

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ**

УДК 534.2.532

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОСЛОЙНЫХ СОТОВЫХ  
ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ С ЛИЦЕВОЙ  
ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПАНЕЛЬЮ**

© 2007 г. А. Ф. Соболев

*Филиал ФГУП ЦАГИ "Московский комплекс ЦАГИ"*

*107005 Москва, ул. Радио 17*

*E-mail: acoustic@mktsagi.ru; sobolevaf@rambler.ru*

Поступила в редакцию 4.10.06 г.

На основе известных приближенных теорий и последних экспериментальных данных разработана полуэмпирическая теория однослойных сотовых звукопоглощающих конструкций (ЗПК) резонансного типа. Получены приближенные формулы для расчета эффективного нормального импеданса, учитывающие геометрические параметры ЗПК, высокие уровни звукового давления, наличие сносящего потока, а также нелинейное взаимодействие звука на разных частотах в пределах заданного третьоктавного спектра воздействующего шума. Проведено сопоставление численных расчетов по приближенным формулам с результатами экспериментов, а также с экспериментальными и теоретическими результатами других работ. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными.

PACS: 43.20.Tb, 43.28.Py

Повышение требований по шуму, предъявляемых к современным самолетам, приводит к необходимости совершенствования старых и разработки новых способов снижения шума, создаваемого самолетом на местности. Одним из эффективных средств снижения основного источника шума авиационного двигателя – вентилятора является использование звукопоглощающих конструкций (ЗПК), которые устанавливаются на стенках воздухозаборника и канала наружного контура. В настоящее время наибольшее развитие получили резонансные сотовые конструкции с лицевой перфорированной панелью. Эти конструкции в применении к каналам авиационных двигателей оказались чрезвычайно удачным изобретением, как с точки зрения снижения шума, так и с точки зрения их устойчивости к длительным силовым воздействиям. Наилучшую акустическую эффективность они проявляют как раз при высоких уровнях звукового давления и скоростях потока, какие имеют место в каналах авиационных двигателей. Вместе с тем высокие уровни звукового давления и наличие сносящего потока резко усложняют математическое описание звукопоглощающих конструкций такого типа. Серьезное исследование сотовых резонансных ЗПК началось в 70-х годах прошлого столетия и продолжается по настоящее время. Однако значительно раньше существенный вклад в изучение акустических резонаторов внес Рэлей [1]. Позднее в работе Крендалла [2] разработана теория распро-

странения звука в узких трубах с учетом вязкости. Результаты этих исследований актуальны и сегодня. Они представляют по существу основу многих существующих полуэмпирических теорий по ЗПК резонансного типа.

Хорошо известно, что мерой реакции поглощающей поверхности на воздействующее звуковое давление является ее нормальный импеданс (далее просто импеданс) [3]. Импеданс полностью описывает все свойства ЗПК и является основной величиной, которая ответственна за формирование структуры поля в канале под влиянием ЗПК. Все существующие полуэмпирические теории направлены на определение импеданса ЗПК с учетом их геометрических параметров, частоты звуковой волны, уровня звукового давления, скорости потока, скользящего вдоль лицевой перфорированной панели, а также скорости потока, принудительно эжектируемого через отверстия. Из известных к настоящему времени полуэмпирических теорий в первую очередь следует отметить теорию Меллинга [4]. Однако она не учитывает наличие потока. В работе Гуэсса [5] предложена полуэмпирическая теория, позволяющая определять импеданс ЗПК с учетом высоких уровней звукового давления и наличия сносящего потока. В ней указанные параметры учитываются в упрощенном виде в соответствии с работой Ингарда [6]. В этой работе предложен также метод решения полученного нелинейного уравнения по определению импеданса. Полуэм-

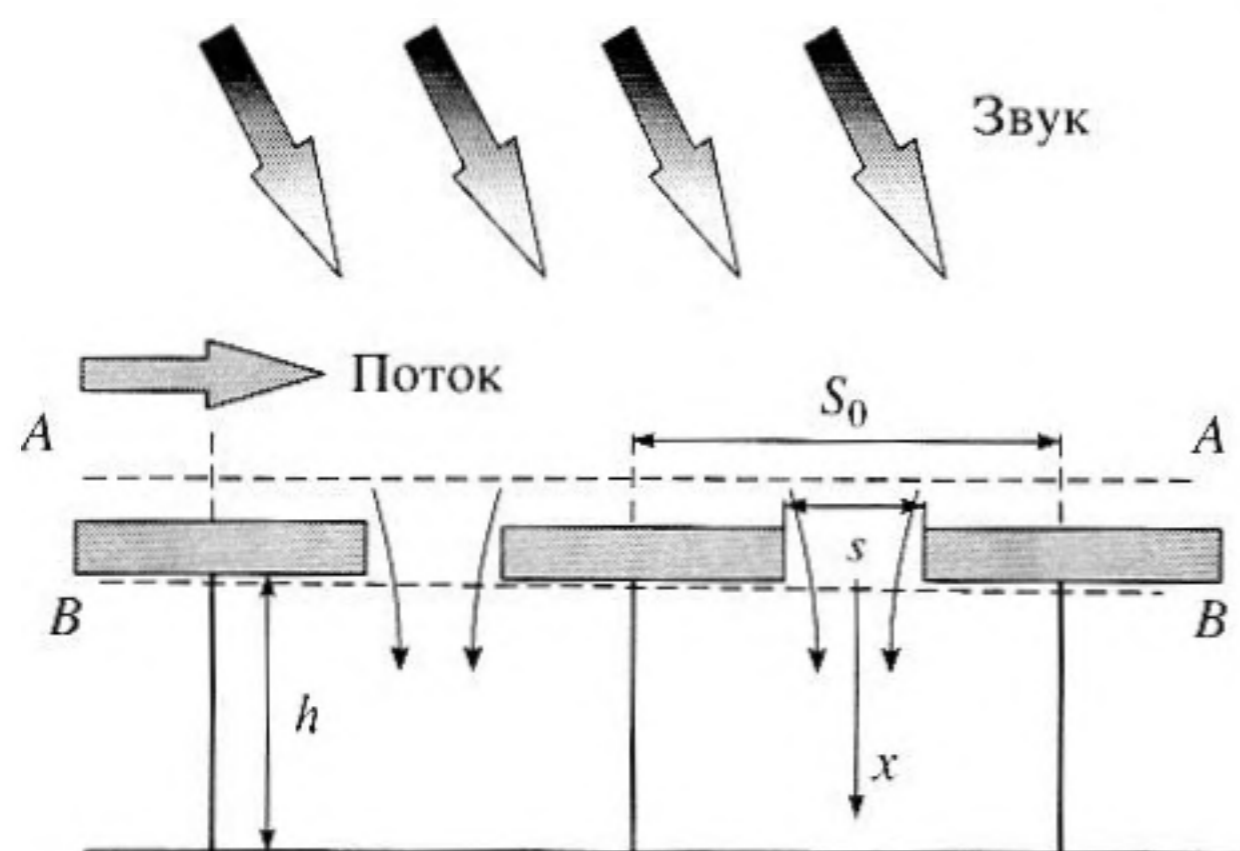


Рис. 1. Схема сотовой звукопоглощающей конструкции.

пирическая теория, разработанная в работе [7], учитывает эжекцию постоянного потока через отверстие перфорированной панели. Наличие потока приводит к появлению добавочного сопротивления в формуле для импеданса, что в определенной мере снижает роль нелинейного члена, а следовательно, зависимость импеданса от уровня звукового давления. В работе [8] сделана попытка более детального изучения течения в отверстиях перфорированной панели. Предполагалось, что поток в отверстии состоит из однородного безвихревого ядра и ламинарного пограничного слоя. Однако для количественного описания импеданса все равно пришлось вводить эмпирические константы. В работе [9] предложена модель резонатора Гельмгольца для поглощения звука высокой интенсивности. В этой модели для описания нестационарных процессов в горле резонатора использованы упрощенные нелинейные уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Получено уравнение нелинейных вынужденных колебаний резонатора. В частном случае низкочастотного приближения рассчитана частотная зависимость коэффициента звукопоглощения в зависимости от параметров задачи.

При изучении влияния высоких уровней звукового давления, как правило, ограничиваются гармоническим воздействием на звукопоглощающую конструкцию. В действительности же ЗПК подвергается воздействию звука сложного спектрального состава. При этом в отверстиях перфорированной панели происходит нелинейное взаимодействие звука на разных частотах и импеданс на некоторой частоте становится зависимым от уровня звука на других частотах. В настоящее время этот вопрос практически не изучен ни теоретически, ни экспериментально.

В последнее время значительные усилия были направлены на экспериментальное и теоретическое исследование влияния сносящего потока и пограничного слоя на импеданс ЗПК. При наличии потока строгое математическое моделирование механизмов, которые определяют импеданс перфорированной панели, является чрезвычайно трудным. Теоретические модели различной сложности в лучшем случае описывают тенденцию, но детальное подтверждение существующим экспериментальным данным оставляет желать лучшего [10–16]. В частности, в работе [16] результаты современного теоретического анализа влияния потока на импеданс отверстия сравниваются с новыми экспериментальными результатами. Показано, что только для действительной части импеданса получено удовлетворительное соответствие теории и эксперимента. Более того, во многих теоретических моделях в той или иной форме используются эмпирические параметры, что снижает значимость этих моделей.

Из вышеприведенного следует, что, несмотря на огромный прогресс, достигнутый в исследовании импеданса перфорированной панели, а также методов определения импеданса единственной достаточно простой и в то же время учитывающей все основные эффекты полуэмпирической теории пока не существует. Некоторые теории близки друг к другу, в то время как другие дают результаты, существенно отличающиеся от первых. Пока нет единой точки зрения относительно определения поправки, которая добавляется к конечной длине отверстия. Ни в одной из теорий не учитывается спектральный состав воздействующего шума. И, наконец, отсутствует единая точка зрения на то, как следует правильно описать поток вблизи поглощающей поверхности.

Целью этой работы является попытка создания полуэмпирической теории однослойной резонансной ЗПК с перфорированной панелью в качестве поглощающего слоя на основе обобщения известных теорий [5–9] с использованием последних экспериментальных данных. В предлагаемой теоретической модели сделана попытка учета влияния нелинейного взаимодействия звука на разных частотах в пределах заданного третьоктавного спектра воздействующего шума на импеданс конструкции.

Рассмотрим падение звука высокой интенсивности на импедансную поверхность, состоящую из перфорированной панели, сотового заполнителя и жесткого основания. Вдоль поверхности движется однородный воздушный поток (рис. 1). Под воздействием звуковой волны воздух в от-

верстиях панели совершает колебания в соответствии с частотой падающей волны. При этом предполагается, что под воздействием звуковой волны в районе отверстий происходят также колебания приграничного потока. Эти колебания создают нагрузку для звуковой волны, которую можно описать с помощью импеданса. По определению удельный (в долях  $\rho c$ ) импеданс равен

$$Z = p/\rho c v_n, \tag{1}$$

где  $p$  – полное акустическое давление на контрольной поверхности, расположенной вблизи перфорированной пластины,  $v_n$  – нормальная к поверхности компонента акустической скорости на этой же контрольной поверхности,  $\rho$  – плотность воздуха,  $c$  – скорость звука в воздухе. Из-за периодичности расположения отверстий, при решении задачи можно ограничиться элементом площади поверхности, приходящимся на одно отверстие (вместе с отверстием) в соответствии с процентом перфорации панели. На рис. 1 этот элемент поверхности ограничен вертикальными штриховыми линиями. В силу малости толщины панели по сравнению с длиной волны, жидкость в отверстии можно считать несжимаемой.

Рассмотрим вязкое течение несжимаемой жидкости через круглое отверстие-трубку перфорированной панели. Уравнение течения записывается следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \tag{2}$$

где  $p$  – акустическое давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Предположим, что акустическая скорость в отверстии направлена вдоль его стенок и является функцией радиуса –  $r$  и длины –  $x$ , причем вдоль  $x$  она меняется достаточно медленно. В этом случае уравнение (2) для скорости вдоль оси  $x$  можно записать следующим образом

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x. \tag{3}$$

Проинтегрируем уравнение (3) по объему отверстия, ограниченному сверху контрольной поверхностью АА, а снизу контрольной поверхностью ВВ, расположенной в конце отверстия-трубки. С учетом теоремы Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l v_s dx + \frac{1}{2} (v_{s,1}^2 - v_{s,0}^2) = \\ = -\frac{1}{\rho} (p_{s,1} - p_{s,0}) + \frac{2\nu l}{a} \left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=a}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$v_s = \frac{1}{S} \iint_S v_x dS, \quad p_s = \frac{1}{S} \iint_S p dS,$$

$S$  – площадь отверстия  $p_{s,0}$  – акустическое давление на контрольной поверхности перед отверстием  $p_{s,1}$  – акустическое давление за отверстием,  $v_{s,0}$  – акустическая скорость на контрольной поверхности,  $v_{s,1}$  – акустическая скорость в конце отверстия-трубки,  $a$  – радиус трубки,  $l$  – длина трубки. В общем случае длина трубки в уравнении (4) должна браться больше толщины перфорированной панели на некоторую величину, определяемую дополнительной массой жидкости вблизи отверстия, колеблющейся вместе с жидкостью в отверстии. Об этом подробнее будет сказано ниже. Поскольку средняя акустическая скорость вдоль отверстия по предположению меняется мало, интеграл в (4) можно заменить его средним значением и считать  $v_s$  средней скоростью жидкости в трубке

$$\begin{aligned} l \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_{s,1}^2 - v_{s,0}^2) = \\ = -\frac{1}{\rho} (p_{s,1} - p_{s,0}) + \frac{2\nu l}{a} \left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=a}. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, получили уравнение, которое описывает движение жидкости в отверстии-трубке с учетом нелинейных эффектов. Первый член в левой части (5) представляет ускорение массы жидкости в отверстии под действием перепада давления  $p_{s,0} - p_{s,1}$ , второй член (нелинейный) соответствует динамическому напору жидкости за счет сужения трубки тока. Второй член в правой части соответствует потерям за счет трения на стенках отверстия-трубки.

К уравнению движения (5) следует добавить еще уравнение неразрывности

$$V S_V + v_s S = v_{s,1} S_1. \tag{6}$$

В этом уравнении  $V$  – скорость потока вдоль перфорированной пластины. Первый член слева соответствует переменному потоку жидкости (с частотой падающей волны) через неизвестную часть отверстия  $S_V \leq S$ , возникающему за счет отклонения основного потока под действием падающей звуковой волны. Второй член слева соответствует переменному потоку жидкости на входе в отверстие обусловленному падающей звуковой волной. Член в правой части равенства описывает поток жидкости через уменьшенную площадь за счет сужения трубки тока. Для упрощения выражения (6) введем процент перфорации панели равный отношению площади отверстия  $S$  к площади перфорированной панели, при-

ходящейся на это отверстие  $F = S/S_0$ , а также коэффициент расхода через отверстие  $C_d = S_1/S$  и коэффициент пограничного слоя  $C_v = S_v/S$ . Из дальнейшего анализа будет ясно, что эти коэффициенты должны определяться из эксперимента. С учетом этих обозначений имеем

$$v_{s,0} = v_s F, \quad v_{s,1} = v_s / C_d + V C_v / C_d.$$

Отсюда после подстановки этих соотношений в (5) получим

$$l \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s^2 (1 - F^2 C_d^2) + 2 v_s V C_v}{2 C_d^2} = \frac{1}{\rho} (p_{s,0} - p_{s,1}) + \frac{2 v l \partial v_x}{a \partial r} \Big|_{r=a}. \quad (7)$$

При выводе уравнения (7) был исключен постоянный член  $\frac{1}{2} \left( \frac{V C_v}{C_d} \right)^2$ , который не имеет отношения к рассматриваемому акустическому процессу. Мысленно разделим перепад давления  $(p_{s,0} - p_{s,1})$  на две части: одна часть  $(p'_{s,0} - p'_{s,1})$  обеспечивает движение жидкости со средней скоростью  $v_s$  в отверстии, а вторая часть  $(p''_{s,0} - p''_{s,1})$  обеспечивает скоростной напор. Первой части перепада давления соответствует уравнение (3) без нелинейного члена. В предположении гармонической зависимости от времени ( $\exp(i\omega t)$ ) это уравнение имеет вид

$$-i\omega v_x + v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{p'_{s,0} - p'_{s,1}}{l}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) хорошо известно. Впервые оно было получено Крендаллом [2]. С граничным условием  $v_x(a) = 0$  оно имеет вид

$$v_x(r) = \frac{p'_{s,0} - p'_{s,1}}{i\rho\omega l} \left( 1 - \frac{J_0(\zeta r)}{J_0(\zeta a)} \right), \quad (9)$$

где  $\zeta = \sqrt{-i\omega/\nu}$  – волновое число Стокса,  $J_0(z)$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Отсюда

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{p'_{s,0} - p'_{s,1}}{i\rho\omega l} \zeta \frac{J_1(\zeta a)}{J_0(\zeta a)}, \quad (10)$$

где  $J_1(z)$  – функция Бесселя первого порядка. После подстановки (10) в (7) имеем

$$l \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s^2 (1 - F^2 C_d^2) + 2 v_s V C_v}{2 C_d^2} = \frac{1}{\rho} (p'_{s,0} - p'_{s,1}) f(v) + \frac{1}{\rho} (p''_{s,0} - p''_{s,1}), \quad (11)$$

где

$$f(v) = 1 - \frac{2 J_1(\zeta a)}{\zeta a J_0(\zeta a)}. \quad (12)$$

Предположим, что  $v_s = V_x \sin(\omega t)$ . Тогда в силу того, что колебания жидкости в отверстии осуществляются периодически и симметрично относительно положения равновесия, считаем

$$v_s^2 = \begin{cases} V_x^2 \sin^2(\omega t), & \text{если } \sin(\omega t) > 0, \\ -V_x^2 \sin^2(\omega t), & \text{если } \sin(\omega t) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Разложим (13) в ряд Фурье. В результате для первых трех членов разложения получим

$$v_s^2 = V_x^2 (0.849 \sin(\omega t) - 0.17 \sin(3\omega t) - 0.024 \sin(5\omega t)). \quad (14)$$

Соотношение (14) показывает, что вносимые искажения акустического сигнала за счет возникновения высших гармоник не являются достаточно существенными. Так, колебания на третьей гармонике ( $3\omega$ ) приблизительно на 14 дБ меньше, чем колебания на основной ( $\omega$ ) частоте. Это обстоятельство позволяет с хорошей степенью точности ограничиться первым членом разложения (14) при подстановке в (11). Следовательно, в (11) можно перейти к экспоненциальной записи и считать, что  $v_s^2 \approx 0.8491 V_x^2 \exp(i\omega t)$ . Полагая в уравнении (11)  $p'_{s,0} - p'_{s,1} = (P'_0 - P'_1) \exp(i\omega t)$ ,  $p''_{s,0} - p''_{s,1} = (P''_0 - P''_1) \exp(i\omega t)$ , получим

$$li\omega V_x + \frac{0.424 V_x^2 (1 - F^2 C_d^2) + V_x V C_v}{C_d^2} = \frac{1}{\rho} (P'_0 - P'_1) f(v) + \frac{1}{\rho} (P''_0 - P''_1). \quad (15)$$

Удельный (в долях  $\rho c$  воздуха) импеданс отверстия-трубки равен

$$Z = \frac{P'_0 - P'_1}{F V_x \rho c} + \frac{P''_0 - P''_1}{F V_x \rho c}. \quad (16)$$

Из (16) и (15) получим

$$Z = i \frac{kl}{f(v)} + 0.424 \frac{V_x (1 - F^2 C_d^2)}{c C_d^2} + \frac{V C_v}{c C_d^2}. \quad (17)$$

Таким образом, импеданс отверстия складывается из линейной и нелинейной частей.

Для учета конечных размеров отверстия-трубки вводят концевые поправки, т.е. считают  $l = t + \delta$ , где  $t$  – толщина панели,  $\delta$  – концевая поправка. С этой целью колебание жидкости в отверстии заменяют колебанием не имеющего массы поршня в бесконечном экране. При этом авторы часто

ссылаются на работу Морза и Ингарда [18], в которой получено выражение для импеданса излучения, имеющее для одиночного отверстия следующий вид

$$Z_R = R(kd) + iB(kd), \quad (18)$$

где  $R = 1 - \frac{2}{kd} J_1(kd)$ ,  $B(kd) =$

$\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kd \cos \alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha$ ,  $d = 2a$  – диаметр отверстия. Однако впервые выражение для импеданса излучения было получено в работе Рэлея [1]. Оно имеет вид аналогичный (18), в котором  $B(kd)$  имеет вид

$$B(kd) = \frac{8}{\pi kd} \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{kd}{2} \sin \alpha\right) \sin(\alpha) d\alpha. \quad (19)$$

Следует также заметить, что выражение аналогичное (18) представлено в более ранней книге Ржевкина С.Н. [19]. Численные расчеты показывают, что формула (18) полностью эквивалентна формуле, полученной Релеем.

На практике, как правило, выполняется условие  $kd \leq 1$ . В этом случае выражение (18) можно заменить его асимптотическим представлением

$$Z_R \approx R_1 + iB_1. \quad (20)$$

где  $R_1 = \frac{(kd)^2}{8}$ ,  $B_1 = \frac{4}{3\pi} kd$ . Из выражения (20) следует, что длина трубки как бы увеличивается на  $\delta = 4d/3\pi$  с каждой стороны. Однако если быть более точным, то, как показано Рэлеем [1], указанное значение концевой поправки является теоретическим верхним предельным значением. Фактическое значение концевой поправки, учитывая, что скорость в отверстии не является однородной по сечению, будет меньше. Рэлей получил и нижней предел концевой поправки, который равен  $\delta = \pi d/4$ . Таким образом, теоретически можно указать только пределы концевой поправки  $\pi d/4 < \delta < 8d/3\pi$  или  $0.785d < \delta < 0.849d$  (с учетом обоих концов отверстия). Рэлей предложил в расчетах использовать среднее значение  $\delta = 0.82d$ , которое он получил на основании более точных вычислений.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что диапазон изменения концевой поправки значительно шире, чем это следует из теории Рэлея. По всей видимости, величина концевой поправки определяется с одной стороны качеством самих отверстий, с другой стороны, точностью эксперимента. Ингард [20] указывает на разные значения величин концевых поправок для действительной ( $\delta = d$ ) и мнимой ( $\delta = 8d/3\pi$ )

частей импеданса. В работе [21] была использована одинаковая поправка для действительной и мнимой части импеданса при определении импеданса ( $\delta = 8d/3\pi$ ). Эмпирические зависимости от диаметра отверстия величины концевой поправки, полученные в работе [17], дают значения, равные  $\delta = 0.5d$  для мнимой части и  $\delta = (0.2d + 0.2d^2 + 0.016d^3)$  мм для действительной части.

Результаты собственных экспериментальных исследований показывают, что нет одинаковой поправки для всех образцов. Для некоторых образцов нужно брать  $\delta = 0.82d$ , однако, как правило, лучше всего подходит, когда  $\delta = 0.65d$ . По-видимому, это связано с тем, что края отверстий не являются идеально острыми, а имеют закругления из-за некачественного сверления, что приводит к уменьшению эффективной длины отверстия, которая становится меньше толщины панели. Возможно также, что какую то роль играет эллиптичность отверстий, которая также появляется от некачественного сверления.

Полученные выше выражения для импеданса излучения относятся к одному отверстию в перфорированной панели. Для учета взаимодействия между отверстиями вводят функцию, обратную функции Фока [22], на которую умножается концевая поправка

$$\delta \rightarrow \delta \Phi(F). \quad (21)$$

Эта функция с достаточной для практических целей точностью выражается следующей формулой [19]

$$\Phi(F) = 1 - 1.47\sqrt{F} + 0.47\sqrt{F^3}. \quad (22)$$

Если перфорированная панель обладает достаточно хорошей теплопроводностью, то в выражении для волнового числа Стокса следует использовать, как указывается в работах Сивиана [23], Ржевкина С.Н., Меллинга, эффективное значение кинематической вязкости

$$v' = v \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}}\right)^2, \quad (23)$$

где  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Следует заметить, что в работах Ингарда [6] и Гуэсса [5] указывается, что для очень коротких трубок теплопроводность стенок трубки можно не учитывать. По данным собственных экспериментов теплопроводность перфорированной металлической пластины необходимо учитывать. С учетом концевых попра-

Таблица 1

$d$ (мм) \ $t$ (мм)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0.5	0.79	0.77	0.73	0.70	0.68	0.67	0.66	0.67	0.67	0.67
0.8	0.79	0.77	0.75	0.72	0.70	0.69	0.68	0.68	0.69	0.69
1	0.80	0.78	0.76	0.74	0.72	0.71	0.71	0.70	0.70	0.71
1.2	0.81	0.80	0.77	0.76	0.75	0.74	0.74	0.73	0.73	0.73
1.5	0.82	0.81	0.79	0.77	0.76	0.77	0.76	0.76	0.76	0.76
2	0.83	0.83	0.82	0.81	0.81	0.80	0.80	0.80	0.80	0.81

вок выражение (17) преобразуется следующим образом

$$Z = \left( \frac{ikt}{Ff(v')} + \frac{ik\delta\Phi(F)}{Ff(v)} \right) + 0.424 \frac{V_x(1-F^2C_D^2)}{c} + \frac{C_V M}{FC_D^2} + \frac{Z_1}{F}, \quad (24)$$

где  $Z_1 = 1 - \frac{2}{kd} J_1(kd)$ . В этом выражении часть дли-

ны трубки, равная толщине перфорированной панели, делится на функцию  $f(v')$  с учетом вязкости и теплопроводности (если есть необходимость ее учитывать), добавочная длина трубки, соответствующая присоединенной массе делится на функцию  $f(v)$  с учетом только вязкости. Полученное выражение (24) отличается от известных выражений Меллинга, Гуесса и других аналогичных работ, во-первых, коэффициентом перед акустиче-

ским Махом в нелинейном члене  $0.424 \frac{(1-F^2C_D^2)}{FC_D^2}$ ,

во-вторых, коэффициентом  $\frac{C_V}{FC_D^2}$  перед  $M$ , кото-

рый в данном случае зависит не только от параметров пограничного слоя, но и от коэффициента расхода. Это вполне объяснимо, поскольку, чем меньше коэффициент расхода, тем труднее доле внешнего потока, которая попадает в отверстие, пройти через него при положительном полупериоде падающей волны, что приводит к появлению добавочного сопротивления. Вполне возможно, что указанные выше отличия не смогут проявиться в реальных числах, при сравнении с другими аналогичными полуэмпирическими формулами, поскольку входящие в них константы  $C_D$  и  $C_V$ , определяемые экспериментально, фактически привязаны к разрабатываемой модели, и их конкретные значения зависят от выбранной модели.

Если принять, что коэффициент расхода  $C_D$  не зависит от частоты звука, а определяется только геометрическими параметрами перфорирован-

ной панели, а именно толщиной панели и диаметром отверстий, то его можно определить на основании измерений сопротивления продуванию в трубе. Полагая в уравнения (24)  $M = 0$ , при  $\omega \rightarrow 0$  получим

$$Z_0 = \frac{32tv'}{Fcd^2} \left( 1 + \frac{\delta\Phi(F)v}{tv'} \right) + 0.424 \frac{V_x(1-F^2C_D^2)}{c} + \frac{Z_1}{F}. \quad (25)$$

Выражение (25) можно представить в виде

$$Z_0 = A + BM_{DC}, \quad (26)$$

где  $M_{DC} = V_x F/c$  – число Маха в измерительной трубе,  $A$  – независимая от скорости потока часть сопротивления перфорированной панели,  $B =$

$$= 0.424 \frac{(1-F^2C_D^2)}{F^2C_D^2}. \text{ Предположим, что для каждо-}$$

го образца проведена серия измерений сопротивления продуванию в зависимости от скорости потока в трубе. Пусть  $Z_i$  и  $M_i$  составляют набор измеренных значений сопротивления и числа Маха, а  $Z_{pi}$  – значения сопротивления продуванию, определенные по формуле (26). Коэффициент расхода определяется из условия минимума средней квадратичной ошибки

$$e_i = (Z_i - Z_{pi})^2 = Z_i^2 - 2Z_i Z_{pi} + Z_{pi}^2 = Z_i^2 - 2Z_i(A + BM_i) + (A + BM_i)^2. \quad (27)$$

Минимум квадратичной ошибки определяется уравнением

$$\sum_i \frac{de_i}{dC_D} = \frac{dB}{dC_D} \sum_i -2Z_i M_i + 2M_i(A + BM_i) = 0. \quad (28)$$

Из этого уравнения определяем

$$B = \frac{\sum_i Z_i M_i - \sum_i A M_i}{\sum_i M_i^2}. \quad (29)$$

Отсюда коэффициент расхода равен

$$C_D = \frac{1}{F \sqrt{1 + \frac{3\pi}{4} B}} \quad (30)$$

В таблице 1 приведены коэффициенты расхода для различных соотношений диаметра отверстий и толщины перфорированной панели

В выражении (24) отражено влияние высокого уровня звукового давления только на действительную часть импеданса. Что же касается его влияния на мнимую часть импеданса, то еще Меллинг отметил, что сделать весьма сложно. Единственно было отмечено, что при увеличении акустической скорости в отверстии, когда ламинарное движение превращается в турбулентное, происходит уменьшение концевой поправки. Это связано с образованием трубки тока с одной стороны отверстия, как при положительном, так и при отрицательном полупериоде звуковой волны. Для учета уменьшения присоединенной массы в работе [24] была получена эмпирическая зависимость следующего вида

$$\delta = \begin{cases} 0.85, & V < 0.4 \text{ cm/sec;} \\ 0.738 - 0.119 \ln V, & \\ 0.4 \text{ cm/sec} \leq V \leq 493 \text{ cm/sec;} & \\ 0, & V > 493 \text{ cm/sec;} \end{cases} \quad (31)$$

где  $V$  – амплитуда акустической скорости на контрольной поверхности. В работе [25] со ссылкой на опубликованную докторскую диссертацию Elnady T. приведены полуэмпирические выражения для импеданса, где влияние высокого уровня звукового давления на мнимую часть импеданса представлено следующей формулой

$$Y_{nl} = -i \frac{V_x(1 - F^2)}{FC_D^2} \quad (32)$$

Использование соотношений (31) и (32) в расчетах показало, что соотношение (31) дает слишком быстрое уменьшение присоединенной массы, а соотношение (32), наоборот слишком медленное, по сравнению с данными измерений при увеличении уровня звукового давления. Оптимальной является эмпирическая зависимость, полученная в работе [5]

$$\delta_{nl} = \delta_l \frac{1 + 5000 M_0^2}{1 + 10000 M_0^2} \quad (33)$$

где  $M_0$  – число Маха скорости в отверстии,  $\delta_l$  – концевая поправка при низких уровнях звукового давления,  $\delta_{nl}$  – концевая поправка при высоких

уровнях звукового давления. С учетом (33) выражение (24) принимает следующий вид

$$Z = \left( \frac{ikt}{Ff(v')} + \frac{ik\delta_{nl}\Phi(F)}{Ff(v)} \right) + 0.424 \frac{V_x(1 - F^2 C_D^2)}{c FC_D^2} + \frac{C_V M}{FC_D^2} + \frac{Z_1}{F} \quad (34)$$

Определение влияния скользящего потока на действительную часть импеданса сводится к определению  $C_V$ . Для определения  $C_V$  были использованы экспериментальные результаты, полученные в работах [24, 26, 27]. В результате было принято, что  $C_V = 0.12$ .

Как выше уже было отмечено, сносящий поток уменьшает присоединенную массу и, следовательно, концевую поправку. Из известных соотношений для концевых поправок мы взяли наиболее простую поправку из работы [5]. Эта поправка хорошо соответствует экспериментальным данным, полученным на установке “Канал с потоком”. Для введения этой поправки в выражение (34) следует сделать следующую замену

$$\delta_{nl} \rightarrow \delta_{nl} \frac{1}{1 + 305 M^3} \quad (35)$$

Учет расположенной за перфорированной панелью воздушной полости, представляющей собой сотовую структуру с жестким основанием, осуществляется введением в формулу (34) добавочного члена

$$Z_h = -i \frac{1 + i Y_T \operatorname{tg}(\xi_0 h)}{\operatorname{tg}(\xi_0 h) - i Y_T} \quad (36)$$

где  $Y_T$  – удельный адмитанс, определяемый теплопроводностью задней стенки воздушной полости,

$$Y_T = (1 + i)(\gamma - 1) \sqrt{\frac{\tau \omega}{2c^2}} \quad (37)$$

$\tau$  – коэффициент температуропроводности,  $h$  – глубина воздушной полости,  $\xi_0$  определяется из соотношения

$$\frac{\xi_0^2}{k^2} = \frac{1 + \frac{2}{kR}(1 - i)(\gamma - 1) \sqrt{\frac{\tau \omega}{2c^2}}}{1 - \frac{2}{kR}(1 - i) \sqrt{\frac{\nu \omega}{2c^2}}} \quad (38)$$

$R$  – эквивалентный диаметр сотовой ячейки. Без учета вязкости на задней стенке, а также вязкости и теплопроводности на боковых стенках (36) переходит в известное соотношение  $Z_h = -i \operatorname{ctg}(kh)$ .

Таблица 2

$n \backslash m$	1	2	3	4
1	500	1000	2000	4000
2	630	1250	2500	5000
3	800	1600	3150	6300

Дальнейшее преобразование выражения (34) связано с исключением амплитуды скорости путем использования соотношения

$$V_x = \frac{P_0}{\rho c |Z| F}, \quad (39)$$

где  $P_0$  – амплитуда акустического давления на контрольной поверхности. При вычислениях удобно выразить амплитуду акустического давления и число Маха в отверстии в децибелах

$$\Pi = \frac{P_0}{\rho c^2} = \frac{P_0}{\gamma P_{st}} = \frac{2 \times 10^{L/20-5}}{\gamma P_{st}}, \quad (40)$$

где  $L$  – уровень звукового давления, выраженный в децибелах,  $P_{st}$  – атмосферное давление. В результате выражение для импеданса принимает следующий вид

$$Z = \left( \frac{ikt}{Ff(v')} + \frac{ik\delta_{nl}\Phi(F)}{Ff(v)} \right) + \frac{Z_1}{F} + 0.424 \frac{2 \times 10^{L/20-5} (1 - F^2 C_D^2)}{\gamma P_{st} |Z| F} + \frac{C_V M}{F C_D^2} + Z_h. \quad (41)$$

При выводе формулы (41) предполагалось, что на резонансную конструкцию воздействует звук на дискретной частоте. Однако в действительности, в частности в каналах авиационных двигателей, звукопоглощающие конструкции работают при воздействии достаточно сложного широкополосного шума с наложенными на него дискретными составляющими. Хорошо известно, что результаты исследований, проведенные на чистых тонах, можно переносить на более сложный шум только для линейных систем. Однако содовая резонансная конструкция, как следует из приведенного выше анализа, является линейной системой только при малых уровнях звукового давления. При высоких уровнях звукового давления звукопоглощающая конструкция является

нелинейной системой. Это означает, что импеданс конструкции на интересующей нас частоте зависит не только от уровня на этой частоте, но также от уровней звукового давления на всех остальных частотах спектра источника шума. Для учета спектрального состава, полученные выше расчетные формулы должны быть определенным образом скорректированы. В общем случае это сложная задача, которая требует специального рассмотрения. В данной работе предлагается осуществить приближенный учет спектрального состава источника шума. На практике при анализе шума авиационного двигателя, как правило, используются третьоктавные спектры. Наибольший интерес представляет диапазон частот от 500 Гц до 6300 Гц. В этом диапазоне частот поле на контрольной поверхности, которое считается известным, можно представить в виде суммы по третьоктавам

$$p(t) = \sum_{n=1}^{12} p_n \sin(\omega_n t), \quad (42)$$

где  $p_n$  – амплитуды. Очевидно, что акустическая скорость на контрольной поверхности будет пропорциональна этой величине. Следовательно, в выражении (11) по аналогии с (13) мы должны положить

$$v_s^2 = \begin{cases} V_x^2 B^2, & \text{если } B(t) > 0 \\ -V_x^2 B^2, & \text{если } B(t) < 0, \end{cases} \quad (43)$$

где  $B(t) = \sum_{n=1}^{12} q_n \sin(\omega_n t)$ ,  $V_x$  – соответствует максимальной амплитуде в (42),  $q_n$  – относительные амплитуды, такие, что для максимальной амплитуды в спектре (42)  $q_k = 1$ . Представим (43) в виде приближенного ряда следующим образом

$$v_s^2 = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^4 a_{n,k} \sin(\omega_{n,k} t), \quad (44)$$

где  $\omega_{n,k}/2\pi$  представлены в таблице 2,

$$a_{n,k} = \frac{\omega_{n,1}}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_{n,1}} v_s^2 \sin(\omega_{n,k} t) dt. \quad (45)$$

Далее, если (44) подставить в уравнение (11), в котором правая часть имеет вид (42), и повторить проделанные выше преобразования, то очевидно,

Таблица 3

$f$ , Гц	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300
$L$ , дБ	141.6	142.4	142.5	146.5	143.9	153.3	146.5	146.6	145.3	138.3	140	140
$a_{n,k}$	0.692	1.051	1.562	1.085	1.199	2.052	0.946	1.152	0.767	0.143	0.188	0.097

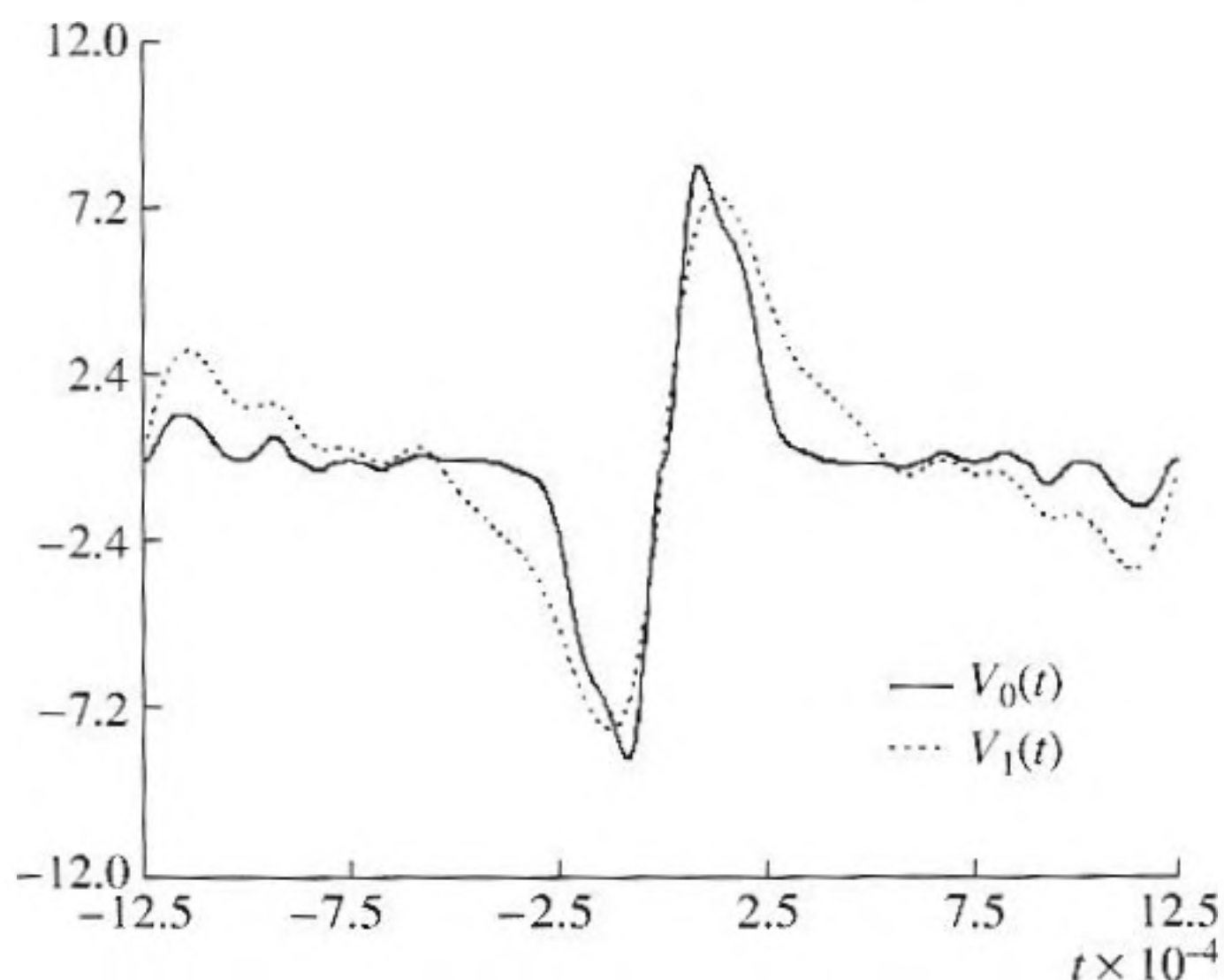


Рис. 2. Скорость в отверстии и ее аппроксимация при возбуждении широкополосным шумом.

что коэффициент 0.424 в уравнении (39) заменится на  $a_{n,k}$ , который для каждой третьоктавной частоты будет свой. Рассмотрим конкретный пример реального спектра. В таблице 3 представлены типичный третьоктавный спектр шума на стенке канала авиационного двигателя при скорости потока  $M = 0.4$  и соответствующие коэффициенты  $a_{n,k}$  для этого спектра, полученные по формуле (45).

Из таблицы 3 видно, что коэффициент 0.424 перед нелинейным членом в формуле (41), который был одинаков для всех частот, следует теперь заменить разными коэффициентами в зависимости от частоты. Максимальный коэффициент соответствует основной частоте, равной 1600 Гц. Полученные коэффициенты характеризуют вклад каждой частоты в общий уровень шума. Для выбранного спектра на рис. 2 представлено сравнение временной зависимости скорости в отверстии перфорированной панели, вычисленной по точной формуле (43) (на рисунке она обозначена  $V_0(t)$ ) и по приближенной формуле (44) (на рисунке она обозначена  $V_1(t)$ ). Из сравнения видно, что приближенное значение скорости достаточно хорошо приближается к точному значению. Таким образом, выбранный подход учета спектрального состава шума на импеданс может быть использован при практическом применении.

Для проверки работоспособности модели было проведено сравнение с экспериментальными данными и теоретическими результатами, приведенными в других работах. На рис. 3а представлено сравнение нашего расчета с результатами из-

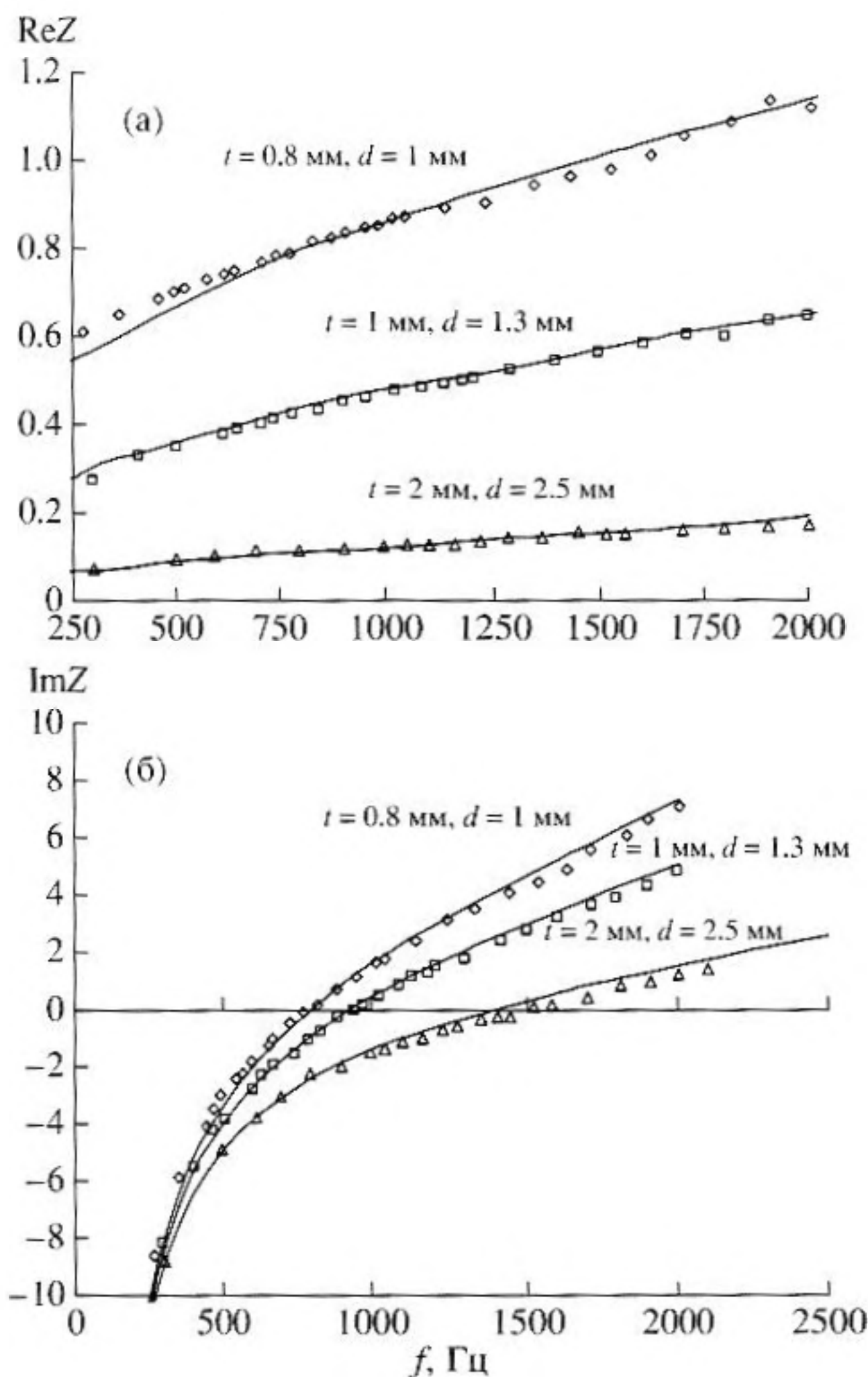


Рис. 3. Сравнение расчета при низких уровнях звукового давления с экспериментальными данными из работы [17] для а) – действительной части импеданса; б) – мнимой части импеданса. Сплошные линии – расчет, маркеры – эксперимент.

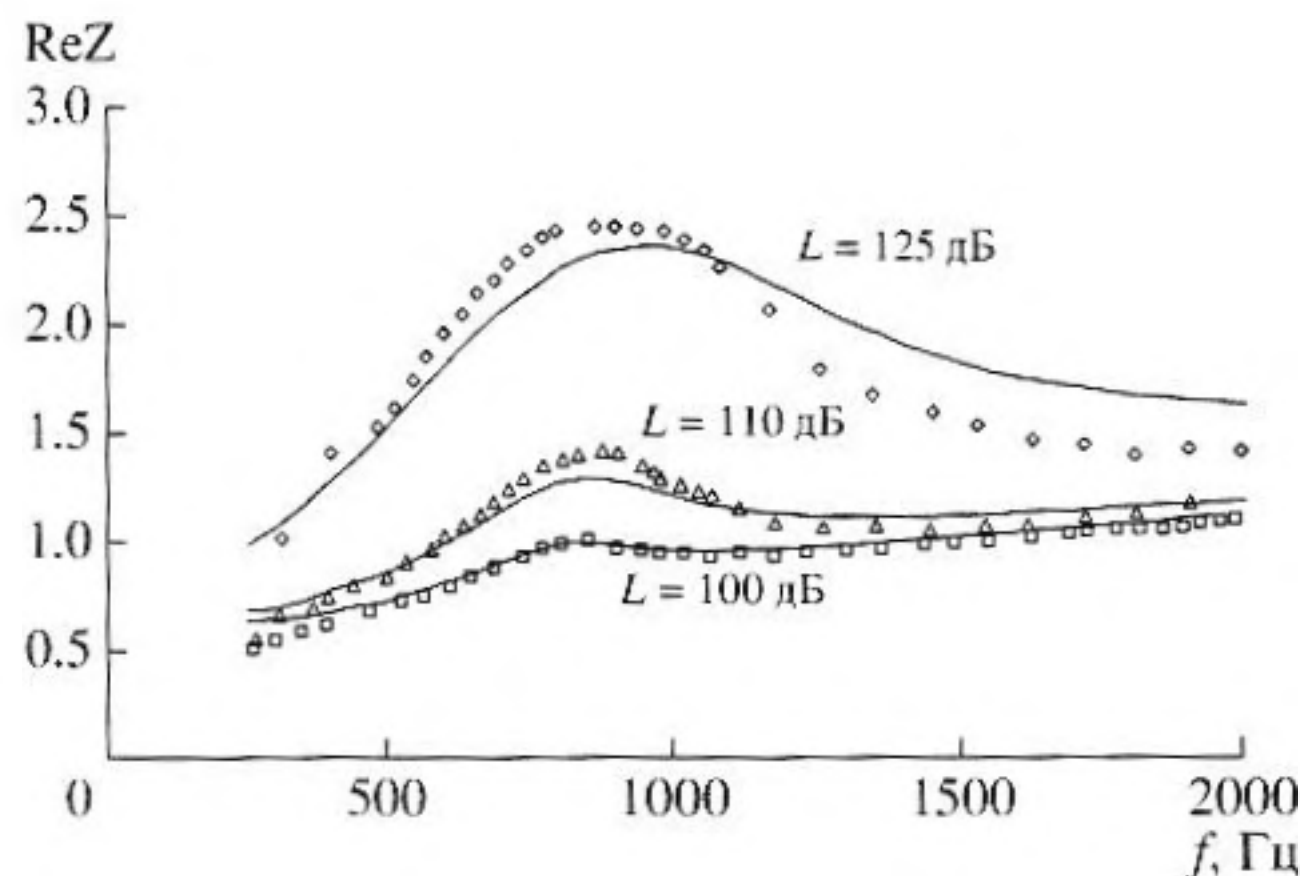


Рис. 4. Сравнение расчета действительной части импеданса с экспериментальными данными из работы [24] при высоких уровнях звукового давления. Сплошные линии – расчет, маркеры – эксперимент.

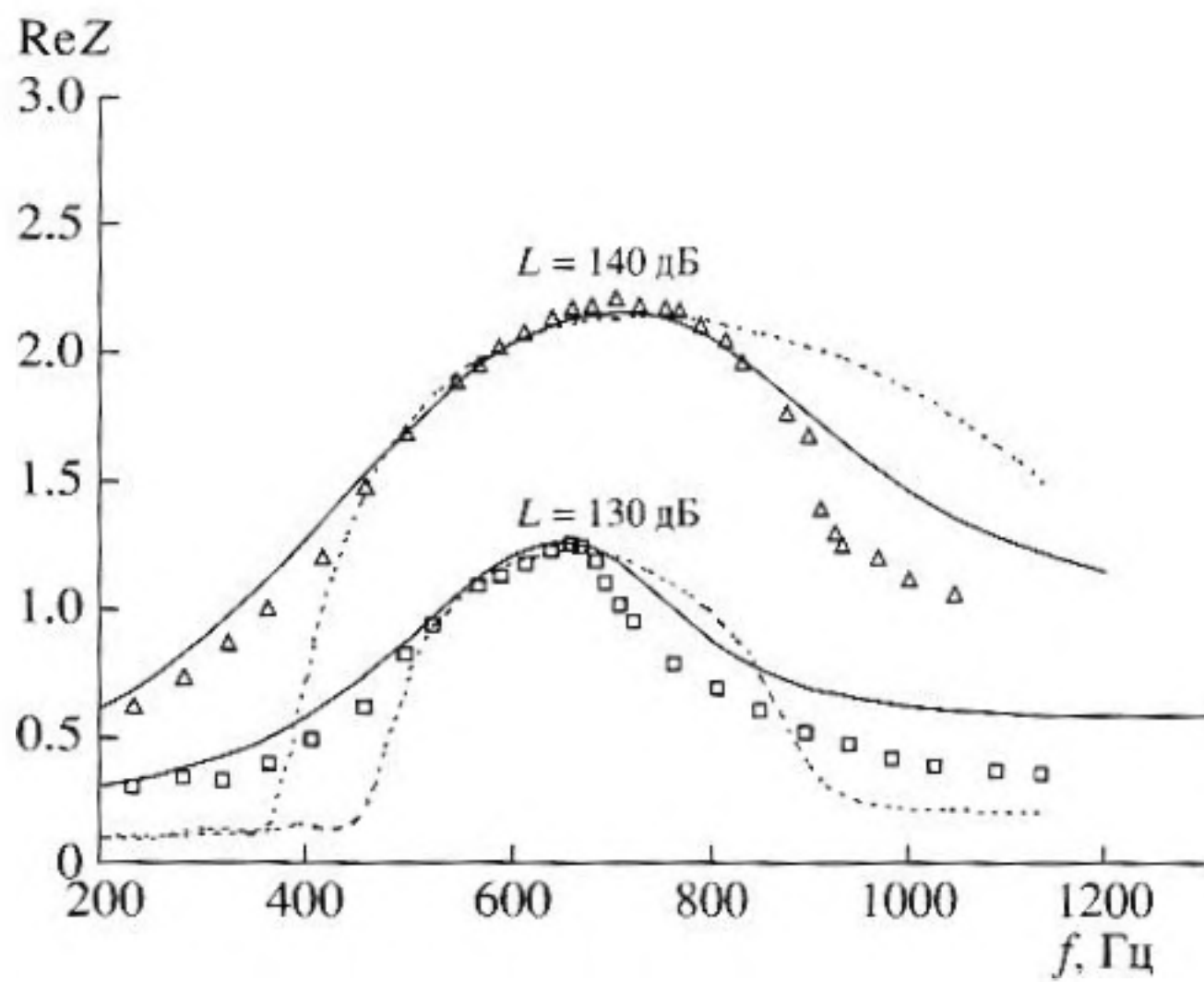


Рис. 5. Сравнение расчета действительной части импеданса с данными из работы [8]; маркеры – данные эксперимента, — — расчет по данной модели, ---- — расчет по модели работы [8].

мерений действительной части импеданса ЗПК из работы [17] при низких уровнях звукового давления ( $< 90$  дБ) для трех конструкций глубиной 19 мм и процентом перфорации панели, соответственно  $F = 0.7\%$ ,  $1.17\%$ ,  $4.34\%$ . На рис. 3б представлено аналогичное сравнение для мнимой части импеданса. При расчете концевая поправка принималась равной  $\delta = 0.65d$ . Из сравнения видно, что расчет с экспериментом сходится достаточно хорошо.

На рис. 4 представлено сравнение нашего расчета с результатами измерений действительной части импеданса из работы [17] при высоких уровнях звукового давления  $L = 100, 110, 125$  дБ для образца с процентом перфорации  $F = 0.7\%$ . При расчете принималось, что  $C_D = 0.77$ ,  $\delta = 0.65d$ . Из сравнения видно, что расчет удовлетворительно сходится с экспериментом.

На рис. 5 представлено сравнение расчета действительной части импеданса для конструкции:  $d = 6.35$  мм,  $t = 1.59$  мм,  $F = 1.56\%$ ,  $h = 25.4$  мм при уровнях звукового давления  $L = 130, 140$  дБ с теоретическими и экспериментальными данными из работы [8]. Из сравнения видно, что если модель из работы [8] хорошо согласуется с экспериментом только вблизи частоты настройки, то наша модель согласуется с экспериментом в более широкой области частот.

В ЦАГИ в подтверждение предлагаемой полуэмпирической модели ЗПК был проведен цикл экспериментов на интерферометре высоких уровней. На рис. 6 представлено сравнение расчета с экспериментом для образца с геометрически-

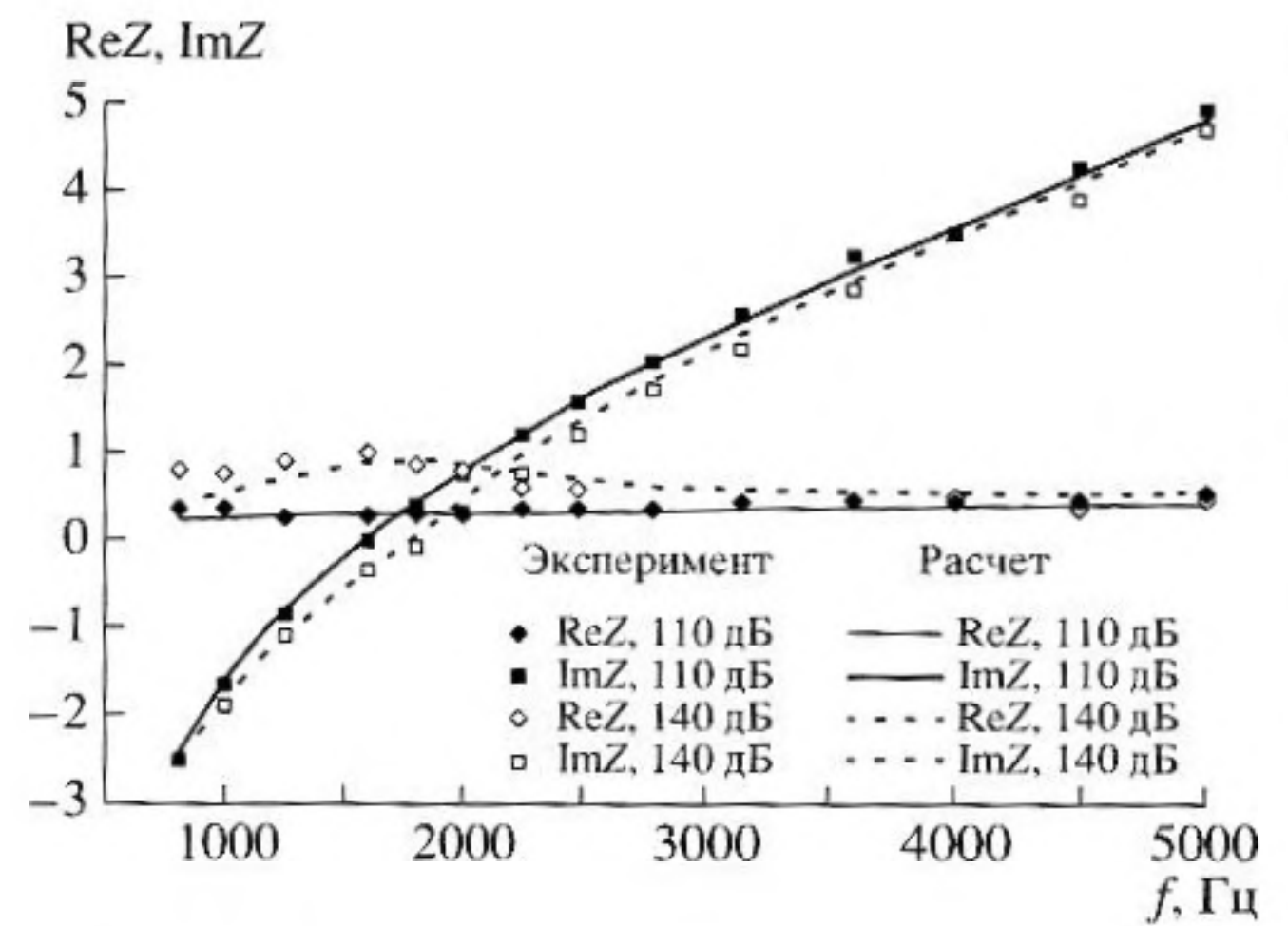


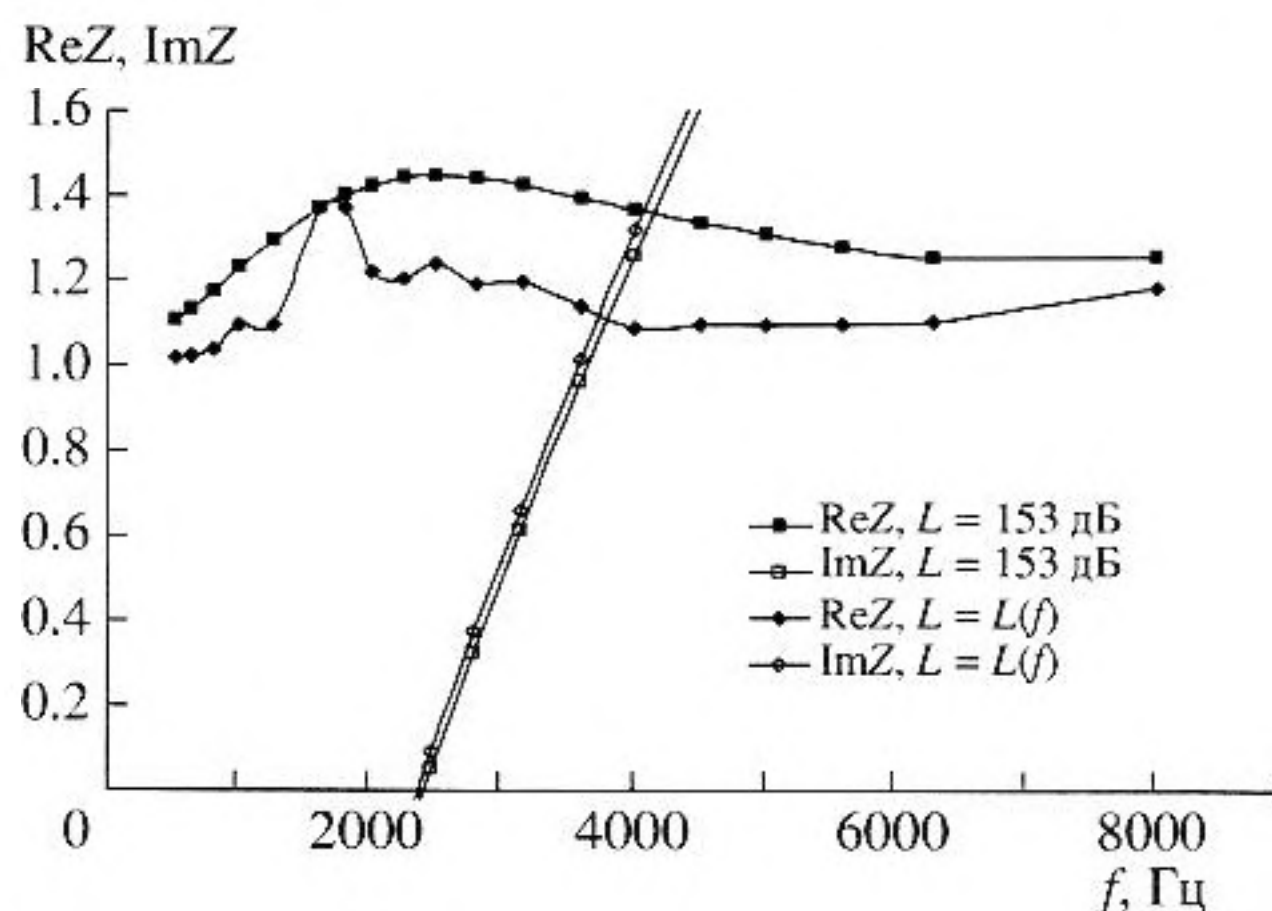
Рис. 6. Частотные зависимости действительной и мнимой частей импеданса образца при  $L = 110$  дБ и  $L = 140$  дБ.

ми параметрами:  $d = 1$  мм,  $t = 1.4$  мм,  $F = 4.1\%$ ,  $h = 20$  мм,  $C_D = 0.8$ ,  $\delta = 0.65d$  при  $L = 110$  дБ и  $L = 140$  дБ. Из рисунков видно, что данные расчета достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным в широкой области частот от 800 Гц до 5000 Гц.

Представило интерес сравнить импеданс однослойной конструкции  $h = 20$  мм,  $F = 6\%$ ,  $d = 1$  мм,  $t = 1.5$  мм при воздействии на нее звуком с уровнем звукового давления равным 153 дБ без учета влияния взаимодействия звука на разных частотах с импедансом этой же конструкции при воздействии на нее звуком со спектром в соответствии с таблицей 2. Данные сравнения представлены на рис. 7. Из сравнения видно, что на всех частотах действительная часть импеданса, полученная с учетом взаимодействия звука на разных частотах, отличается от действительной части импеданса, полученной без учета взаимодействия<sup>1</sup>. Учет взаимодействия звука на разных частотах практически не влияет на мнимую часть импеданса. Это достаточно очевидно, поскольку мнимая часть импеданса слабо зависит от уровня звукового давления (рис. 6).

Таким образом, в настоящей работе разработана полуэмпирическая теория однослойной сотовой звукопоглощающей конструкции резонансного типа с перфорированной панелью, позволяющая определять ее импеданс с учетом геометрических и аэроакустических параметров, высокого уровня звукового давления, наличия

<sup>1</sup> Совпадение на частоте 1600 Гц объясняется тем, что данная конструкция настроена на эту частоту в канале с потоком. Для другой конструкции при данном спектре шума совпадения на частоте 1600 Гц уже не будет.



**Рис. 7.** Частотные зависимости импеданса конструкции  $h = 20$  мм,  $F = 6\%$  при одинаковом уровне звукового давления на всех частотах и уровне звукового давления, зависящем от частоты.

скользящего потока, а также с учетом нелинейного взаимодействия звука на разных частотах в пределах заданного третьоктавного спектра шума, воздействующего на конструкцию. На уровне третьоктавного приближения показано, что учет нелинейного взаимодействия шума приводит к значительному изменению действительной части импеданса. Нелинейное взаимодействие шума на разных частотах не влияет на мнимую часть импеданса. В общем случае зависимость импеданса от уровня звукового давления определяется распределением уровня звукового давления по всему спектру частот, а не только распределением по третьоктавам. Детальное изучение этого вопроса будет предметом дальнейшего исследования.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Рэлей. Теория звука. Т. 2. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М.: 1955, 476 с.
2. Крендалл И.Б. Акустика. ВЭТА. Ленинград. 1934. 172 с.
3. Исакович М.А. Общая акустика. Издательство "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. М.: 1973, 496 с.
4. Melling T.H. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels // J. Sound and Vibr. 1973. V. 29. № 1. P. 1–65.
5. Guess A.W. Calculation of perforated plate liner parameters from specified acoustic resistance and reactance // J. Sound and Vibr. 1975. V. 40. № 1. P. 119–137.
6. Ingard U. Absorption characteristics of nonlinear acoustic resonators // JASA. 1968. Vol. 44. № 4. P. 1155–1156.
7. Cummings A., Eversman W. High amplitude acoustic transmission through duct termination: theory // J. Sound and Vibr. 1983. V. 91. № 4. P. 503–518.

8. Hersh A.S., Walker B.E., Celano J.W. Semi-Empirical Helmholtz resonator impedance model // AIAA Paper 99–1825, 1999.
9. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
10. Howe M.S. The influence of grazing flow on the acoustic impedance of a cylindrical wall cavity // J. Sound Vibr. 1979. V. 67. № 4. P. 533–544.
11. Walker B.E., Charwat A.F. Correlation of the effects of grazing flow on the impedance of Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72. № 1. P. 550–555.
12. Ronneberger D. The dynamics of shearing flow over a cavity – a visual study related to the acoustic impedance of small orifices // J. Sound Vibr. 1980. № 71. V. 4. P. 565–581.
13. Howe M.S. Low Strouhal number instabilities of flow over apertures and wall cavities // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. № 2. P. 772–780.
14. Lee S.-H., Ih J.-G. Empirical model of the acoustic impedance of a circular orifice in grazing mean flow // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 1. P. 98–113.
15. Jing X., Sun X., Wu J., Meng K. Effect of grazing flow on the acoustic impedance of an orifice // AIAA J. 2001. V. 39. № 12. P. 1478–1484.
16. Peat K. S., Ih J.-G., Lee S.-H. The acoustic impedance of a circular orifice in grazing mean flow: Comparison with theory // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 6. P. 3076–3086.
17. Elnady T., Boden H. On the modeling of the acoustic impedance of perforates with flow // AIAA Paper 2003–3304, 2003.
18. Morse P., Ingard U. Theoretical acoustics. N.Y.: McGraw-Hill Inc., 1968.
19. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. Издательство Московского университета. М.: Москва, 1960.
20. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
21. Stinson M.R., Shaw E.A. Acoustic impedance of small, circular orifices in thin plates // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 77. № 6. P. 2039–2042.
22. Фок В.А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Доклады Академии Наук СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875–882.
23. Sivian L.I. Acoustic impedance of small orifices // J. Acoust. Soc. Am. 1935. V. 7. № 1. P. 94–101.
24. Mottsinger R.E., Kraft R.E. Design and performance of duct acoustic treatment // Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and practice. Acoustical Society of America, New York, 1995.
25. Bodén H. Experimental investigation of harmonic interaction effects for perforates // AIAA. 2005. Paper 2005–2896.

26. Kooi J.W., Sarin S.L. An experimental study of the acoustic impedance of Helmholtz resonator arrays under a turbulent boundary layer // AIAA. 1981. Paper 81-1998.
27. Premo J. The application of a time-domain model to investigate the impedance of perforate liners including the effects of bias flow // AIAA. 1999. Paper 99-1876.

## A Semiempirical Theory of a One-Layer Cellular Sound-Absorbing Lining with a Perforated Face Panel

A. F. Sobolev

*Zhukovsky Central Institute of Aerohydrodynamics, ul. Radio 17, Moscow, 107005 Russia*  
*e-mail: acoustic@mktsagi.ru; sobolevaf@rambler.ru*

**Abstract**—On the basis of the known approximate theories and the recent experimental data, a semiempirical theory of a resonance-type one-layer cellular sound-absorbing lining is developed. Approximate formulas are obtained for calculating the effective normal impedance with allowance for the geometric parameters of the sound-absorbing lining, the high sound-pressure levels, the presence of an entraining flow, and the nonlinear interaction of sound components of different frequencies within a given one-third-octave spectrum of noise. The results of numerical calculations by approximate formulas are compared with experiments and with the experimental and theoretical data reported by other authors. The proposed theory is found to agree well with experimental data.