

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3:534.1

РЕЗОНАНСНОЕ БЛОКИРОВАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН В УПРУГОМ СЛОЕ

© 2009 г. Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, М. В. Голуб, Ч. Жанг*

Кубанский государственный университет

350040 г. Краснодар, ул. Ставропольская 149

* University Siegen, 57076, Germany, Paul-Bonatz str. 9–11

E-mail: evg@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 22.02.08 г.

Исследуются волновые процессы, протекающие в упругом слое при дифракции распространяющихся в нем бегущих волн на системе полосовых горизонтальных трещин. Интегральные представления волновых полей строятся в виде свертки матриц Грина и неизвестных скачков смещений на трещинах. Последние определяются из граничных интегральных уравнений, к которым сводится исходная краевая задача при удовлетворении граничных условий на берегах трещин. Для различных вариантов взаимного расположения трещин исследуется спектр интегрального оператора, проводится сравнение со спектром соответствующих операторов для одиночных трещин и анализируется связь между спектром и блокирующими эффектами. Демонстрируется возможность расширения частотного диапазона запираения волновода группой трещин.

Ключевые слова: упругий волновод, система трещин, спектр интегрального уравнения, ловушечные моды, частотные диапазоны запираения

PACS: 43.20.Bi, 43.20.Gp, 43.20.Ks, 43.35.Cg, 46.40.Cd, 46.40.Ff

ВВЕДЕНИЕ

Дифракция упругих волн на внутренних препятствиях (трещины, полости, включения) и наблюдаемые при этом резонансные эффекты представляют интерес как для разработки методов волновой локализации и идентификации дефектов, так и в связи с проблемами прочности и разрушения материалов и конструкций. Наряду с этим самостоятельный интерес представляют закономерности прохождения и блокирования бегущих волн. Например, в акустоэлектронике при создании частотных фильтров на поверхностных акустических волнах используется явление резкого экранирования сигналов системами периодических препятствий (решетки встречно-штырьевых контактов, бороздки и др.) [1]. Аналогично, в фотонике используются диэлектрические структуры (фотонные кристаллы) с широкими полосами непропускания (band gaps) [2, 3]. Такие же диапазоны запираения наблюдаются и при распространении акустических волн (фононов) в периодических композитных и кристаллических структурах (атомных фононных решетках) [4, 5]. Сходные эффекты наблюдаются и в наиболее близких к теме настоящей статьи моделях: упругих средах с периодическим набором трещин [6].

Возникает вопрос: возможно ли формирование достаточно широких диапазонов запираения в

упругих волноводах без использования большого количества (периодических) препятствий? В частности, можно ли использовать для этой цели хорошо известный для волноводов с препятствиями эффект ловушечных мод (trapped modes) [7, 8, 9, 10], то есть захват энергии набегающих волн и ее локализацию в окрестности препятствия? Данный эффект тесно связан со спектральными свойствами соответствующей краевой задачи. Он проявляется на частотах ω , близких к комплексным частотам собственных колебаний волновода с рассматриваемым дефектом ω_n (ω_n – точки спектра краевой задачи). Собственные решения u_n , соответствующие спектральным точкам ω_n , описывают характер локализации волнового поля в окрестности дефекта. Одним из внешних признаков ловушечного эффекта является резкое экранирование (фильтрация) соответствующих частотных составляющих нестационарного сигнала, распространяющегося по волноводу. Если препятствием является трещина, то резонансное блокирование, как правило, сопровождается и резким ростом динамического коэффициента интенсивности напряжений на ее фронте.

В предыдущих работах явления резонансного захвата и блокирования рассматривались в случае упругого волновода с препятствием в виде единичного горизонтального [11, 12] или наклонного [13] разреза (трещины). На основе численно-ана-

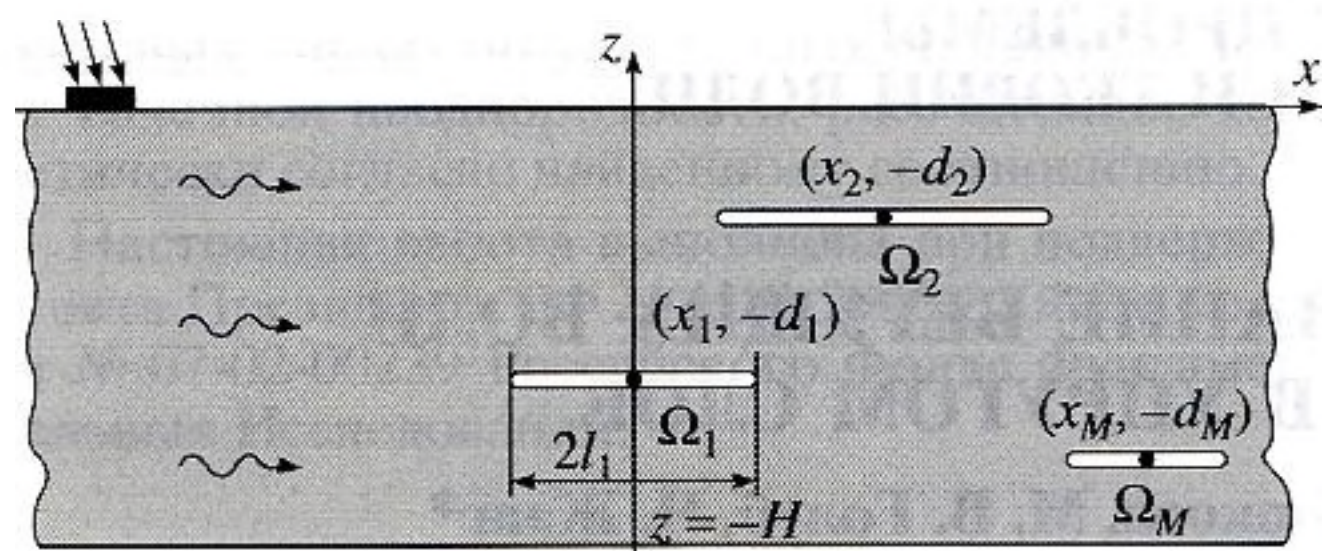


Рис. 1. Упругий волновод с системой горизонтальных трещин.

литического решения соответствующих задач дифракции анализировалось распределение спектральных точек ω_n в комплексной плоскости частоты в зависимости от размеров трещины и ее расположения в волноводе и их влияние на частотные характеристики прохождения и отражения сигналов. В частности, было показано, что при определенном сочетании геометрических параметров резонансные полюса ω_n выходят на вещественную ось, то есть была подтверждена возможность появления вещественной точки дискретного спектра на непрерывном спектре бегущих волн [14] и построены соответствующие собственные решения, описывающие волновое поле ловушечной моды.

С другой стороны, резонансное блокирование наблюдается в очень узком диапазоне частот в окрестности $\omega \approx \text{Re} \omega_n$, который вырождается в точку при $\text{Im} \omega_n \rightarrow 0$. Расширение диапазона почти полного запираания волновода можно ожидать, если за счет дополнительных препятствий появится несколько дискретных точек спектра близко расположенных относительно друг друга и вещественной оси.

В качестве первого шага в настоящей статье, являющейся продолжением исследований, начатых в [11, 12], анализируются изменения в структуре спектра и в блокирующих свойствах, к которым приводит взаимное влияние соседних трещин. Рассматриваются различные случаи их относительно расположения: лежащие в одной плоскости или на разных уровнях, разнесенные вдоль волновода или находящиеся друг над другом (этажные). Определяется, как меняются значения ω_n при учете волнового взаимодействия между ними и как это сказывается на блокирующих свойствах. В частности, насколько результаты, полученные для более простого случая одиночной трещины, могут быть полезны при анализе блокирующих свойств системы трещин. Обсуждается возможность расширения частотного диапазона резонансного запираания волновода специальным подбором системы нескольких трещин.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Как указывалось выше, явление резонансного захвата и локализации волновой энергии возможно при дифракции на препятствиях различной природы, но для определенности и для сопоставимости с результатами предыдущих исследований в настоящей работе рассматриваются препятствия в виде тонких горизонтальных разрезов (трещин). Поэтому математическая постановка и общая схема решения остаются в целом те же, что и в [11, 12]; по возможности сохраняются и введенные ранее обозначения.

В двумерной постановке рассматривается свободный упругий волновод (слой), занимающий в декартовой системе координат xOz полосовую область $|x| < \infty, -H < z < 0$ с несколькими горизонтальными разрезами нулевой толщины (трещинами) $\Omega_m: |x - x_m| < l_m, z = -d_m$ (рис. 1). Комплексные амплитуды $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\}$ установившихся гармонических колебаний частиц слоя $\mathbf{u} e^{-i\omega t}$ с круговой частотой ω удовлетворяют уравнениям Ляме для изотропной упругой среды; гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опущен.

Границы слоя $z = 0$ и $z = -H$ свободны от напряжений: $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \sigma_z\} = 0$, за исключением области приложения нагрузки \mathbf{q}_0 , возбуждающей исходное волновое поле \mathbf{u}_0 . Так как в дальнейшем в качестве \mathbf{u}_0 берется одна из возбуждаемых мод, определяемая вкладом вычета в вещественном полюсе матрицы Грина $\zeta \equiv \zeta_k: \mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_0 e^{i\zeta x}$ (см. (2.8) [11]), то конкретный вид нагрузки \mathbf{q}_0 не важен. Считаем, что она прикладывается на достаточном удалении слева от системы трещин $\Omega = \bigcup \Omega_m$.

Предполагается, что берега разрезов не контактируют между собой и их поверхности также свободны от напряжений: $\boldsymbol{\tau}|_{\Omega} = 0$. Поле смещений \mathbf{u} терпит на них разрыв с неизвестным скачком

$$\mathbf{v}_m(x) = \mathbf{u}(x, -d_m - 0) - \mathbf{u}(x, -d_m + 0), \\ |x - x_m| < l_m, \quad m = 1 \dots M.$$

В отличие от случая одиночной трещины дифрагированное волновое поле \mathbf{u}_c складывается теперь из M полей \mathbf{u}_m , наводимых каждым из скачков \mathbf{v}_m . Соответственно, суммарное поле \mathbf{u} , формирующееся в волноводе, имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_m,$$

где \mathbf{u}_0 – заданное поле источника или одна из набегающих волн, а интегральные представления

полей \mathbf{u}_m и соответствующих полей напряжений $\boldsymbol{\tau}_m$ остаются в целом прежними (см. (2.6) [11]):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_m(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} N_m(\alpha, z) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \boldsymbol{\tau}_m(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} S_m(\alpha, z) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha\end{aligned}\quad (1)$$

$\mathbf{V}_m = F[\mathbf{v}_m]$ – Фурье-символы неизвестных скачков смещений берегов трещин. Следует отметить, что конкретный вид символов матриц Грина N_m и S_m зависит от глубины расположения трещины d_m , поэтому для трещин, не лежащих в одной плоскости, эти матрицы различны.

В то время как для одиночной трещины подстановка интегрального представления поля напряжений $\boldsymbol{\tau}$ в граничные условия на ее берегах сводит задачу к интегральному уравнению Винера-Хопфа относительно неизвестного скачка \mathbf{v} с гиперсингулярным матричным оператором \mathcal{L} (см. (4.6) [11]), в случае системы трещин вводится обобщенный вектор неизвестных скачков $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$, относительно которого возникает система интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m \mathbf{v}_m + \sum_{j=1, j \neq m}^M \mathcal{S}_{mj} \mathbf{v}_j &= \mathbf{f}_m, \\ (x, z) \in \Omega_m, \quad m &= 1 \dots M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m \mathbf{v}_m &\equiv \int_{|x-x_m| < l_m} l_m(x-\xi) \mathbf{v}_m(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L_m(\alpha) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{mj} \mathbf{v}_j &\equiv \int_{|x-x_m| < l_m} s_{mj}(x-\xi) \mathbf{v}_j(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} S_j(\alpha, -d_m) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ L_m(\alpha) &= S_m(\alpha, -d_m), \\ \mathbf{f}_m &= -\boldsymbol{\tau}_0(x, -d_m).\end{aligned}$$

Каждый из операторов \mathcal{L}_m описывает поле напряжений на отрезке Ω_m , соответствующее скачку поля смещений \mathbf{v}_m на этом же отрезке, без учета наличия соседних трещин. Фактически это тот же оператор \mathcal{L} , что и в задаче об одиночной трещине в слое, с гиперсингулярным разностным ядром

$l(x-\xi)$ и матричным символом ядра $L(\alpha)$ (см. (4.4) [11]). Операторы S_{mj} в свою очередь описывают поля напряжений в области Ω_m , вызванные скачками \mathbf{v}_j на других отрезках $\Omega_j, j \neq m$, то есть определяют взаимное влияние между трещинами. Так как точки $(x, z) \in \Omega_m$, в которых определяется напряжение, не лежат в области Ω_j , где задан скачок, ядра этих операторов $s_{mj}(x-\xi)$ не сингулярны.

Использовавшаяся в [11] схема сведения интегральных уравнений к бесконечной алгебраической системе может быть обобщена и на рассматриваемый случай нескольких областей Ω_m . Однако здесь она становится слишком громоздкой, поэтому для расчетов применялся метод Галеркина с разложением неизвестных скачков по системе полиномов Чебышева второго рода $U_k(x)$ с весом $\sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_m(x) &= \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{c}_m^k p_m^k(x), \\ p_m^k(x) &= U_k\left(\frac{x-x_m}{l_m}\right) \sqrt{l_m^2 - (x-x_m)^2}\end{aligned}\quad (3)$$

и проектированием по тем же координатным функциям $p_m^l(x)$. В результате относительно неизвестных коэффициентов разложения $\mathbf{c}_m^k(x)$ возникает линейная алгебраическая система

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N_m} a_m^{lk} \mathbf{c}_m^k + \sum_{j=1, j \neq m}^M \sum_{k=1}^{N_j} b_m^{lk} \mathbf{c}_m^k &= \mathbf{g}_m^l, \\ m &= 1, 2, \dots, M,\end{aligned}\quad (4)$$

которая может быть записана в матричном виде

$$D\mathbf{c} = \mathbf{g}.\quad (5)$$

Здесь $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_M\}$ – обобщенный вектор неизвестных коэффициентов разложения, в котором $\mathbf{c}_m = \{\mathbf{c}_m^1, \mathbf{c}_m^2, \dots, \mathbf{c}_m^{N_m}\}$ – векторы коэффициентов для каждого из скачков \mathbf{v}_m ; его суммарная длина (размерность матрицы D) равна $N = 2(N_1 + N_2 + \dots + N_M)$.

Аналогично формируется вектор правых частей \mathbf{g} через проекции \mathbf{g}_m^l заданного поля $\boldsymbol{\tau}_0$:

$$\mathbf{g}_m^l = \int_{|x-x_m| < l_m} \boldsymbol{\tau}_0(x, -d_m) p_m^l(x) dx.$$

Элементы диагональных блоков A_m размерности $2N_m \times 2N_m$ и внедиагональных $B_{mj} - 2N_m \times 2N_j$ матрицы

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & A_2 & \dots & B_{2M} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & A_M \end{pmatrix}$$

имеют вид

$$a_m^{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L_m(\alpha) P_k(\alpha l_m) P_l(-\alpha l_m) d\alpha, \\ l, k = 1, 2, \dots, N_m$$

$$b_{mj}^{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} S_j(\alpha, -d_m) P_k(\alpha l_j) P_l(-\alpha l_m) e^{-i\alpha(x_j - x_m)} d\alpha, \\ l = 1, 2, \dots, N_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_j,$$

функции $P_k(\alpha l_m) = J_{k+1}(\alpha l_m)/\alpha$ – результат преобразования Фурье от координатных функций: $F[P_k^m] = P_k(\alpha l_m) e^{i\alpha l_m}$.

После вычисления коэффициентов c_m^k , волновые поля и их энергетические характеристики (осредненная за период плотность потока энергии) определяются в ближней зоне через представления (1) (путем численного интегрирования), а в дальней зоне, используя их разложение в ряд по вычетам (см. (2.7)–(2.8) [11]). Как и ранее, для характеристики прохождения отдельных мод $u_0(x, z) = a_k e^{i\zeta_k x}$ вводятся коэффициенты прохождения и отражения $\kappa^\pm = E^\pm/E_0$, где E_0 – энергия набегающей волны u_0 , а E^+ и E^- – энергия прошедших через зону трещин и отраженных от нее волн, соответственно. Величины E_0 и E_0^\pm определяются путем численного интегрирования горизонтальной составляющей соответствующих векторов плотности энергии по поперечному сечению волновода. В качестве контроля численного решения проверяется выполнение энергетического баланса: $\kappa^+ + \kappa^- = 1$.

Собственные частоты ω_n (полюса гармонического волнового поля $u(x, z, \omega)$ в комплексной плоскости частоты ω) аппроксимируются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\omega) \equiv \det D(\omega) = 0. \quad (6)$$

При этом корни ω_n^m характеристических уравнений $\det A_m(\omega) = 0$ (для диагональных блок-матриц матрицы системы D) фактически являются резонансными полюсами для соответствующих одиночных трещин в слое.

Как указывалось выше, явление резонанса в слое

БЛОКИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ТРЕЩИН

На первый взгляд можно ожидать, что при достаточном удалении друг от друга областей Ω_m спектр ω_n будет складываться из спектров ω_n^m для каждого из разрезов в отдельности. С другой стороны, амплитуды бегущих волн $a_k(z) e^{\pm i\zeta_k x}$, обеспечивающих волновое взаимодействие между трещинами, в рассматриваемой двумерной модели не зависят от x (для вещественных ζ_k). Это означает, что взаимное влияние должно одинаково сказываться при любом расстоянии между ними.

Наконец, с чисто физической точки зрения, если первое из препятствий уже заблокировало прохождение сигнала, то наличие следующих не должно существенно менять картину, так как сигнал до них не доходит. Другими словами, наличие дополнительных препятствий, расположенных за первым, не должно менять частоту резонансного запираения, а соответственно и положение близких к вещественной оси резонансных полюсов.

Уже первые расчеты показали, что волновое взаимодействие между препятствиями сказывается так, что реализуются обе, казалось бы, взаимоисключающие возможности: положение полюсов ω_n существенно изменяется с изменением горизонтального расстояния между трещинами, но так, что частоты резонансного блокирования, обусловленные каждой из них в отдельности, в целом сохраняются.

Все результаты ниже даются в безразмерном виде, в котором толщина слоя H , скорость поперечных волн v_S и модуль сдвига μ равны единице. При этом безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f H / v_S$, где f – размерная частота в герцах. Для определенности коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ (то есть $v_P/v_S = 2$, где v_P – скорость продольных волн в слое), а в качестве u_0 во всех приведенных ниже примерах берется первая (фундаментальная) антисимметричная мода a_0 [15], соответствующая максимальному волновому числу ζ_1 (максимальному вещественному полюсу Фурье-символа матрицы Грина слоя). Данная мода наиболее чувствительна к дефектам рассматриваемого вида [16].

Две трещины в одной плоскости

Рассмотрим набегание моды a_0 на две трещины единичной полуширины ($l_1 = l_2 = 1$), расположенные на одинаковой глубине ($d_1 = d_2 = 0.25$). Расстояние между центрами трещин $\Delta x_{12} = |x_1 - x_2|$ варьируется; считаем, что $x_1 = 0$, то есть $\Delta x_{12} = x_2 > 2$.

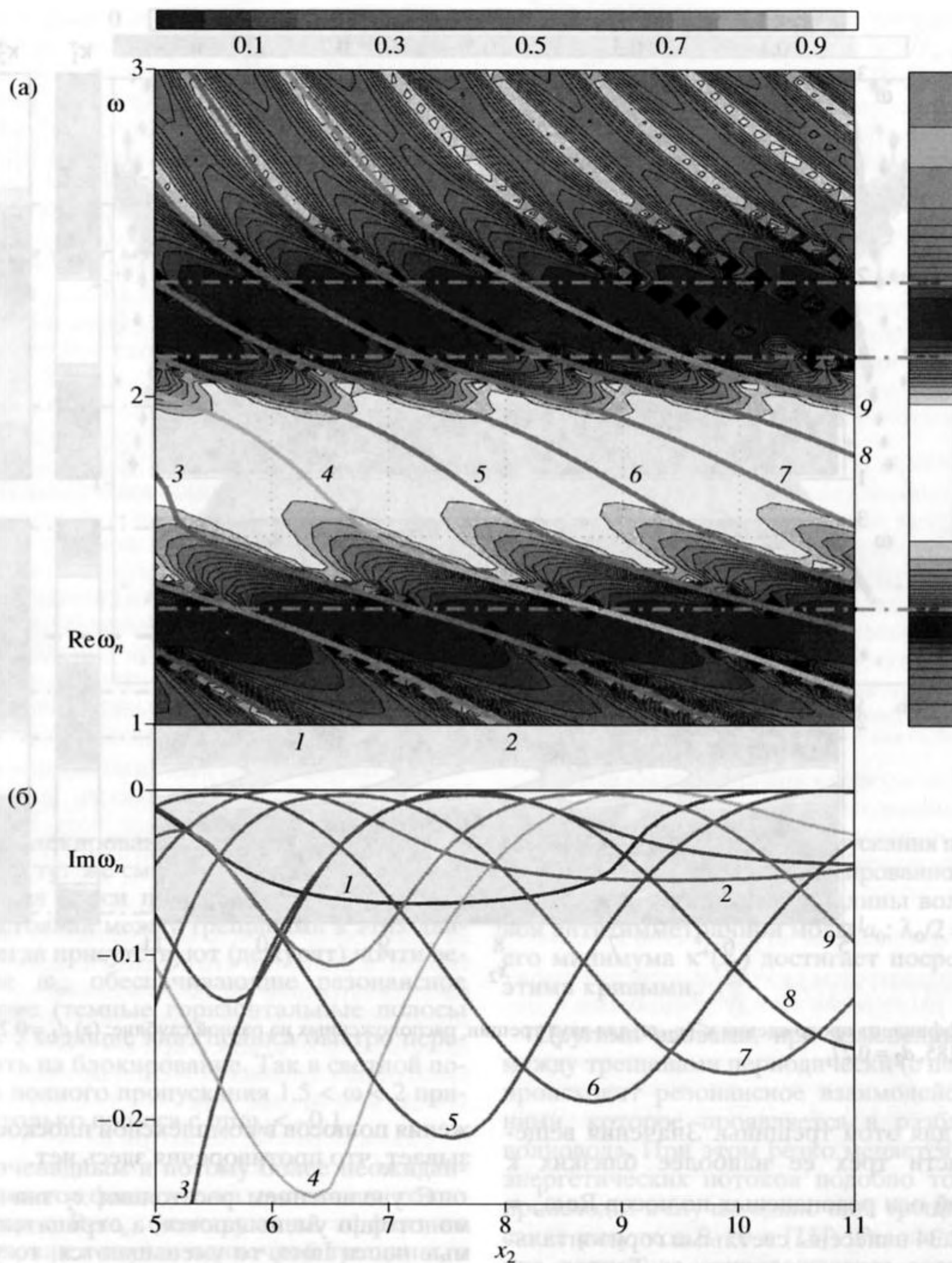


Рис. 2. Коэффициент прохождения $\kappa^+(x_2, \omega)$ и резонансные полюса $\omega_n(x_2)$ для двух трещин на глубине $d = 0.25$ при изменении расстояния x_2 между ними.

На рис. 2а с помощью черно-белой шкалы и линий уровня показана зависимость коэффициента прохождения κ^+ от двух параметров – расстояния x_2 и частоты ω . Полному блокированию $\kappa^+ = 0$ соответствуют самые темные участки на плоскости (x_2, ω) , а полному прохождению $\kappa^+ = 1$ – белые; промежуточные значения $\kappa^+(x_2, \omega)$ даются оттенками серого. Поверх наложены сплошные линии $\omega = \text{Re} \omega_n(x_2)$, показывающие зависимость от x_2 ве-

щественной части резонансных полюсов ω_n (номер линии соответствует номеру полюса n). Зависимость мнимых частей $\omega = \text{Im} \omega_n(x_2)$ показана ниже соответственно пронумерованными сплошными линиями (рис. 2б).

Для сопоставления со случаем такой же, но одиночной трещины $l = 1, d = 0.25$ на рис. 2а справа добавлена узкая полоска, на которой с помощью той же черно-белой шкалы показана зависи-

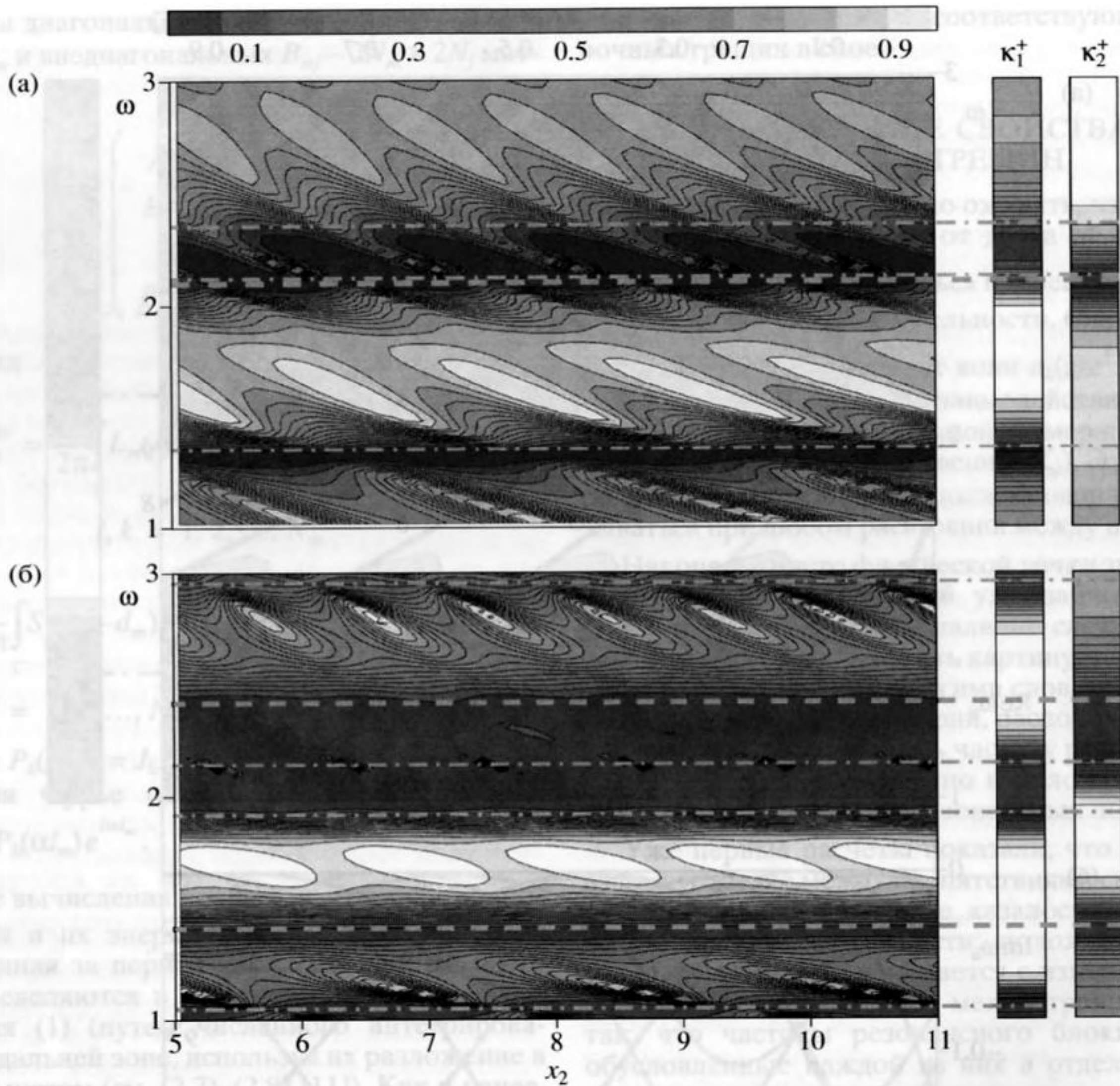


Рис. 3. Коэффициент прохождения $\kappa^+(x_2, \omega)$ для двух трещин, расположенных на разной глубине: (а) $d_1 = 0.25, d_2 = 0.5$ и (б) $d_1 = 0.185, d_2 = 0.27$.

мость $\kappa^+(\omega)$ для этой трещины. Значения вещественной части трех ее наиболее близких к вещественной оси резонансных полюсов $\text{Re } \omega_n^1 = 1.33, 2.11, 2.34$ нанесены светлыми горизонтальными штрих-пунктирными линиями. Темные зоны значительного блокирования одиночной трещиной (диапазоны $1.2 < \omega < 1.4$ и $2.1 < \omega < 2.3$) расположены в окрестности этих значений.

При анализе рис. 2 сразу привлекает внимание тот факт, что хотя положение полюсов ω_n меняется с изменением расстояния x_2 , частотные диапазоны запираения остаются примерно теми же, что и для одиночной трещины. На первый взгляд это противоречит ранее сделанному выводу [11, 12] о роли близких к вещественной оси резонансных полюсов ω_n в проявлении блокирующего эффекта. Однако более внимательный анализ дви-

жения полюсов в комплексной плоскости ω показывает, что противоречия здесь нет.

С увеличением расстояния x_2 значения $\text{Re } \omega_n$ монотонно уменьшаются, а отрицательные мнимые части $\text{Im } \omega_n$ то уменьшаются, то увеличиваются в определенных пределах с верхней границей $\text{Im } \omega_n = 0$. Таким образом, полюса ω_n движутся в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω справа налево, то удаляясь от вещественной оси, то приближаясь к ней, вплоть до касания вещественной оси при определенных дискретных значениях x_2 (появление вещественной точки дискретного спектра ω_n – случай полного захвата энергии и формирования незатухающих собственных колебаний, локализованных в окрестности дефекта; см., например, рис. 15 [12]). Самое интересное: в целом это движение происходит так, что полюса подходят к вещественной оси только в окрестности указанных выше частотных

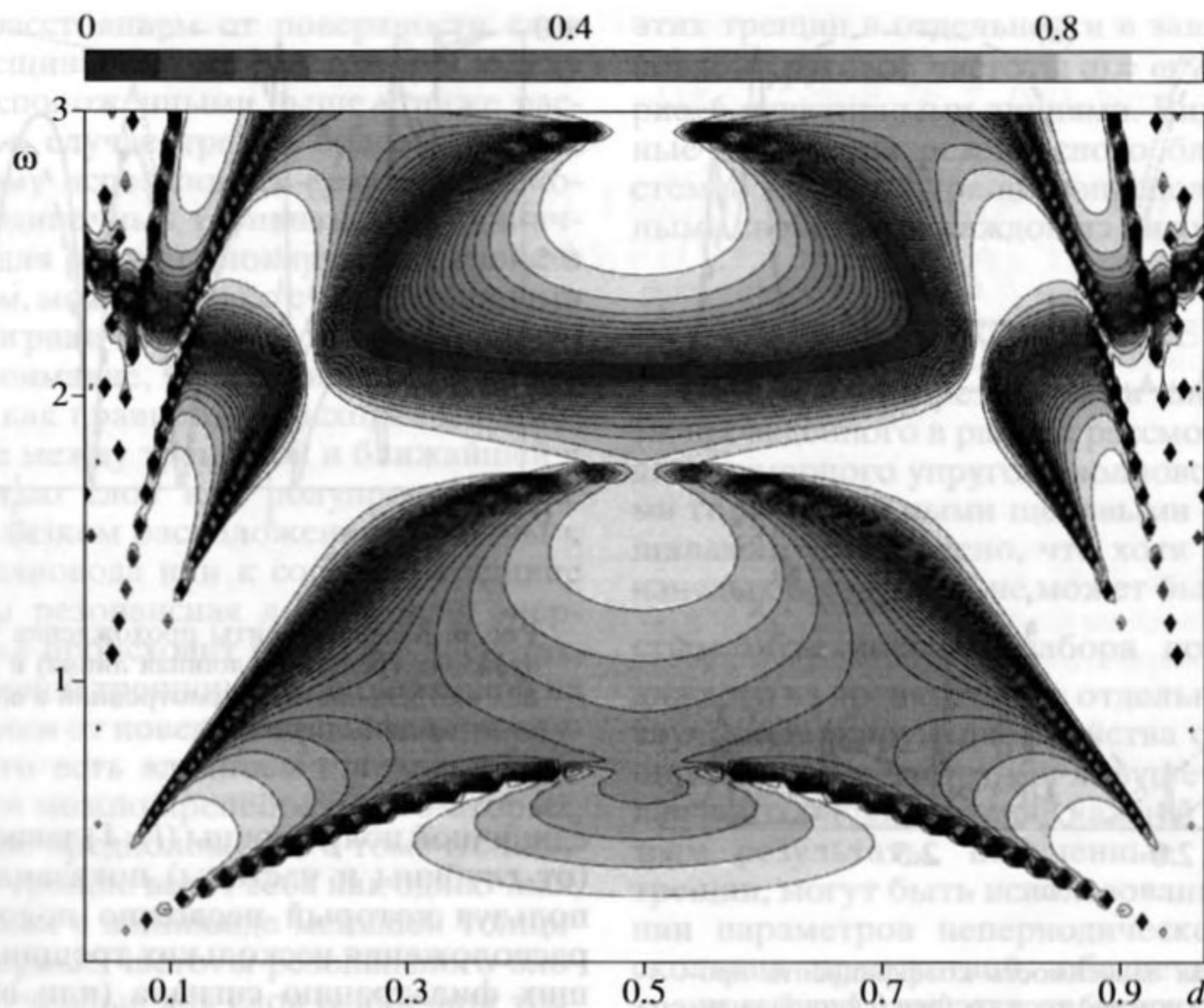


Рис. 4. Зависимость $\kappa^+(x_2, \omega)$ для одиночной трещины ($l = 1$).

диапазонов блокирования для одной трещины, а уходя от оси, тут же сменяются следующим, приближающимся к оси полюсом. Тем самым при любом расстоянии между трещинами в этих диапазонах всегда присутствуют (дежурят) почти вещественные ω_n , обеспечивающие резонансное блокирование (темные горизонтальные полосы на рис. 2а). Уходящие вниз полюса быстро перестают влиять на блокирование. Так в светлой полосе почти полного пропускания $1.5 < \omega < 2$ присутствуют только полюса с $\text{Im} \omega_n < -0.1$.

Менее очевидным и потому более неожиданным является тот факт, что на частотах ω , точно совпадающих с $\text{Re} \omega_n$, блокирующий эффект не усиливается, как в случае одиночной трещины, а наоборот, ослабевает. На это указывают светлые полосы (полосы пропускания), идущие на темном или сером фоне вдоль кривых $\text{Re} \omega_n(x_2)$. На рельефной поверхности $\kappa^+(x_2, \omega)$ эти полосы пропускания выглядят как узкие стенки (или горные хребты), в то время как в случае одиночной трещины вдоль $\text{Re} \omega_n$ (при $|\text{Im} \omega_n| \ll 1$) идут узкие провалы, названные в [11, 12] каньонами. Как хребты, так и каньоны становятся шире и ниже или соответственно мельче при увеличении $|\text{Im} \omega_n|$, делаясь неразличимыми (то есть размываясь до того же уровня, что и окружающая поверхность) примерно при $|\text{Im} \omega_n| > 0.15-0.2$. На низких частотах, в первом диапазоне запирания $1 < \omega < 1.5$, рас-

стояние между кривыми пропускания по горизонтали (между $\text{Re} \omega_n(x_2)$ при фиксированной частоте ω) примерно равно половине длины волны λ_0 нулевой антисимметричной моды a_0 : $\lambda_0/2 = \pi/\zeta_1$, а своего минимума $\kappa^+(x_2)$ достигает посередине между этими кривыми.

Другими словами, при изменении расстояния между трещинами периодически (с периодом $\lambda_0/2$) происходит резонансное взаимодействие между ними, которое проявляется в разблокировании волновода. При этом резко меняется и структура энергетических потоков подобно тому, как это происходит в случае одиночной трещины (см. описание рисунков 9–10 в [11]). Резонансное запирание волновода сопровождается возникновением мощных энергетических вихрей в осредненном за период колебаний потоке энергии, переносимой полем установившихся гармонических колебаний $u e^{-i\omega t}$. Система вихрей образуется над и под трещиной с большей концентрацией энергии в прямоугольном блоке между трещиной и ближайшей поверхностью слоя (рис. 3, 9 [11]). При отпирании волновода вместо системы вихрей образуется один большой, окружающий трещину вихрь, по периферии которого поток энергии огибает препятствие и уходит на бесконечность ($\kappa^+ \approx 1$, рис. 10 [11]). Аналогичное изменение структуры энергетических потоков происходит при запира-

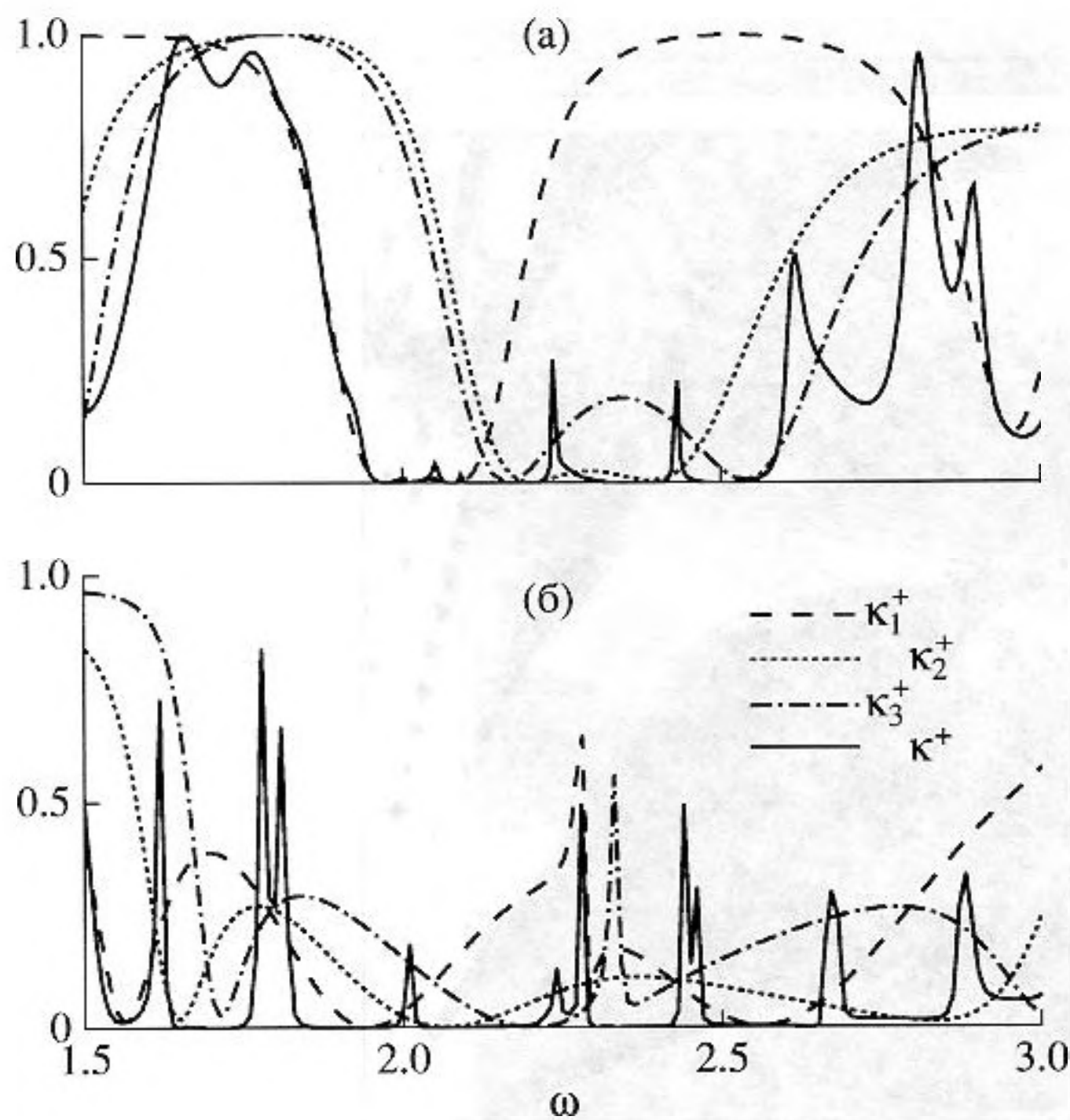


Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента прохождения κ^+ для системы трех трещин (сплошная линия) и каждой из них в отдельности (пунктир); (а) $l = 1$, (б) $l = 2$.

нии волновода и его разблокировании в полосе пропускания и в случае двух трещин.

Разнесенные трещины на различной глубине

Как и в предыдущем случае, изменение горизонтального расстояния между трещинами в целом не меняет частотных диапазонов блокирования (см., например, рис. 3 для тех же трещин, что и на рис. 2, но на различных глубинах $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.5$ (а) и $d_1 = 0.185$, $d_2 = 0.27$ (б)). Важно отметить, что блокирующие свойства системы трещин складываются из диапазонов блокирования каждой из них в отдельности. Последние же зависят только от их размеров и глубины залегания. Тем самым для расчета геометрии системы препятствий (в нашем случае трещин), обеспечивающей требуемые блокирующие свойства, например, виброизоляцию в заданном частотном диапазоне, нет необходимости решать задачу оптимизации для системы в целом. Достаточно изучить резонансные блокирующие свойства отдельного препятствия в зависимости от его размеров и расположения. Далее, для обеспечения требуемых параметров запирающего достаточно подобрать систему препятствий с дополняющими друг друга диапазонами блокирования. Примеры таких зависимостей при фиксированном размере, глубине или частоте даны на рис. 6–7 [11] и рис. 10–11 [12]. Для рассмотренных выше трещин

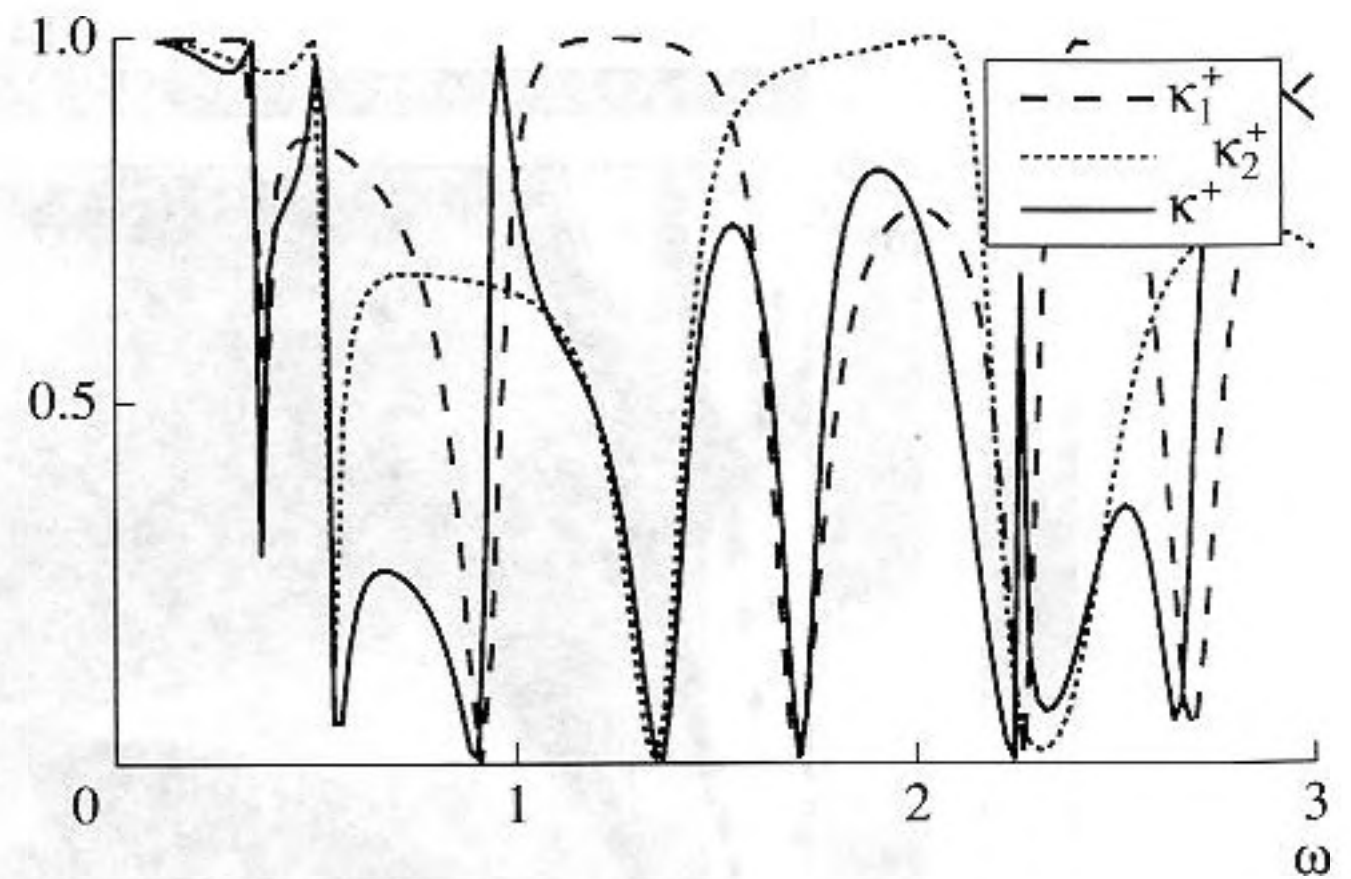


Рис. 6. Коэффициенты прохождения $\kappa^+(\omega)$ для двух этажных трещин (сплошная линия) и для каждой из них в отдельности, рассмотренной в волноводе меньшей толщины (пунктир).

единичной полуширины ($l = 1$) зависимость $\kappa^+(d, \omega)$ (от глубины и частоты) показана на рис. 4, используя который несложно подобрать глубину расположения нескольких трещин, обеспечивающих фильтрацию сигнала (или виброзащиту) в требуемом частотном диапазоне.

Так, например, на рис. 5а сплошной линией показана частотная зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$ в случае волновода с тремя трещинами единичной полуширины l ($d_1 = 0.185$, $d_2 = 0.27$, $d_3 = 0.29$, $x_2 = 9.5$, $x_3 = 20$), каждая из которых обеспечивает резонансное блокирование на некоторой частоте в окрестности $\omega = 2$ (пунктирные линии), так что в целом их набор обеспечивает фильтрацию сигналов в диапазоне $2 < \omega < 2.5$. Блокирование в еще более широком частотном диапазоне достигается при $l = 2$ и расположении трещин на глубинах $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.375$ и $d_3 = 0.4$; $x_2 = 20$, $x_3 = 40$ (рис. 5б).

Таким образом, несмотря на то, что взаимное влияние трещин сказывается на любом расстоянии (на что, в частности, указывает изменение положения резонансных полюсов на рис. 2), при определении зон непропускания для системы разнесенных трещин вполне применим дискретный подход, когда каждая (отдельная) трещина описывается матрицами отражения и прохождения, а итоговые коэффициенты вычисляются с помощью решения несложной системы линейных уравнений.

Этажные трещины

В случае не разнесенных вдоль волновода трещин, то есть при значительном перекрытии проекций областей Ω_m на ось x , каждая из трещин фактически располагается в волноводе меньшей толщины. Поперечный размер этих волноводов

определяется расстоянием от поверхности слоя до соседней трещины или же расстоянием между трещинами, расположенными выше и ниже рассматриваемой, в случае трех и более этажных трещин. Поэтому использовать результаты, полученные для одиночных трещин в слое единичной толщины, для оценки блокирующих свойств системы в целом, можно только с определенными поправками и ограничениями. Во-первых, следует принять во внимание, что резонансная локализация энергии, как правило, происходит в прямоугольном блоке между трещиной и ближайшей к ней поверхностью слоя или полупространства. Поэтому при близком расположении трещины к поверхности волновода или к соседней трещине большей длины резонансная локализация энергии в этом блоке происходит на тех же частотах, что и для одиночной трещины, расположенной на том же расстоянии от поверхности слоя или полупространства (то есть влиянием противоположной поверхности можно пренебречь). Во-вторых, если справедливо предположение о том, что каждая из этажных трещин ведет себя как одиночная, но расположенная в волноводе меньшей толщины, то безразмерные частоты резонансного блокирования, полученные для слоя единичной толщины, легко пересчитываются для рассматриваемых этажных трещин.

Пусть, например, две трещины полуширины l_1 и l_2 расположены друг над другом в волноводе единичной толщины ($H = 1$) на глубине d_1 и d_2 ($0 < d_1 < d_2 < 1$). Толщины условных волноводов, в которых расположены первая и вторая трещины: $H_1 = d_2$ и соответственно $H_2 = 1 - d_1$. Считаем, что уже имеются (или несложно получить) результаты для одиночной трещины произвольной полуширины l , расположенной на любой глубине d в слое единичной толщины. Безразмерные входные параметры для рассматриваемых этажных трещин в условных волноводах определяются выражениями $\tilde{l}_m = l_m/H_m$ и $\tilde{d}_m = d_m/H_m$, $m = 1, 2$. Им соответствуют некоторые наборы безразмерных резонансных частот $\tilde{\omega}_n^m$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2$, значения которых определяются затем в системе единиц, связанной с основным волноводом ($H = 1$), соотношениями $\omega_n^m = \tilde{\omega}_n^m/H_m$.

В качестве примера на рис. 6 приводится частотная зависимость $\kappa^+(\omega)$ для двух этажных трещин ($l_1 = l_2 = 1$, $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.85$) с диапазонами блокирования в окрестности частот $\omega = 0.55$, 0.9 , 1.35 , 1.7 и 2.3 . Толщины условных волноводов в этом случае $H_1 = 0.85$ и $H_2 = 0.75$, а безразмерные параметры соответствующих одиночных трещин $\tilde{l}_1 = 1.18$, $\tilde{d}_1 = 0.29$ и $\tilde{l}_2 = 1.33$, $\tilde{d}_2 = 0.8$. Графики коэффициента прохождения $\kappa_m^+(\omega)$ для каждой из

этих трещин в отдельности в зависимости от основной круговой частоты $\omega = \omega^m/H_m$ показаны на рис. 6 пунктирными линиями. Видно, что указанные диапазоны резонансного блокирования системой этажных трещин определяется резонансными свойствами каждой из них в отдельности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов численного анализа, проведенного в рамках рассмотренной модели для двумерного упругого волновода с несколькими горизонтальными щелевыми разрезами (трещинами), установлено, что хотя набор его резонансных полюсов ω_n не может быть получен простым объединением набора полюсов ω_n^m для каждого из препятствий в отдельности, во многих случаях блокирующие свойства системы трещин определяются частотами ловушечных мод (резонансного блокирования) каждой из них. Тем самым результаты, полученные для одиночных трещин, могут быть использованы при определении параметров неперриодической системы нескольких препятствий, обеспечивающих фильтрацию (band gaps) или виброизоляцию в требуемом частотном диапазоне.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-96607), Международной ассоциации INTAS (05-1000008-7979), а также Министерства образования и науки РФ совместно с Германской службой DAAD.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мэзон У. Физическая акустика: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Т. 1, ч. А. М: Мир, 1966. 592 с.
2. Figotin A., Godin Yu. A., Vitebsky I. Two-dimensional tunable photonic crystals // Physical Review B. 1998. V. 57. № 5. P. 2841–2848.
3. Ивченко Е.Л., Поддубный А.Н. Резонансные трехмерные фотонные кристаллы // Физика твердого тела. 2006. Т. 48. Вып. 3. С. 540–547.
4. Vasseur J.O. et al. Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media // J. Phys.: Condens. Matter. 1998. V. 10. P. 6051–6064.
5. Avila A., Griso G., Miara B. Bandes phononiques interdites en elasticite linearisee // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2005. V. 340. P. 933–938.
6. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. Computational Mechanics Publ, Southampton, 1998. 248 p.
7. Linton C.M., Evans D.V. Trapped modes above a submerged horizontal plate // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44. № 3. P. 487–506.

8. Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П. Резонансы неоднородных волн в протяженных упругих структурах // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 5. С. 872–878.
9. Бабешко В.А. “Вирусы” вибропрочности // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. 1994. Спец. выпуск. С. 90–91.
10. Индейцев Д.А., Осипова Е.В. Ловушечные моды колебаний в волноводе безграничной протяженности с включением в виде массивного штампа // Журнал технической физики. 1996. Т. 66. В. 8. С. 124–132.
11. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 314–325.
12. Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // Journal Acoustical Society of America. 2006. V. 119. N6. P. 3589–3598.
13. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое. // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. № 4. С. 702–715.
14. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
15. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
16. Wilcox P.D., Lowe M.J.S., Cawley P. Mode and Transducer Selection for Long Range Lamb Wave Inspection // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2001. V. 12. P. 553–565.