. Основной частью установки является металлический конус. В широкой части конуса расположен динамик, который создает сходящуюся сферическую волну. В узкой части конус обрезан на расстоянии $a = 2$ см от вершины. Диаметр конуса на срезе примерно равен 1 см. Со звуковой карты на динамик подается сигнал с частотой, линейно изменяющейся по времени (ЛЧМ сигнал). Коэффициент отражения вычисляется по сигналам, поступающим с двух микрофонов,

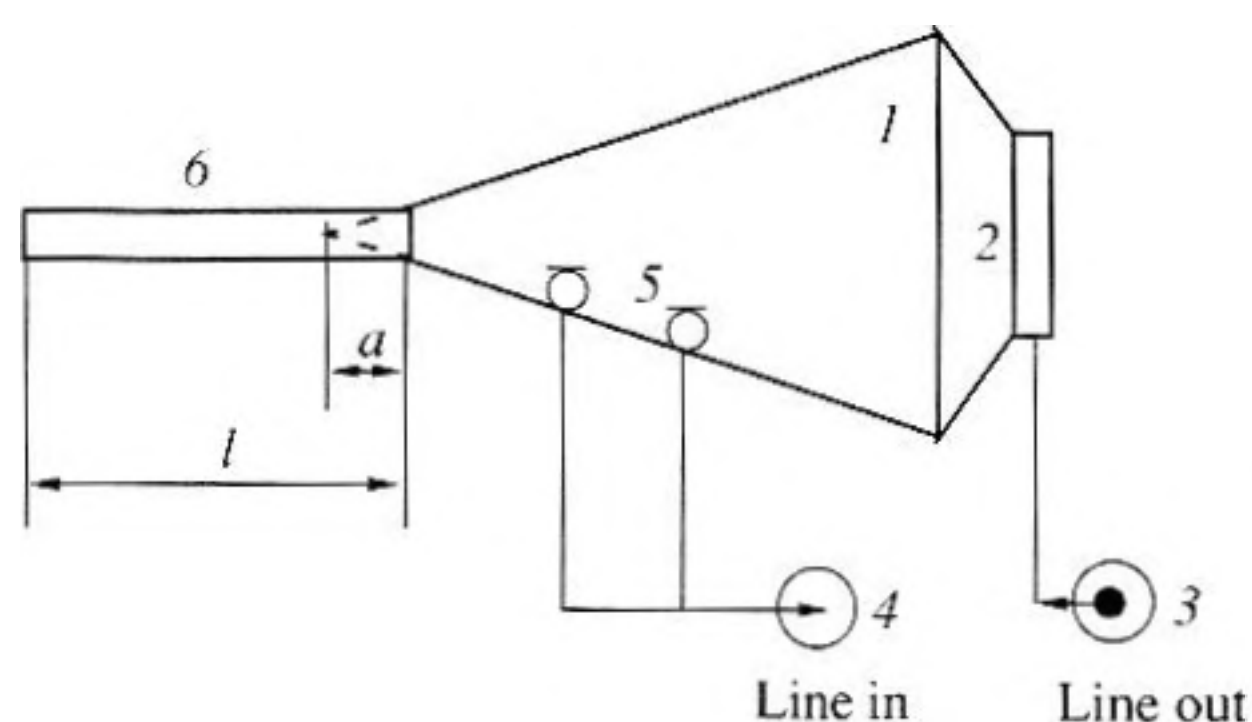


Рис. 4. Схема установки для измерения коэффициента отражения в конусе. 1 – конус, 2 – динамик, 3 – линейный выход звуковой карты, 4 – линейный вход звуковой карты, 5 – микрофоны, 6 – нагрузка в виде трубки.

установленных в конусе на разном расстоянии от его вершины. Если расстояния от вершины конуса до микрофонов равно r_1 и r_2 , а измеренные давления равны, соответственно, p_1 и p_2 , то коэффициент отражения можно найти по формуле:

$$V = \frac{(r_2/r_1)e^{-ikr_1} - (p_1/p_2)e^{-ikr_2}}{(p_1/p_2)e^{ikr_2} - (r_2/r_1)e^{ikr_1}} \quad (7)$$

Так как в формулу (7) входит только отношение давлений, то в эксперименте измеряется отношение модулей амплитуд давлений и их разность фаз на двух микрофонах. В эксперименте использовалась программа SpectraLAB, которая позволяет получать зависимости отношения амплитуд и разности фаз от частоты. При этом нет необходимости проводить калибровку микрофонов в абсолютных единицах и использовать опорный сигнал. Такой способ удобен, т.к. позволяет получать коэффициент отражения с помощью двухканальной звуковой карты за одно измерение. Учет неодинаковости чувствительностей каналов проводился с помощью калибровки микрофонов и измерительных трактов по известному коэффициенту отражения от открытого среза конуса.

Экспериментально были исследованы отражения от открытого среза конуса, закрытого среза конуса и открытой трубки, закрытой трубки, закрытого объема, присоединенных к срезу конуса. Некоторые результаты измерений приведены ниже. На рис. 5 приведены экспериментальные значения коэффициента отражения для конуса, к которому присоединена открытая трубка и для конуса, к которому присоединена закрытая трубка. Длина трубки в обоих случаях равна 0.32 м. Как видно из графика, модули коэффициентов отражения имеют провалы на резонансных частотах трубки. Для открытой трубки удалось получить минимальный модуль коэффициента отражения меньше 0.2 на частоте 513 Гц. Для закрытой труб-

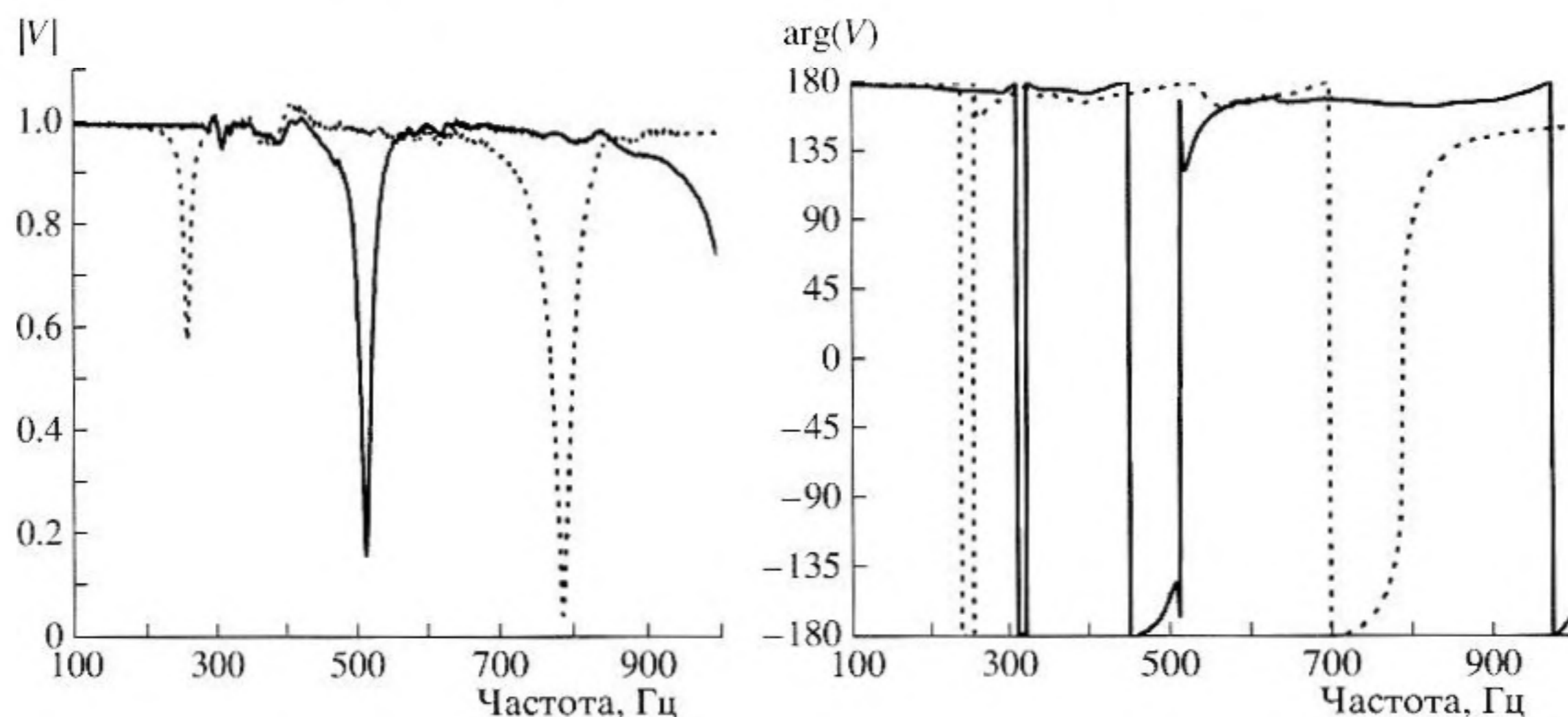


Рис. 5. Модуль и фаза коэффициента отражения при присоединении к конусу открытой трубки (сплошная линия) и закрытой трубки (пунктирная линия). Длина трубки в обоих случаях равна 0.32 м.

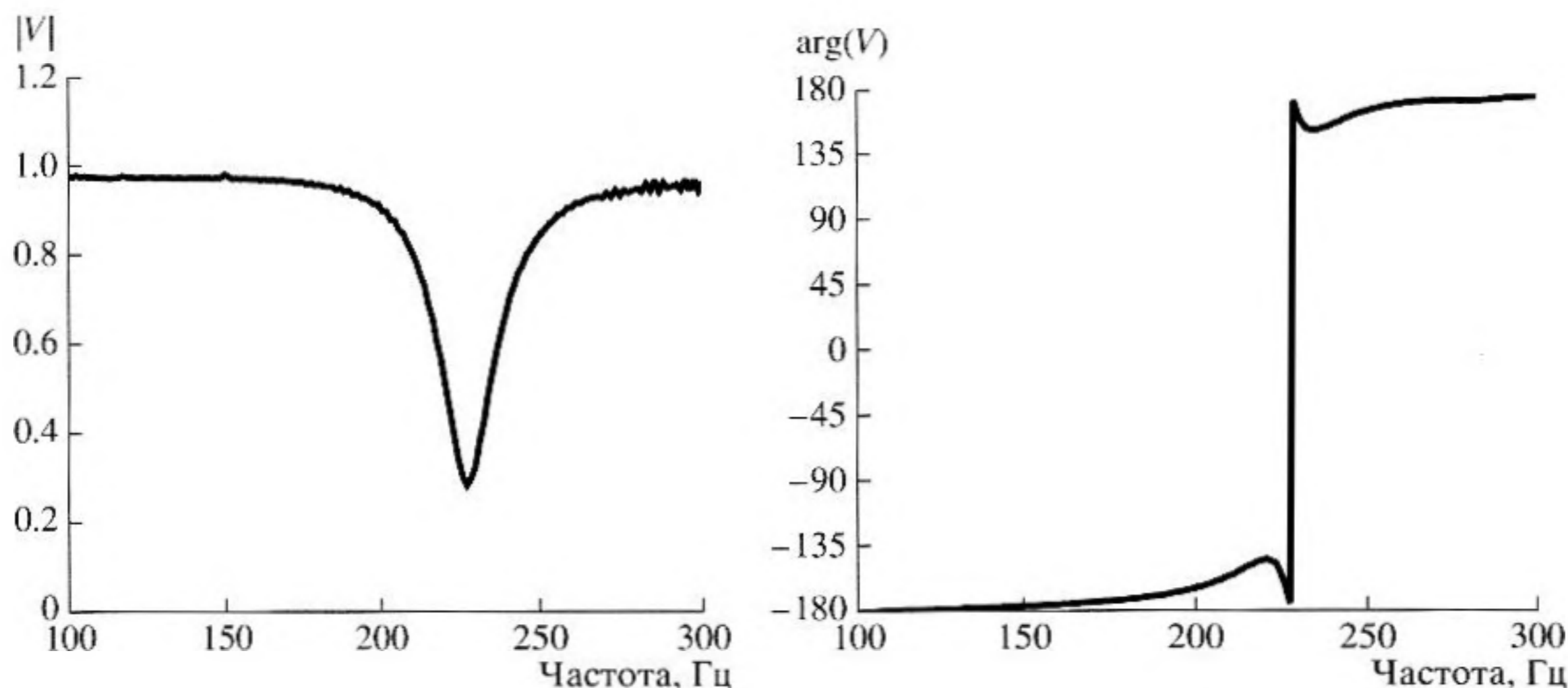


Рис. 6. Модуль и фаза коэффициента отражения при нагрузке в виде малого объема.

ки минимальный модуль коэффициента отражения примерно равен 0.05. Отметим, что фаза при этом значении равна 0, т.е. вещественная часть коэффициента отражения положительна.

На рис. 6 приведен результат измерения коэффициента отражения в конусе с присоединенным объемом. На частоте 227 Гц удалось получить коэффициент отражения меньше 0.3. Заметим, что при длине волны около 1.5 м размер объема составил всего около 5 см.

Для одного из минимумов коэффициента отражения – на частоте 513 Гц (рис. 5, открытая трубка) – измерено распределение давления вдоль оси конуса. Измерение выполнено зондом, пропущенным через открытую трубку. Результаты измерения представлены на рис. 7. Квадратами показано измеренное распределение амплитуды давления,

нормированной на амплитуду на срезе конуса $x = a = 0.02$ м. Сплошные линии – теоретический расчет поля при различных значениях модуля коэффициента отражения. Как видно, экспериментальное распределение соответствует теоретическому значению коэффициента отражения -0.2 . Для сравнения здесь же показано экспериментальное распределение давления для открытого конуса без трубки (круги) при том же напряжении на динамике, как при измерении давления с трубкой. Максимальное давление в конусе с присоединенной трубкой увеличилось по сравнению с максимальным давлением в открытом конусе более чем в 4 раза.

Конструкции, подобные конусу, используемому в эксперименте, рассматривались в работах [3, 4, 5], где исследованы возможности создания больших амплитуд давления с помощью резона-

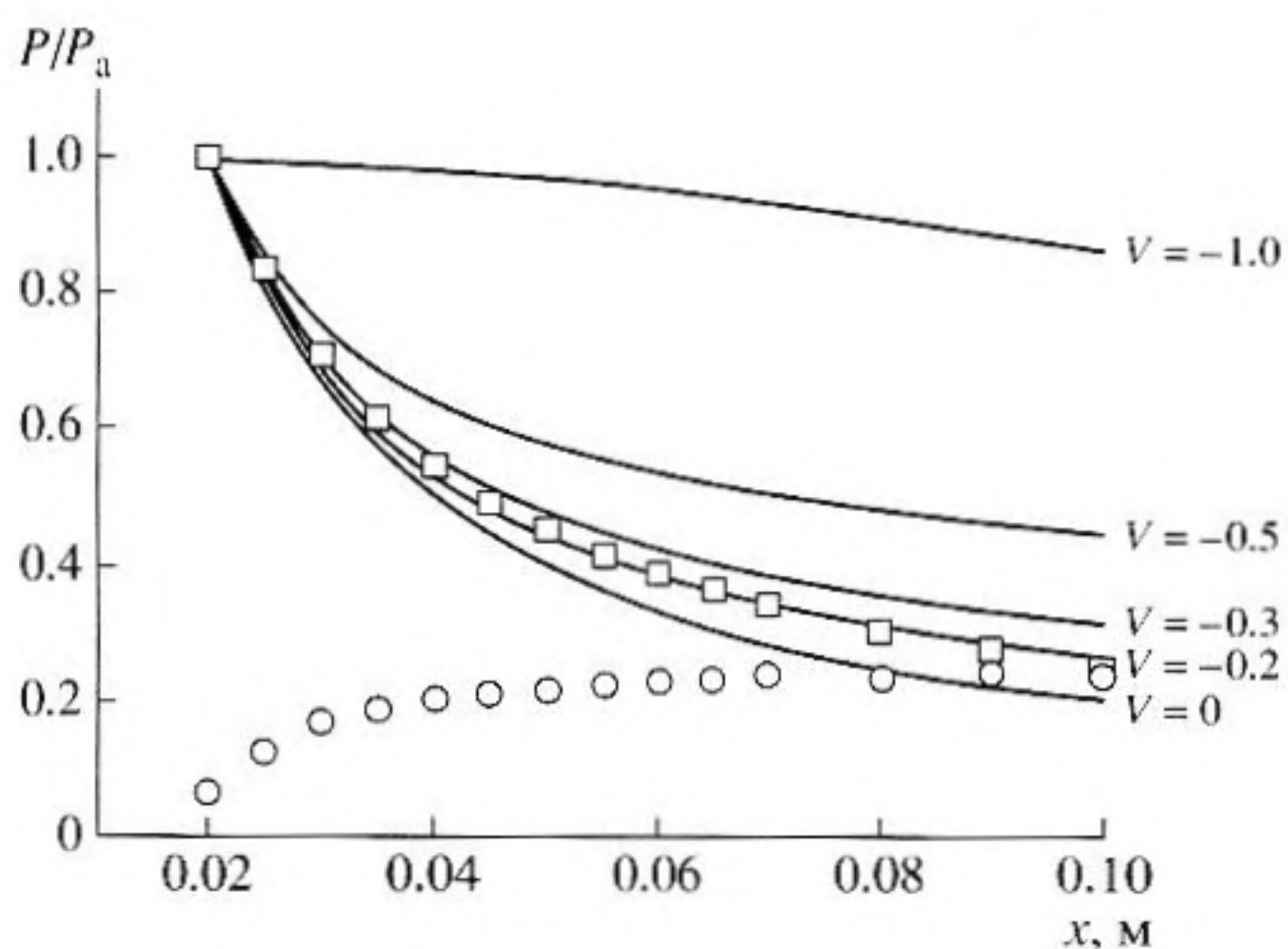


Рис. 7. Распределение давления вдоль оси конуса на частоте 513 Гц. Квадратами обозначены экспериментальные значения при присоединении трубки, сплошными линиями – теоретические распределения при коэффициентах отражения $V = 0, -0.2, -0.3, -0.5, -1$. Давление нормировано на экспериментальное значение на срезе конуса P_a (расстояние от вершины $x = 0.02$ м). Кругами обозначено экспериментальное распределение давления в открытом конусе без трубки.

торов с геометрической дисперсией – осесимметричных сосудов с переменным поперечным сечением, в частности – конических. Геометрическая дисперсия препятствует перекачке энергии в высшие гармоники, именно это позволило получить в этих работах амплитуду акустического давления в несколько раз превосходящую стационарное давление газа в резонаторе. Представляется, что с помощью модификации коэффициента отражения, исследованной в настоящей работе, в этих резонаторах можно было бы создать дополнительное усиление звука в суженной части.

В заключение сформулируем основные результаты работы. Дано теоретическое обоснование возможности фокусировки сферической вол-

ны в области, с размерами много меньше длины волны. Эта сверхфокусировка достигается за счет создания специального импеданса в фокусе. Предложена конструкция, реализующая необходимый импеданс. Изготовлена установка, позволяющая контролировать коэффициент отражения сферической волны (аналог обычной измерительной трубы) и экспериментально получены коэффициенты отражения с модулем менее 0.1 (по амплитуде) на ряде частот, соответствующих теоретическим значениям, а также коэффициент отражения с положительной действительной частью. Показано экспериментально, что на этих частотах поле в конусе имеет вид бегущей к центру волны с добавлением небольшой доли отраженной волны. Экспериментально подтверждена возможность значительного увеличения максимального давления за счет изменения импеданса вблизи вершины конуса. К сожалению, пока не удалось получить коэффициент отражения, близкий к +1.

Отметим, что при достижении больших амплитуд неизбежно возникновение нелинейных эффектов, которые не рассматривались в данной работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке НШ-5242.2006.2, РФФИ-05-08-33-461.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: Гос. изд. Физ.-мат. лит., 1959. С. 377.
2. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. С. 278–282.
3. Lawrenson C., Lipkens B., Van Doren T. Measurements of macrosonic standing waves in oscillating cavities. // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 102. P. 3064.
4. Ilinskii Y., Lipkens B., Lucas T., Van Doren T., Zabolotskaya E. Nonlinear standing waves in acoustical resonator. // J. Acoust. Soc. Amer. 1998, V. 104. P. 2664–2674
5. Daniels C., Finkbeiner J., Steinetz B., Li X., Raman G. Nonlinear oscillations and flow of gas within closed and open conical resonators. /NASA/TM-2004-212902, 2004.

Superfocusing of a Spherical Wave: Theory and Experiment

M. Yu. Gureev and M. A. Mironov

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia

e-mail: mironov@akin.ru

Abstract—The possibility of focusing a spherical wave within a region considerably smaller than the wavelength is studied theoretically and experimentally. The coefficient of reflection of a spherical wave from a small rigid or soft sphere is -1 . Consequently, the total field near such scatterers remains finite as the radius of the sphere tends to zero. The power of the acoustic field concentrates in this case in a region whose radius is proportional to the acoustic wavelength. The field can be enhanced by choosing an appropriate reflection coefficient. For example, if the reflection coefficient is made equal to 0, the sound pressure will be created by the converging wave alone. As the observation point approaches the center, this field increases without limit as $1/r$, where r is the distance from the center. Structures that provide the absorption of the converging wave are analyzed. The experimental setup is described, and the experimental results demonstrating a strong absorption (the reflection coefficient does not exceed 0.2) of the converging wave are presented. The main result of the study is that it experimentally corroborates the possibility of focusing the wave in a region whose dimensions are much smaller than the wavelength.