

УДК: 534.6.8

К РАСЧЕТУ ЗАХВАТА ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРАХ
НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ И НАНОКЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2009 г. Н. И. Ползикова, Г. Д. Мансфельд, С. Г. Алексеев, А. О. Раевский

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

E-mail: mans@cplire.ru

Поступила в редакцию 26.04.08 г.

Решена задача о захвате энергии колебаний в резонаторной структуре, работающей на акустических волнах, предназначенной для работы в СВЧ диапазоне, содержащей относительно толстую пластинку нанокерамики с нанесенной на нее пьезоэлектрической пленкой с электродами. Получены формулы, позволяющие подбирать толщины слоев составной резонаторной структуры, выполненной на основе изотропных подложек и нанокерамик, с целью получения высокой добротности на желаемой частоте.

PACS: 43.20.Ks

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы обусловлена повышенным интересом к составным резонаторным структурам СВЧ диапазона [1]. Перспективными материалами, на основе которых можно создать высокодобротные резонаторные структуры, могут быть не только монокристаллы с малыми акустическими потерями, но также и создаваемые в последнее время высокосовременные керамические материалы, например нанокерамики ИАГ, которые также обладают малыми потерями [2].

Добротность резонаторных структур на основе монокристаллов определяется традиционными механизмами – вязкоупругими потерями, возникающими при распространении акустических волн в слоях структуры, дифракционными потерями, потерями, связанными с рассеянием энергии акустических волн при отражениях от шероховатостей отражающих граней [3]. В керамиках возможны дополнительные специфические механизмы потерь энергии, обусловленные рассеянием волн на зернах и порах структуры [4]. Специфические условия распространения акустических волн в керамиках требуют также модификации теории, описывающей периодическую по частоте добавку к затуханию, связанную с возбуждением мод Лэмба, уносящих энергию из резонансной области составного резонатора [3, 4]. Информация о величине этих потерь чрезвычайно важна как для понимания природы акустических потерь в тонких слоях керамики, так и для разработки практических устройств. В случае, когда длина акустической волны много больше масштабов пространственных неоднородностей в среде распространения акустических волн, что часто имеет место в случае нанокерамик, задача сводится к

анализу захвата энергии в изотропной среде с усредненными акустическими характеристиками. Задача о захвате энергии колебаний в акустических резонаторах на основе керамики до настоящего времени не решалась.

Использование керамики для изготовления пластинок резонаторов имеет и ряд преимуществ перед монокристаллическими пластинами. Это небольшая стоимость материала пластины и отсутствие необходимости высокоточной (с точностью до единиц угловых секунд) ориентации пластины по отношению к кристаллографическим осям.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О СПЕКТРЕ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАСТИНЕ
ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Структура составного акустического резонатора схематически показана на рис.1. Подложка представляет собой относительно толстый слой l с плоскопараллельными гранями, выполненный из изотропного материала, например, керамики ИАГ. На его поверхности находятся: электрод 2 – тонкая металлическая пленка, пленка пьезоэлектрика 3 и снова тонкопленочный металлический электрод 4 . Вся структура преобразователя $2-4$ имеет относительно небольшие поперечные размеры $2a$ и именно под ней по всей толщине структуры в основном концентрируется колебательная энергия составного акустического резонатора. Как и в случае монокристаллов [5] будем рассматривать работу составного резонатора на высоких гармониках. Это означает, что по толщине всей структуры укладывается большое число (до нескольких сотен) полуволн. Кроме того, будем считать, что толщина подложки d значительно

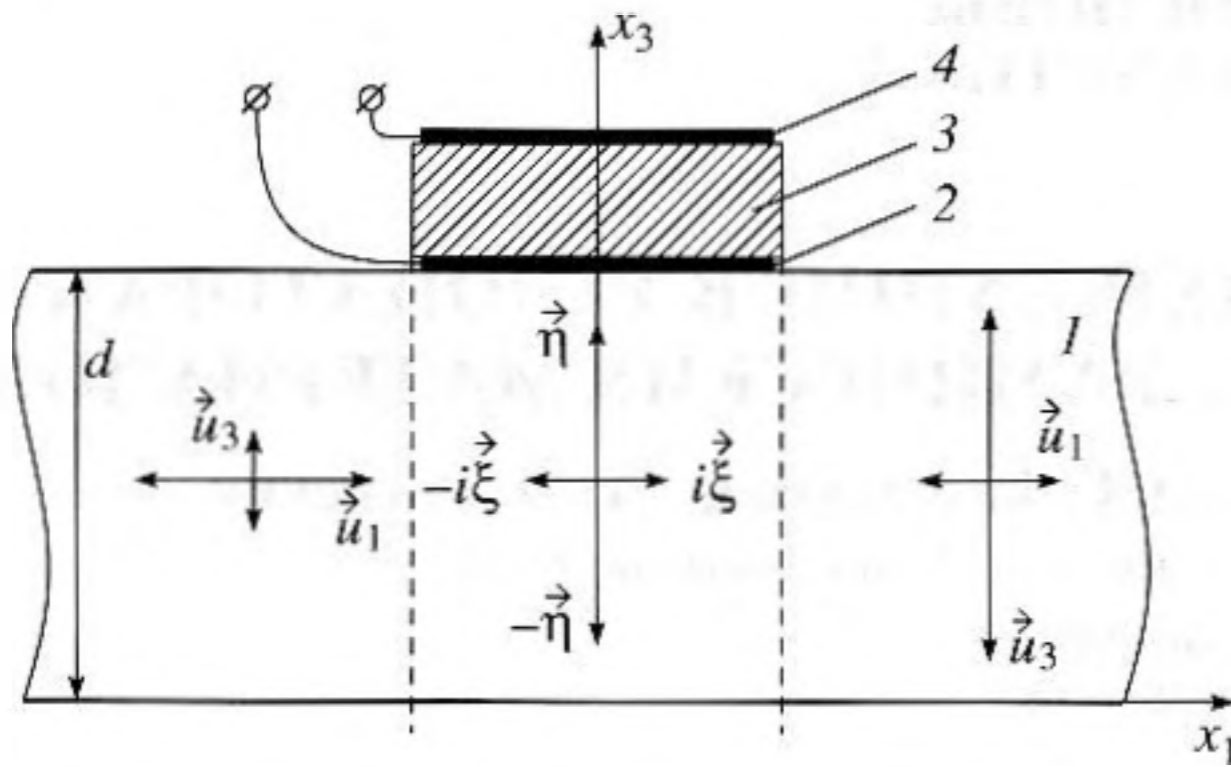


Рис. 1. Схематический вид составной резонаторной структуры: 1 – изотропная пластина из материала с малыми акустическими потерями; 2, 4 – металлические пленочные электроды; 3 – пьезоэлектрическая пленка.

превышает толщину преобразователя t . При этом эффективная толщина вычисляется с учетом набега фаз в материалах слоев преобразователя [5]. В результате, структура преобразователь-подложка может быть рассмотрена как изотропная пластина с изменяющейся в области $-a < x_1 < a$ толщиной.

Упругие свойства изотропного тела описываются двумя константами, например, упругими модулями c_{11} и c_{44} , которые определяют скорости продольной и вырожденной поперечной акустических волн. В случае нанокерамики из ИАГ для нахождения этих модулей можно воспользоваться методом усреднения упругих модулей монокристалла c'_{ik} , известным как метод Фогта–Ройса–Хилла (ФРХ) [6]. Усредненные значения модуля Юнга E и модуля сдвига G находятся как

$$E = \frac{E_V + E_R}{2}, \quad G = \frac{G_V + G_R}{2}, \quad (1)$$

где E_V, G_V – усредненные модули по Фогту

$$E_V = \frac{(c'_{11} - c'_{12} + 3c'_{44})(c'_{11} + 2c'_{12})}{2c'_{11} + 3c'_{12} + c'_{44}}, \quad (2)$$

$$G_V = \frac{c'_{11} - c'_{12} + 3c'_{44}}{5},$$

а E_R, G_R – усредненные модули по модели Ройса

$$E_R = \frac{5c'_{44}(c'_{11} - c'_{12})(c'_{11} + 2c'_{44})}{c'_{44}(3c'_{11} + c'_{12}) + (c'_{11} - c'_{12})(c'_{11} + 2c'_{12})}, \quad (3)$$

$$G_R = \frac{5c'_{44}(c'_{11} - c'_{12})}{4c'_{44} + 3(c'_{11} - c'_{12})}.$$

Модули упругости c_{11} и c_{44} находятся из уравнений (1–3) после подстановки их в соотношения

$$c_{11} = G \frac{4G - E}{3G - E}, \quad c_{44} = G. \quad (4)$$

Очевидно, что для ИАГ с фактором анизотропии $A = 2c'_{44}/(c'_{11} - c'_{12})$, близким к единице, отличие усредненных модулей от соответствующих модулей монокристалла должно быть незначительным. Кроме того, поскольку анизотропия положительная ($A > 1$), скорость продольной волны оказывается выше, а поперечной ниже соответствующих скоростей в кристаллографических направлениях монокристалла. Для других материалов с ($A < 1$), соотношение скоростей было бы обратным. Используя численные значения $c'_{11} = 33.32 \times 10^{10}$ Н/м², $c'_{44} = 11.50 \times 10^{10}$ Н/м², $c'_{12} = 11.07.07 \times 10^{10}$ Н/м² ($A = 1.03$) для монокристалла ИАГ получаем усредненные модули керамики:

$$c_{11} = 34.495 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{44} = 11.348 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$$

и $c_{12} = c_{11} - 2c_{44} = 11.798 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Связанные уравнения для компонент вектора механического смещения $u_i, i = 1, 3$ в изотропном материале имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{44}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2},$$

где ρ – плотность материала, c_{ik} – модули упругости. Компоненту вектора механического смещения, параллельную оси резонатора u_3 , будем называть продольной, а компоненту u_1 поперечной. Сдвиговая компонента u_2 не связана с u_1, u_3 и описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right). \quad (6)$$

По аналогии с [5] решение (5, 6), для волн распространяющихся вдоль оси x_3 с амплитудой изменяющейся вдоль оси x_1 ищется в виде

$$u_i = (A_i \cos \eta x_3 + B_i \sin \eta x_3) \exp(-\xi x_1) \exp(i\omega t). \quad (7)$$

Результатом решения задачи является нахождение волновых чисел ξ и η , описывающих характер распространения мод, возбуждаемых в структуре, и уносящих энергию в поперечном к оси резонатора направлении. В наших обозначениях распространению этих волн соответствует мнимое ξ . Действительному ξ соответствует затуха-

ние волны в поперечном к оси резонатора направлении.

Из (1) могут быть найдены выражения для η в виде

$$\eta_{1,2}^2 = \eta_{01,02}^2 + \xi^2, \quad (8)$$

где

$$\eta_{01} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{c_{11}}}, \quad \eta_{02} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{c_{44}}}.$$

Дисперсионное уравнение можно получить, учитывая наличие двух корней η_1 и η_2 и граничные условия для механически ненагруженной пластины (равенство нулю механических напряжений на свободных границах).

В результате получается точное трансцендентное дисперсионное уравнение для произвольных значений ξ и η

$$(1 + M^2) \sin \eta_1 d \sin \eta_2 d + 2M(1 - \cos \eta_1 d \cos \eta_2 d) = 0. \quad (9)$$

Искомая величина ξ входит согласно (8) в выражения для $\eta_{1,2}$, а также в коэффициент M :

$$M = -\frac{4\xi^2 \eta_1 \eta_2}{(\eta_2^2 + \xi^2)}. \quad (10)$$

При малых ξ коэффициент M пропорционален ξ^2

$$M \approx -\frac{\xi^2 \eta_{01}}{\eta_{02}^3}. \quad (11)$$

Поэтому в первом приближении можно решать уравнение (9), полагая $M = 0$. В результате получается два независимых решения для квазипродольной и квазипоперечной волн, соответственно

$$\sin \eta_1 d = 0, \quad \sin \eta_2 d = 0. \quad (12)$$

Подставляя решения уравнений (12) $\eta_1^{(1)} d = \pi k$ и $\eta_2^{(1)} d = \pi m$ в (8) получим в явном виде приближенное решение:

$$(\xi_1^{(1)})^2 = \left(\frac{\pi k}{d}\right)^2 - \eta_{01}^2, \quad (\xi_2^{(1)})^2 = \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 - \eta_{02}^2. \quad (13)$$

Пересечения зависимости (13) с осью частот ($\xi_{1,2}^{(1)} = 0$) дает

$$\omega_k = \frac{\pi k}{d} \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad \omega_m = \frac{\pi m}{d} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad (14)$$

– частоты резонанса для чисто продольных и чисто поперечных волн в пластине.

В следующем приближении, полагая

$$\eta_{1,2} d = \eta_{1,2}^{(1)} d + \left(\frac{\xi_{1,2}^{(1)}}{\eta_{1,2}^{(1)}}\right)^2 \Delta_{1,2},$$

где

$$\Delta_1 = -2 \left(\frac{c_{44}}{c_{11}}\right)^{3/2} \frac{(-1)^k - \cos(\pi k \sqrt{c_{11}/c_{44}})}{\sin(\pi k \sqrt{c_{11}/c_{44}})},$$

$$\Delta_2 = -2 \left(\frac{c_{44}}{c_{11}}\right)^{1/2} \frac{(-1)^m - \cos(\pi m \sqrt{c_{44}/c_{11}})}{\sin(\pi m \sqrt{c_{44}/c_{11}})},$$

можно получить решения, соответственно, для квазипродольных (15) и квазипоперечных (16) волн:

$$\xi_1^2 = \frac{\pi k (\eta_{01} d)^2 - (\pi k)^2}{d^2 (\pi k + 2\Delta_1)}, \quad (15)$$

$$\xi_2^2 = \frac{\pi m (\eta_{02} d)^2 - (\pi m)^2}{d^2 (\pi m + 2\Delta_2)}. \quad (16)$$

При $\omega > \omega_k$ и $\omega > \omega_m$ волновые числа $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$ мнимые. Это соответствует распространению этих волн в поперечном к оси резонатора направлении. Действительному ξ при $\omega < \omega_k$ и $\omega < \omega_m$ соответствует экспоненциальное затухание волн в направлении оси x_1 .

Точные выражения для смещений можно представить в виде $\mathbf{u} = (U_1(x_3), 0, U_3(x_3)) \exp(-\xi x_1) \exp(i\omega t)$, где

$$U_1(x_3) = u_0 \left[(\sin(\eta_1 d) + M \sin(\eta_2 d)) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\cos(\eta_2 x_3)}{\beta} + \frac{\xi}{\eta_1} \cos(\eta_1 x_3) \right) - \right. \\ \left. - \frac{\xi}{\eta_1} \sin(\eta_1 x_3) + \frac{M}{\beta} \sin(\eta_2 x_3) \right],$$

$$U_3(x_3) = u_0 \left[\cos(\eta_1 x_3) - \frac{M \xi}{\beta \eta_2} \cos(\eta_2 x_3) + \right. \\ \left. + (\sin(\eta_1 d) + M \sin(\eta_2 d)) \times \right. \\ \left. \times \left(\sin(\eta_1 x_3) + \frac{\xi}{\beta \eta_2} \sin(\eta_2 x_3) \right) \right], \quad (17)$$

$$\beta = -2\xi \eta_1 / (\eta_2^2 + \xi^2).$$

Формулы (15) и (16) справедливы в случае, если $(\xi/\eta_{1,2})^2 \ll 1$ и если частоты квазипоперечных волн далеки от частот квазипродольных волн, т.е.

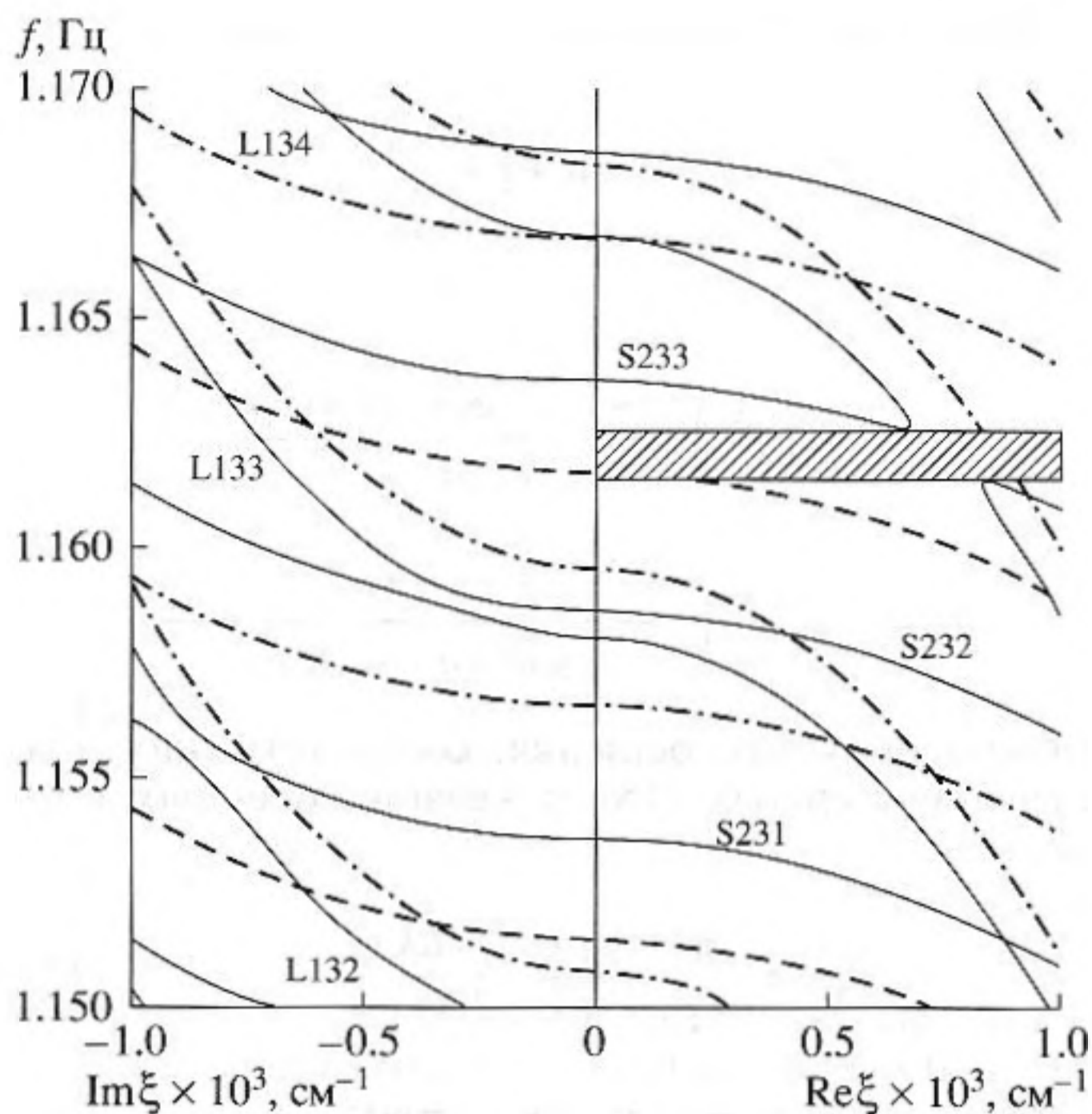


Рис. 2. Частотные зависимости действительной и мнимой частей волнового числа ξ для волн, распространяющихся в подложке из керамики ИАГ. Сплошные кривые – результат численного решения уравнения (9) для подложки, штрих – пунктирные и пунктирные кривые – приближенные решения по формулам (15) для продольных волн и (16) для поперечных волн в структуре со слоями преобразователя. Цифры возле сплошных кривых – номера гармоник волн в подложке. Буква L – соответствует продольным волнам, буква S – поперечным. Заштрихована запрещенная зона.

когда решения уравнения (9) не совпадают (вдали от областей гибридизации).

В этом случае из (17) следует, что смещения могут быть представлены как

$$U_3(x_3) = u_0 \left(\cos(\eta_1 x_3) + O\left(\frac{\xi^2}{\eta_1^2}\right) \right), \quad (18)$$

$$|U_1(x_3)| \sim \frac{\xi}{\eta_1} |U_3(x_3)|,$$

$$U_1(x_3) = u_0 \left(\cos(\eta_2 x_3) + O\left(\frac{\xi^2}{\eta_2^2}\right) \right), \quad (19)$$

$$|U_3(x_3)| \sim \frac{\xi}{\eta_2} |U_1(x_3)|,$$

для квазипродольной (18) и для квазипоперечной (19) волн соответственно, что схематически изображено в левой и правой части рис. 1.

Наличие слоев преобразователя учитывается, как и в работах [6]. В результате наличие слоев

преобразователя смещает картину дисперсионных кривых для пластины либо вниз, либо вверх по частоте. Таким образом, найдя фазовые сдвиги в слоях преобразователя, мы сводим задачу к трансформации дисперсионных кривых, вычисленных только для пластины. Заметим, что знак сдвига частоты может быть как одинаковым, так и разным для различных типов мод.

Обозначим как ω_s и ω_t резонансные частоты для пластины с ее истинной толщиной и пластины с эффективной толщиной (что соответствует структуре с преобразователем), и соответственно через ξ_s и ξ_t – зависящие от частоты постоянные затухания.

В случае, когда частота колебаний ω лежит между частотами отсечки

$$\omega_s > \omega > \omega_t, \quad (20)$$

энергия колебаний оказывается локализованной в области под преобразователем и вблизи нее – т.е. имеет место так называемый захват энергии колебаний.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты приведенного анализа удобно проиллюстрировать с помощью численных расчетов.

На рис. 2 показаны частотные зависимости волнового числа ξ для волн, распространяющихся в подложке из керамики иттрий – алюминиевого граната. Сплошные кривые – результат численного решения уравнения (9). Толщина пластины ИАГ была выбрана равной 500 мкм. На рисунке представлены квазипродольные моды с номерами $k = 132, 133, 134$ и квазипоперечные с номерами $m = 231, 232, 233$. В области действительных значений ξ возникают щели в спектре затухающих решений. На границах щелей решения для квазипродольных и квазипоперечных мод переходят друг в друга.

Здесь же приведен пример сдвига дисперсионных кривых при добавлении к пластине слоев преобразователя (толщины электродов – 0.1 мкм, толщина пленки окиси цинка – 3 мкм). Набеги фаз для продольных мод в этой области частот эквивалентны эффекту уменьшения толщины пластинки соответственно на 0.61, 0.65 и 0.69 мкм. Схематически этот случай изображен на рис. 3а. Соответственно дисперсионные кривые для структуры в целом (штрих-пунктир) проходят выше по частоте, чем зависимости, вычисленные для пластины (сплошные линии). Для поперечных волн имеет место обратная картина: пунктирные линии проходят ниже сплошных. Набеги фаз для перечисленных мод здесь эквивалентны эффекту увеличения толщины пластины на 0.79, 0.87 и 0.95 мкм, соответственно (рис. 3б).

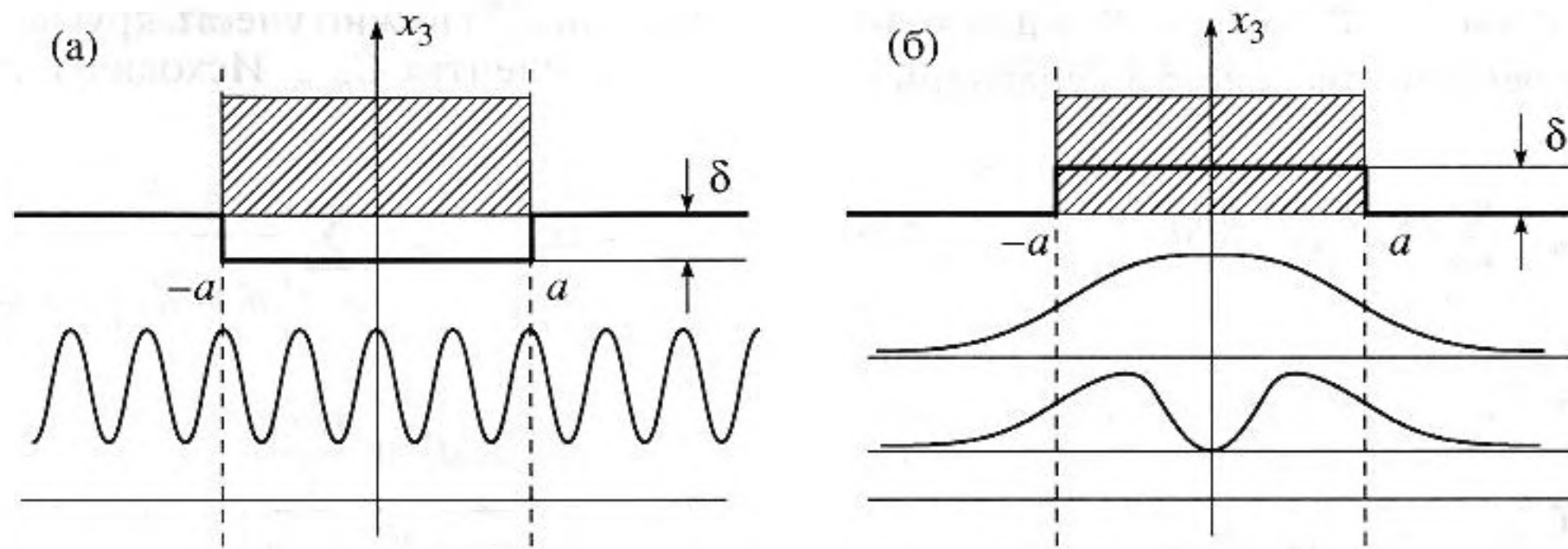


Рис. 3. Условное распределение амплитуды колебаний в структуре: (а) Случай отсутствия захвата энергии; (б) Случай захвата энергии: верхняя кривая – на апертуре преобразователя укладывается одна полуволна, нижняя кривая – на апертуре преобразователя укладываются три полуволны.

Точное значение частоты в интервале (20) зависит не только от толщины, но и от размеров апертуры преобразователя. В случае преобразователя с апертурой $2a$ частоту можно найти, как и в [8, 9]. С этой целью выражения для механических смещений под преобразователем записываются в виде распространяющихся волн во взаимно противоположных направлениях вдоль оси x_1 . Вне преобразователя они имеют вид затухающих по мере удаления от преобразователя решений. Используя условие непрерывности механических смещений и напряжений на границах областей под преобразователем и вне его можно получить уравнение для нахождения собственных частот всей структуры:

$$\operatorname{tg}(i\xi_s a) = \frac{\xi_s}{i\xi_t}, \quad \operatorname{ctg}(i\xi_t a) = -\frac{\xi_s}{i\xi_t}, \quad (21)$$

соответственно, для четного и нечетного числа полуволн, укладываемых на ширине апертуры преобразователя. Уравнение (21) может иметь решения только в указанном частотном диапазоне (20) т.е. лишь в случае, когда ξ_s действительное, а ξ_t – мнимое. Однако уравнения (21) не учитывают смешанный характер смещений в волне и вклад всей совокупности мод в граничные условия.

Рассмотрим спектр колебаний в составном резонаторе в области частот, удовлетворяющих неравенству (20), и вдали от областей гибридизации продольных и поперечных колебаний строго. Будем считать, что в соответствии с рис. 1 область пластины под преобразователем $|x_1| < a$ имеет эффективную толщину $d' = d + \delta$, причем $0 < \delta/d \ll 1$. При выполнении неравенства $(\xi/\eta_{1,2})^2 \ll 1$ согласно (18, 19) можно пренебречь смешанным характером механических смещений, т.е. вкладом поперечных компонент в продольные и наоборот. Опуская временной множитель, представим решения для компонент смещения U в виде

$$U_s^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\pm \cos \frac{\pi n x_3}{d} \exp(\mp \xi_{sn} x_1), \quad |x_1| > a;$$

$$U_t = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x_3}{d'} [B_m^+ \exp(+\xi_{tm} x_1) + B_m^- \exp(+\xi_{tm} x_1)], \quad |x_1| < a. \quad (22)$$

Первое уравнение в (22) содержит два решения: с индексом “+” для $x_1 > -a$ и с индексом “-” для $x_1 < -a$. Второе уравнение относится к области преобразователя. На границах плоскостей $|x_1| = a$ решения (22) и нормальные компоненты напряжений $T = \partial U / \partial x_1$ должны быть непрерывны при любом значении координаты $0 < x_3 < d$. На границе преобразователя при $d < x_3 < d'$ следует задать дополнительные граничные условия, например равенство нулю либо смещений, либо напряжений.

Предположим, что при $d < x_3 < d'$ выполняются условия $T_t|_{x_1 = \pm a}$. Тогда граничные напряжения в пластине можно записать в виде

$$T_s^\pm|_{x_1 = \pm a} = \begin{cases} \left. \frac{\partial U_s^\pm}{\partial x_1} \right|_{x_1 = \pm a}, & 0 \leq x_3 \leq d, \\ 0, & d \leq x_3 \leq d'. \end{cases} \quad (23)$$

Выражения (23) можно разложить по гармоникам $\cos \pi m x_3 / d'$ в ряд Фурье. Смещения $U_t|_{x_1 = \pm a}$ разложим по гармоникам $\cos \pi n x_3 / d$. Теперь уравнения непрерывности напряжений будут содержать зависимость от координаты x_3 только в виде рядов по гармоникам $\cos \pi m x_3 / d'$, а уравнения непрерывности для смещений по гармоникам $\cos \pi n x_3 / d$. Приравнявая члены при одинаковых гармониках, можно выразить коэффициенты A_n^\pm ,

F_n^- через амплитуды F_i^+ ($F_n^\pm = B_n^+ \pm B_n^-$), для которых получается бесконечная система уравнений

$$K_m F_m^+ + \sum_{i \neq 0} D_{mi} F_{m+i}^+ = 0. \tag{24}$$

Здесь $K_m = K_m^0 + K_m^1$,

$$K_m^0 = \left(\frac{C_{mm}^2}{i \xi_{(t)m}} - i \xi_{(t)m} \right) \sin(2i \xi_{(t)m} \alpha) + 2C_{mm} \cos(2i \xi_{(t)m} \alpha),$$

$$K_m^1 = \sum_{p \neq 0} \frac{C_{m,m+p}^2}{i \xi_{(t)m+p}} \sin(2i \xi_{(t)m+p} a),$$

$$D_{m,k} = C_{m,m+k} (\cos(2i \xi_{(t)m} a) + \cos(2i \xi_{(t)m+k} a)) + \tag{25}$$

$$+ \sum_{p \neq 0} \frac{C_{m,m+p} C_{m+p,m+k}}{i \xi_{(t)m+p}} \sin(2i \xi_{(t)m+p} a),$$

$$C_{m,k} = \frac{4mk \sin \frac{\pi m d}{d'} \sin \frac{\pi k d}{d'}}{(\pi d d')^2} \times$$

$$\times \sum_p \frac{\xi_{(s)p}}{\left[\left(\frac{m}{d'} \right)^2 - \left(\frac{p}{d'} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{k}{d'} \right)^2 - \left(\frac{p}{d'} \right)^2 \right]}.$$

Условием разрешимости системы (24) является равенство нулю бесконечного детерминанта, составленного из коэффициентов при F_i^+ . Приближенное решение задачи можно получить по теории возмущений, считая малым параметром $\lambda = \delta/d \ll 1$. Оставляя в уравнениях (24) только члены с $F_m^+, F_{m\pm 1}^+$, можно оборвать цепочку уравнений и получить дисперсионное уравнение в виде

$$K_m = \frac{D_{m,1}^2}{K_{m+1}} + \frac{D_{m,-1}^2}{K_{m-1}}. \tag{26}$$

В нулевом порядке по взаимодействию гармоник получаем $C_{m,k} = \xi_{(s)m} \delta_{m,k}$, $D_{m,k} = 0$. Уравнение (26) переходит в уравнение

$$K_m^0 = 0, \tag{27}$$

которое, как легко показать, эквивалентно двум уравнениям (21). В следующем приближении в

уравнении (27) нужно учесть другие члены суммы в коэффициентах $C_{m,m}$. Исходя из (25), получаем

$$C_{m,m} = \alpha_m \left[\xi_{(s)m} + \sum_{p \neq 0} \frac{\xi_{(s)m+p}}{\left[d^2 - d'^2 \left(1 + \frac{p}{m} \right)^2 \right]^2} \right], \tag{28}$$

$$\alpha_m = \left[\frac{2dd' \sin \frac{\pi m d}{d'}}{\pi m (d^2 - d'^2)} \right]^2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha_m = 1.$$

Подставим в (28) приближенные значения для волновых чисел

$$\xi_{(s)m} = \frac{\sqrt{2\pi m}}{d} \sqrt{\lambda}, \tag{29}$$

$$\xi_{(s)m+p} = \frac{\sqrt{2\pi m}}{d} \sqrt{p(1 + p/2m)}.$$

В результате приходим к оценке

$$C_{mm} \approx \frac{\sqrt{2\pi m}}{d} (\sqrt{\lambda} + m^2 \lambda^2 \Sigma),$$

$$\Sigma = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\left(p \left(1 + \frac{p}{2m} \right) \right)^{3/2}} = \Sigma_1 - i \Sigma_2. \tag{30}$$

Из (29, 30) видно, что гармоники с $p > 0$ соответствуют спадающим от преобразователя решениям, их число бесконечно, а их вклад может быть

оценен как $\Sigma_1 = \sum_{p > 0} \frac{1}{\left(p \left(1 + \frac{p}{2m} \right) \right)^{3/2}} < \zeta(3/2)$.

Гармоники с $p < 0$ соответствуют бегущим от преобразователя решениям, их число конечно ($-1 \geq p \geq -m$), а их вклад может быть оценен как

$$\Sigma_2 = \sum_{|p|=1}^m \left(\frac{2}{|p|(1+m-|p|)} \right)^{3/2} < 2^{3/2} \zeta(3/2). \text{ Здесь}$$

$\zeta(z)$ – дзета-функция Римана. Величина Σ_2 в результате определяет затухание волны, которое связано с уходом энергии из области преобразователя.

Следует отметить два важных следствия вытекающих из рассмотрения взаимодействия гармоник с разными номерами. Во-первых, появляется затухание колебаний в области преобразователя даже в диапазоне частот, в котором выполняется условие захвата энергии (20), когда отсутствует взаимодействие гармоник с разными номерами. Во-вторых, учет взаимодействия гармоник с разными номерами оказывается важным для нахождения точных резонансных частот структуры и оптимизации размеров апертуры и толщины преобразователя. Условие, когда можно

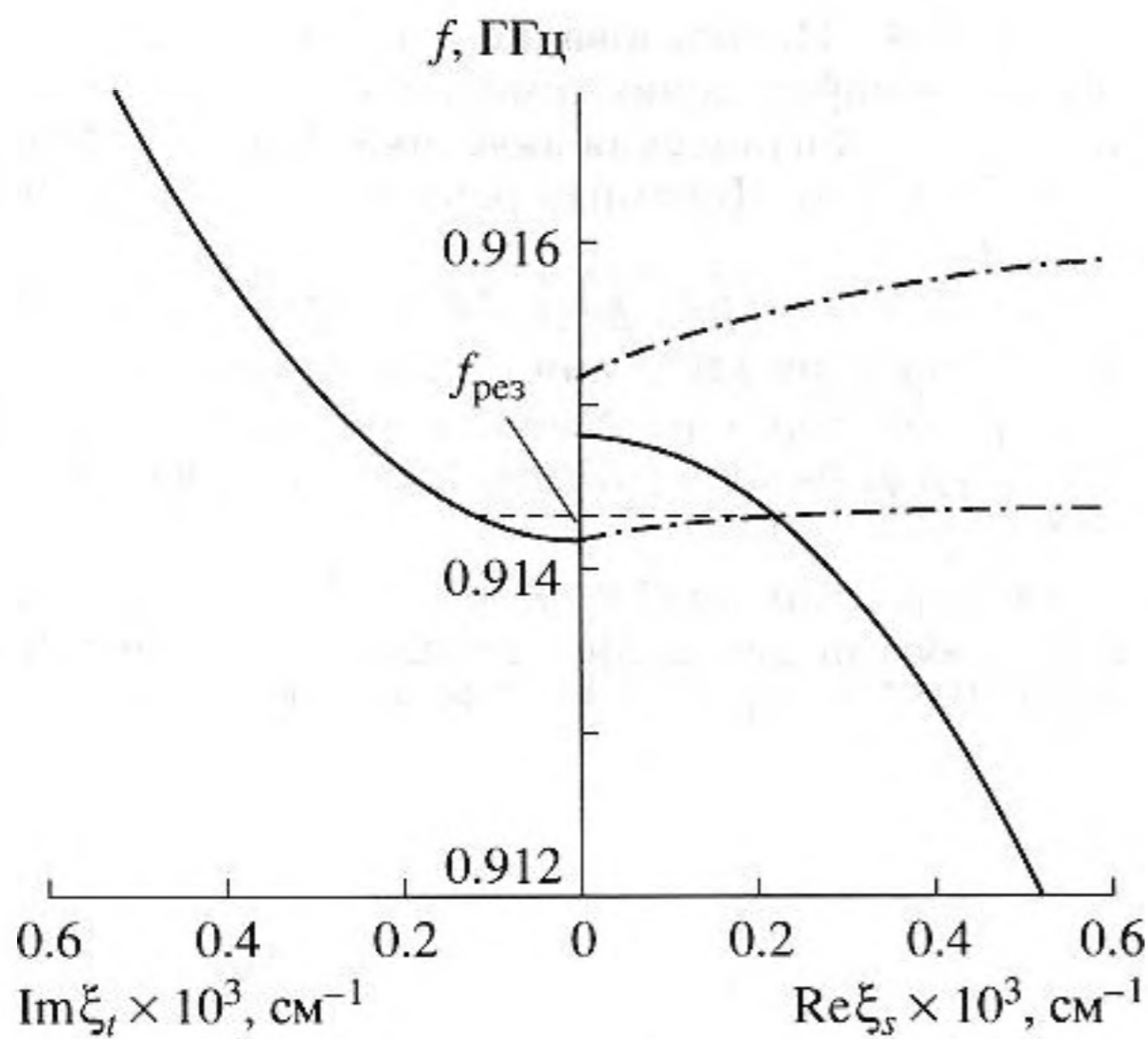


Рис. 4. Иллюстрация графического нахождения резонансной частоты продольной моды с $k = 105$. Сплошные кривые – частотные зависимости $\text{Re}\xi_s(f)$ и $\text{Im}\xi_t(f)$. Штрих – пунктирные кривые – график функции $(\text{Im}\xi_t) \text{tg}(\text{Im}\xi_t a)$. Штриховая кривая, параллельная оси абсцисс указывает значения резонансной частоты f_p и $\text{Im}\xi_t(f_p)$.

пренебречь этим взаимодействием, вытекает из (30) и имеет вид:

$$\lambda^{3/2} \ll \frac{1}{m^2}. \tag{31}$$

Так для вышеприведенных параметров пластины в рассмотренном частотном диапазоне $\lambda^{3/2} \approx 7.64 \times 10^{-5}$. Таким образом, для квазипоперечных гармоник с $m = 231, 232, 233$ (см. рис. 2) условие (31) не выполняется и частоту резонатора следует находить с учетом взаимодействия всех гармоник из уравнений (27) и (30).

В то же время на частотах порядка 900 МГц для квазипродольной волны с $k = 105$ и тех же параметров пластины набеги фаз эквивалентны эффекту увеличения толщины пластины на 0.3 мкм. В этом случае $\lambda^{3/2} \approx 1.5 \times 10^{-5}$. Таким образом, для гармоник с номером k порядка 100 и ниже условие (31) выполняется и можно, и для нахождения частоты резонатора действительно можно использовать уравнение (21). Приведем пример графического решения (21) для этого случая.

На рис. 4 представлены расчетные дисперсионные кривые соответствующие четному распределению смещения относительно оси структуры при апертуре преобразователя $2a = 200$ мкм.

Расчитанное значение резонансной частоты структуры равно $f_p = 914.3$ МГц. Оно соответствует точке пересечения $\text{Re}\xi_s(f)$ с решением уравнения (21) и в соответствии с (20) находится между частотами отсечки для пластины и структуры в

целом. Найденной резонансной частоте соответствует отличное от нуля значение $\text{Im}\xi_t(f_p)$. Согласно (13), это означает, что под преобразователем для поперечного по отношению к оси структуры направления действительно имеет место волновое решение, а вне его – затухающее решение. При этом имеет место захват энергии колебаний на найденной резонансной частоте. На заданной апертуре преобразователя укладывается менее половины длины волны (см. рис. 3б, верхняя кривая). В данном примере это решение является единственным. Заметим, что при изменении толщины преобразователя и его апертуры возможен случай, когда имеется несколько пересечений $\text{Re}\xi_s(f)$ с решением уравнения (13) (см. рис. 3б, нижняя кривая).

В широком интервале частот из-за набега фаз в слоях преобразователя порядок частот отсечки ω_s и ω_t может чередоваться, что приводит к периодичности чередования областей захвата и не захвата энергии колебаний. Такая периодичность наблюдалась экспериментально в [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получено точное решение задачи о спектре колебаний в составной резонаторной структуре, работающей на продольных или поперечных акустических волнах, предназначенной для работы в СВЧ-диапазоне, содержащей относительно толстую пластинку керамики с нанесенной на нее пьезоэлектрической пленкой с электродами. Задача решена для резонатора, работающего на высоких гармониках основной частоты слоя, при большом значении отношения его толщины к толщине остальных слоев структуры. Проведено детальное исследование явления захвата энергии. Получены формулы, позволяющие анализировать возможность получения высокой добротности составной резонаторной структуры на желаемой частоте и нахождения точных значений частоты составного резонатора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-02-01006-а и 07-02-13581офи-ц) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.4675).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakin K.M. Coupled resonator filters, 2002 IEEE International Ultrasonic Symposium Proceeding, Munich, Germany, October 8–11, 2002. P. 879–886.
2. Polzikova N., Mansfeld G., Alekseev S., Kotelyanskii I., Sergeev F. Acoustic resonance spectroscopy of nanoceramics // Proc. of IEEE Ultrasonic Symposium. Beijing, China Nov. 2–5, 2008 С. 655–659.

3. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые волны в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 308 с.
4. Мансфельд Г.Д., Родионова М.К., Фрейк А.Д. Немангнитные потери акустических волн в поликристаллических железо-иттриевом граната и никель – кобальтовой шпинели // ФТТ. 1992. Т. 34. № 11. С. 3308–3312.
5. Алексеев С.Г., Мансфельд Г.Д., Ползикова Н.И., Котелянский И.М. Особенности затухания и захват энергии колебаний в составных акустических резонаторах на основе монокристаллов ИАГ // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 533–539.
6. Алерс Дж. Использование измерений скорости звука для определения температуры Дебая в твердых телах. Физическая акустика. Под ред. Мэзона У. Т. 3. Ч.Б. Динамика решетки. М.: Мир, 1968. С. 13–61.
7. Алексеев С.Г., Мансфельд Г.Д., Ползикова Н.И. Захват энергии колебаний в составных акустических резонаторах на основе кубических кристаллов // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 46. № 8. С. 984–990.
8. Shockley W., Curran D.R., Koneval D.J. Trapped – energy modes in quartz filter crystals // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. № 4. Pt. 2. P. 981–993.