АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2009, том 55, № 1, с. 21–31

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.222

РАССЕЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ

Ю. А. Кобелев

Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46
E-mail: kobelev @hydro.appl.sci-nnov.ru
Поступила в редакцию 16.05.07 г.

Дается решение задачи о монопольном, дипольном и ротационном рассеянии сферической частицей неоднородного гармонического по времени звукового поля в вязкой сжимаемой жидкости и в упругой среде. Получены уравнения для сферических средних от полей на частице и определены рассеянные поля. Рассмотрены различные предельные случаи, в частности, показано, что дипольное рассеяние определяется двумя типами колебаний частицы: один – ее поступательные колебания, а другой соответствует колебаниям двух противофазных монополей. Для этих колебаний построена матрица рассеяния частицей произвольного поля, позволяющая формализовать описание процессов многократного перерассеяния звука на частицах, справедливая на любых расстояниях между частицами вплоть до их соприкосновения.

PACS: 43.20.Fn

Вопросы рассеяния звуковых волн на отдельной частице являются составной частью многих задач по диагностике сред, коагуляции частиц и т.д. Несмотря на длинную историю развития теории рассеяния звука, специфика среды или частиц заставляет вновь и вновь обращаться к этой теме. Например, в работе [1] рассматриваются монопольные колебания газового пузырька с упругой оболочкой, а в [2] – те же колебания дискообразной частицы. Общей чертой этих работ и множества других, ранее опубликованных, является представление действующих на частицу полей однородными на масштабе частицы. Но даже для частиц малого размера по сравнению с длиной звуковой волны имеют место существенно неоднородные действующие поля. Это, прежде всего, относится к полям, рассеянным другими частицами. Конечно, и в этом случае можно решать задачи перерассеяния звука, используя метод разложения действующего поля по сферическим гармоникам, громоздкий даже для идеальной жидкости [3], не говоря уже о вязкой или упругой среде. Поэтому обычно задачи перерассеяния полей решают с помощью разложения в ряд действующего поля по малому параметру – отношения радиуса частицы к расстоянию между частицами [4.5]. Отметим здесь редкие исключения из этого правила. Это работу [6], где предпринята попытка точного решения линеаризованной задачи о взаимодействии колебаний двух пузырьков газа в идеальной несжимаемой жидкости по аналогии с электростатической задачей о поле двух заряженных проводящих сфер [7]. Следует признать ее решение неправильным. Поле скорости колебаний частиц жидкости вблизи поверхности пузырька не является нормальным к поверхности – всегда имеется тангенциальная компонента, обусловленная колебаниями другого пузырька. В электростатике же это соответствует поверхностным токам, которые должны быть равными нулю и подавляться введением мнимых зарядов. И работу [8], где дается точное решение задачи о колебаниях пузырька газа и сферической жидкой частицы в звуковом поле.

Интерес к задачам рассеяния неоднородных полей на частицах прежде всего связан с попыткой развития теории многократного рассеяния для сред с большой плотностью рассеивающих частиц вплоть до зернистых, когда частицы могут касаться друг друга. Первым этапом здесь является вычисление матрицы рассеяния произвольного поля частицей. При этом матрица рассеяния должна отражать в рассеянном поле основные черты действующего поля, такие как всестороннее сжатие через давление, потенциальную и вихревую компоненты колебательной скорости и ее завихренности. Форма же частицы и набор типов ее колебаний более высокого порядка, чем монополь, диполь и ротатор, является, по мнению автора, в данной задаче менее важным фактором.

В настоящей работе дается вывод матрицы рассеяния произвольного звукового поля в вязкой жидкости и в изотропной упругой среде сферической частицей для монопольного, дипольного и ротационного типов рассеяния. Решение задачи опирается на результаты работы [9], где из произвольного звукового поля, а также полей плоских волн и волн, рассеянных другими частицами, выделены компоненты скоростей и сил, ответственные за монопольные, дипольные, ротационные и квадрупольные колебания сферической частицы. Квадрупольные колебания, как будет видно ниже, необходимы для полного описания дипольного рассеяния.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЧАСТИЦЫ ПОЛЕЙ

Рассмотрим колебания сферической частицы радиуса R в жидкости под действием сил окружающего ее звукового поля, колебательная скорость $\mathbf{v}$ которого определяется потенциалами Ψ и $\mathbf{\Phi}$ согласно

$$\mathbf{v} = \nabla\Psi + \mathrm{rot}\mathbf{\Phi}. \tag{1}$$

Для гармонических колебаний, пропорциональных $e^{i\omega t}$, амплитуды потенциалов описываются уравнениями

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0; \quad \Delta\mathbf{\Phi} + q^2\mathbf{\Phi} = 0, \tag{2}$$

где k – волновое число звуковой волны (будет дано ниже), а $q^2 = -i\omega\rho/\eta$ – квадрат волнового числа вязкой волны, ρ, η – плотность и коэффициент вязкости жидкости. Далее речь пойдет о жидкости, а для перехода к изотропному упругому пространству надо сделать замену k на k_e – продольное волновое число и q на k_t – поперечное волновое число [9].

Колебания частицы также будем описывать, во-первых, потенциалами Ψ_p и $\mathbf{\Phi}_p$, которые удовлетворяют уравнениям (2) с волновыми числами k_p и q_p, а во-вторых, через внешние параметры частицы, такие как ее масса, импеданс, момент инерции. Запишем эти поля внутри частицы в зависимости от координаты r, отсчитываемой от ее центра, в виде комбинации стоячих волн монопольного с амплитудой a_p, дипольного с амплитудами $\mathbf{B}_p$ и $\mathbf{D}_p$ и ротационного с амплитудой $\boldsymbol{\omega}_p$ типов

$$\begin{aligned}\Psi_p &= RQ_1(k_pr)a_p + rQ_2(k_pr)(\mathbf{B}_p\mathbf{n}),\\ \mathbf{\Phi}_p &= rQ_2(q_pr)[\mathbf{D}_p\mathbf{n}] + R^2Q_1(q_pr)\boldsymbol{\omega}_p.\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности частицы, а функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ даются формулами:

$$\begin{aligned}Q_1(x) &= (e^{ix} - e^{-ix})/2ix,\\ Q_2(x) &= -(3/x)\frac{dQ_1}{dx} = \frac{3}{2ix^3}[e^{ix} - e^{-ix} - ix(e^{ix} + e^{-ix})];\end{aligned} \tag{4}$$

при $x < 1$ функции $Q_1 \cong 1 - x^2/6$, $Q_2 \cong 1 - x^2/10$. Непосредственной подстановкой выражений (3) можно убедиться в том, что они являются решениями уравнений (2).

На границе частицы должны выполняться граничные условия: равенство в любой точке границы ее скорости колебаний $\mathbf{w}$ скоростям колебаний частиц жидкости как внутри частицы $\mathbf{v}_-$, так и вне $\mathbf{v}_+$ при $r \longrightarrow R$ и равенство нулю суммы плотности сил, действующих на любой элемент невесомой границы изнутри частицы $\mathbf{p}_-$ и снаружи $\mathbf{p}_+$, т.е.:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_- = \mathbf{v}_+; \quad \mathbf{p}_+ = -\mathbf{p}_-. \tag{5}$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе [9] для $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{p}_+$, выделим в скорости $\mathbf{w}$ и плотности силы $\mathbf{p}$ монопольные – w_m, p_m, дипольные – $\mathbf{w}_d$, $\mathbf{p}_d$, квадрупольные – $\mathbf{w}_s$, $\mathbf{p}_s$ и ротационные – $R[\mathbf{\Omega}_p\mathbf{n}]$, $\mathbf{p}_\tau$ компоненты с помощью выражений

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= w_m\mathbf{n} + \mathbf{w}_d + (\mathbf{w}_s\mathbf{n})\mathbf{n} - \frac{1}{3}\mathbf{w}_s + R[\mathbf{\Omega}_p\mathbf{n}] + \delta\mathbf{w},\\ \mathbf{p} &= p_m\mathbf{n} + \mathbf{p}_d + (\mathbf{p}_s\mathbf{n})\mathbf{n} - \frac{1}{3}\mathbf{p}_s + [\mathbf{p}_\tau\mathbf{n}] + \delta\mathbf{p},\end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta\mathbf{w}$, $\delta\mathbf{p}$ – оставшиеся части скорости колебаний границы и плотности сил, которые содержат более высокие моды колебаний. Компоненты скорости $\mathbf{v}_-$ и плотности силы $\mathbf{p}_-$ определяются через сферические средние теми же формулами, что и $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{p}_+$, приведенными в работе [9]. Эти сферические средние для внутренних полей (3) записываются формулами:

$$\begin{gathered}\langle\Psi_p\rangle = RQ_1(k_pr)a_p, \quad \langle\Psi_p\mathbf{n}\rangle = \frac{r}{3}Q_2(k_pr)\mathbf{B},\\ \langle\mathbf{\Phi}_p\rangle = R^2Q_1(q_pr)\boldsymbol{\omega}_p, \quad \langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle = \frac{2r}{3}Q_2(q_pr)\mathbf{D}_p,\\ \langle(\mathbf{\Phi}_p\mathbf{n})\mathbf{n}\rangle = \frac{R^2}{3}Q_1(q_pr)\boldsymbol{\omega}_p.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь операция усреднения проводится с помощью интегрирования по поверхности сферы радиуса $r\langle(\cdot)\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(\cdot)\sin\Theta d\Theta$. В результате для каждого типа колебаний частицы, воспользовавшись формулами для внешних полей, приведенными в работе [9], и выражениями для средних от внутренних полей (7), из граничных условий (5) имеем для монопольных колебаний

$$\begin{aligned}w_m &= -\frac{1}{3}k_p^2R^2Q_2(k_pR)a_p = \frac{\partial}{\partial r}\langle\Psi\rangle',\\ p_m &= i\omega\rho_pR\left[Q_1(k_pR) - \frac{4k_p^2}{3q_p^2}Q_2(k_pR)\right]a_p = \\ &= i\omega\rho\left(1 + \frac{4}{q^2R}\frac{\partial}{\partial r}\right)\langle\Psi\rangle'\end{aligned} \tag{8}$$

для дипольных

$$\mathbf{w}_d = Q_1(k_pR)\mathbf{B}_p + 2Q_1(q_pR)\mathbf{D}_p = = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{R}\right)\langle\Psi\mathbf{n} + [\mathbf{n\Phi}]\rangle', \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_d = i\omega M_p[Q_2(k_pR)\mathbf{B}_p + 2Q_2(q_pR)\mathbf{D}_p] = = 3i\omega M\frac{1}{R}\langle\Psi\mathbf{n} + [\mathbf{n\Phi}]\rangle'$$

для квадрупольных

$$\mathbf{w}_s = 3[Q_1(k_pR) - Q_2(k_pR)]\mathbf{B}_p - -3[Q_1(q_pR) - Q_2(q_pR)]\mathbf{D}_p = = 3\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{R}\right)\left\langle\Psi\mathbf{n} - \frac{1}{2}[\mathbf{n\Phi}]\right\rangle',$$

$$\mathbf{F}_s = 3i\omega M_p\left\{\left[Q_2(k_pR) + \frac{18}{q_p^2R^2}(Q_1(k_pR) - Q_2(k_pR))\right]\mathbf{B}_p - \left[Q_2(q_pR) + \frac{18}{q_p^2R^2}(Q_1(q_pR) - Q_2(q_pR))\right]\mathbf{D}_p\right\} = \tag{10}$$

$$= 9i\omega\frac{M}{R}\left[1 - \frac{6}{q^2R^2}\left(1 - R\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\left\langle\Psi\mathbf{n} - \frac{1}{2}[\mathbf{n\Phi}]\right\rangle'$$

и, наконец, ротационных, которые преобразуются в равенство угловых скоростей

$$\mathbf{\Omega}_p = \mathbf{\Omega}_- = \mathbf{\Omega}_+, \tag{11}$$

где угловая скорость $\mathbf{\Omega}$ как в частице, так и вне ее дается выражением

$$\mathbf{\Omega} = \frac{3}{2r}\left[\left(\frac{3}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\langle(\mathbf{\Phi n})\mathbf{n}\rangle - \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\langle\mathbf{\Phi}\rangle\right]. \tag{12}$$

Подставив сюда выражения для средних из (7) и положив $r = R$, из (11) получим:

$$\mathbf{\Omega}_p = \frac{1}{3}R^2q_p^2Q_2(q_pR)\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{\Omega}'. \tag{13}$$

Для тангенциальных компонент плотности сил p_τ из (5) следует $\mathbf{p}_{\tau+} = -\mathbf{p}_{\tau-}$, что дает для моментов $\mathbf{N}_+$ силы, действующей на частицу со стороны окружающей жидкости, и $\mathbf{N}_-$ силы, действующей со стороны частицы на окружающую жидкость, равенство

$$\mathbf{N}_+ = -\mathbf{N}_-. \tag{14}$$

Согласно работе [9]

$$\mathbf{N}_+ = -2M\frac{i\omega}{q^2}R\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{\Omega}',$$

$$\text{а } \mathbf{N}_- = 2M_p\frac{i\omega}{q_p^2}R\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{\Omega}' = = 2M_pi\omega R^2[Q_1(q_pR) - Q_2(q_pR)]\boldsymbol{\omega}_p.$$

Подставив эти выражения в (14), получим:

$$\mathbf{N}_+ = 2M_pi\omega R^2[Q_1(q_pR) - Q_2(q_pR)]\boldsymbol{\omega}_p = = -2M\frac{i\omega}{q^2}R\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{\Omega}'. \tag{15}$$

В граничных условиях (8–10) и (13), (15) верхний индекс (штрих) означает переход после дифференцирования по r к его значению равному R, $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$ – масса окружающей частицу жидкости в объеме, равном объему частицы, M_p – масса частицы, $\mathbf{F}_d = 4\pi R^2\mathbf{p}_{d+}$, $\mathbf{F}_s = 4\pi R^2\mathbf{p}_{s+}$.

Избавимся в записанных граничных условиях от внутренних полей, выразив их через обычные характеристики частиц, такие как импеданс, массы, момент инерции, которые позволяют рассматривать колебания более сложных частиц, скажем, имеющих внутренние степени свободы. Вернемся к монопольным колебаниям, т.е. к первым равенствам (8), и введем безразмерный импеданс z выражением

$$z = -\frac{p_m}{i\omega\rho Rw_m} = \frac{3m}{k_p^2R^2}\left(\frac{1}{T_{p1}} - \frac{4k_p^2}{3q_p^2}\right), \tag{16}$$

где $m = \rho_p/\rho = M_p/M$, $T_{p1} = Q_2(k_pR)/Q_1(k_pR)$, $T_{p2} = Q_2(q_pR)/Q_1(q_pR)$ – будет встречаться далее. Тогда из вторых равенств (8) получаем уравнение для среднего от внешнего поля Ψ

$$\left[1 + \left(\frac{4}{q^2R} + zR\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle\Psi\rangle' = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) описывает среднее от скалярного потенциала $\langle\Psi\rangle$ в окружающей частицу среде – это может быть, опять же, жидкость или упругая изотропная среда. Далее, вернемся к уравнению (17), а сейчас рассмотрим дипольные и квадрупольные колебания, даваемые системой уравнений (9, 10). Оба типа колебаний определяются одними и теми же величинами $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{D}_p$ и $\langle\Psi\mathbf{n}\rangle$, $\langle[\mathbf{n\Phi}]\rangle$, что требует их совместного рассмотрения. Представим $\mathbf{F}_d$ и $\mathbf{F}_s$ в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_d &= i\omega M(m_{11}\mathbf{w}_d + m_{12}\mathbf{w}_s),\\ \mathbf{F}_s &= 3i\omega M(m_{21}\mathbf{w}_d + m_{22}\mathbf{w}_s).\end{aligned} \tag{18}$$

Если из первых уравнений (9) и (10) для $\mathbf{w}_d$ и $\mathbf{w}_s$ выразить $\mathbf{B}_p$ и $\mathbf{D}_p$ через $\mathbf{w}_d$ и $\mathbf{w}_s$ и подставить их в первые уравнения (9) и (10) для $\mathbf{F}_d$ и $\mathbf{F}_s$, которые затем приравнять уравнениям (18), то для масс m_{ij} получим формулы:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m\frac{T_{p1}+2T_{p2}-3T_{p1}T_{p2}}{3-2T_{p1}-T_{p2}}, \\ m_{12} &= \frac{2m(T_{p1}-T_{p2})}{3(3-2T_{p1}-T_{p2})}, \\ m_{21} &= m\frac{T_{p1}-T_{p2}}{3-2T_{p1}-T_{p2}}, \\ m_{22} &= \frac{m}{3}\left(\frac{18}{q_p^2R^2}+\frac{2T_{p1}+T_{p2}}{3-2T_{p1}-T_{p2}}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим здесь тот факт, что частица может иметь более сложное устройство, чем рассмотренная, скажем, с внутренними степенями свободы, но в любом случае она должна с внешней стороны определяться четырьмя массами m_{ij}.

Дипольные и квадрупольные колебания частицы опять, как и в случае монопольных, должны давать определенные связи между средними полями, действующими на нее. Для их выявления подставим вторые выражения для $\mathbf{w}_d$ и $\mathbf{w}_s$ из (9) и (10) в равенства (18). После этого из вторых равенств (9) и (10) для сил $\mathbf{F}_d$ и $\mathbf{F}_s$ получаем уравнения для средних полей на частице

$$\begin{aligned} &\left[(m_{11}+3m_{12})R\frac{\partial}{\partial r}+2m_{11}-3m_{12}-3\right]\langle\Psi\mathbf{n}\rangle'+ \\ &+\left[\left(m_{11}-\frac{3}{2}m_{12}\right)R\frac{\partial}{\partial r}+2m_{11}+\frac{3}{2}m_{12}-3\right]\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle'=0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\left[\left(m_{21}+3m_{22}-\frac{18}{q^2R^2}\right)R\frac{\partial}{\partial r}+\right. \\ &\left.+2m_{21}-3m_{22}-3\left(1-\frac{6}{q^2R^2}\right)\right]\langle\Psi\mathbf{n}\rangle'+ \\ &+\left[\left(m_{21}-\frac{3}{2}m_{22}+\frac{9}{q^2R^2}\right)R\frac{\partial}{\partial r}+\right. \\ &\left.+2m_{21}+\frac{3}{2}m_{22}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{6}{q^2R}\right)\right]\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle'=0. \end{aligned} \tag{21}$$

Эти уравнения можно упростить, если (20) умножить на $m_2 = m_{22} - \dfrac{6}{q^2R^2}$, а (21) – на m_{12} и вычесть одно из другого, затем (20) умножить на m_{21}, а (21) – на m_{11} и опять вычесть одно из другого, в результате получим окончательные уравнения средних полей на частице, совершающей дипольные колебания

$$\begin{aligned} &\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2+3\frac{-m_{12}-m_2}{\Delta_1}\right)\langle\Psi\mathbf{n}\rangle'+ \\ &+\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-\frac{3(2m_2+m_{12})}{2\Delta_1}\right)\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle'=0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\left(R\frac{\partial}{\partial r}-1+\frac{m_{21}-m_{11}}{\Delta_1}\right)\langle\Psi\mathbf{n}\rangle'- \\ &-\frac{1}{2}\left(R\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2m_{21}+m_{11}}{\Delta_1}\right)\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle'=0. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $\Delta_1 = m_{11}m_2 - m_{12}m_{21}$; для однородной частицы с полями внутри, даваемыми равенствами (3)

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \frac{m}{3-2T_{p1}-T_{p2}}\Big[&mT_{p1}T_{p2}+ \\ &+6(T_{p1}+2T_{p2}-3T_{p1}T_{p2})\left(\frac{m}{q_p^2R^2}-\frac{1}{q^2R^2}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{24}$$

Свойства частицы в уравнениях (22) и (23) содержатся в третьих слагаемых в скобках. Рассмотрим здесь один случай, когда частица состоит из окружающей среды, т.е. $m = 1$, $k_p = k$, $q_p = q$. Из (24) и (19) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1 = T_1T_2/(3-2T_1-T_2), \quad (m_2-m_{12})/\Delta_1 = 1/T_1, \\ (2m_2+m_{12})/\Delta_1 = 2/T_2, \\ (m_{21}-m_{11})/\Delta_1 = 3(1-1/T_1), \\ (2m_{21}+m_{11})/\Delta_1 = 3(-1+1/T_2) \end{aligned} \tag{25}$$

и уравнения (22) и (23) преобразуются в уравнения для средних от Ψ и $\mathbf{\Phi}$ по отдельности, т.е.

$$\begin{aligned} \left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-\frac{3}{T_1}\right)\langle\Psi\mathbf{n}\rangle'=0, \\ \left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-\frac{3}{T_2}\right)\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}]\rangle=0. \end{aligned} \tag{26}$$

Примерами полей Ψ и $\mathbf{\Phi}$, удовлетворяющих системе уравнений (26), могут служить потенциалы, заданные в виде плоских или рассеянных другими сферическими частицами волн, рассмотренные в работе [9] и которые будут использоваться здесь.

Другой аналогичный случай имеет место для частицы с параметрами

$$m_{11} = m_{21} = 1, \quad m_{12} = 2/3, \tag{27}$$

когда уравнения для средних принимают вид

$$\left(R\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\langle\Psi\mathbf{n}\rangle' = 0,$$
$$\left(R\frac{\partial}{\partial r}-\frac{3m_2+7}{3m_2-2}\right)\langle[\mathbf{n}\boldsymbol{\Phi}]\rangle' = 0. \quad (28)$$

Суть этих уравнений в том, что скалярное поле рассеивается на скалярное, а векторное на векторное.

Рассмотрим ротационные колебания, определяемые граничными условиями (13) и (15). Введем момент инерции частицы J равенством

$$\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} = i\omega J\boldsymbol{\Omega}_p. \quad (29)$$

Подставив сюда значения $\mathbf{N}_+$ и $\boldsymbol{\Omega}_p$, определяемые внутренними полями в (15) и (13), получим для момента инерции

$$J = \frac{6M_p}{q_p^2}\left(1-\frac{1}{T_{p2}}\right). \quad (30)$$

Для жесткой маленькой частицы $|q_pR| \longrightarrow 0$, когда $T_{p2} \longrightarrow 1 + \frac{1}{15}q_p^2R^2$, получаем $J = \frac{2}{5}M_pR^2$ – момент инерции шара. Подставив значение $\boldsymbol{\Omega}_p$ из второго равенства (13) в (29) и приравняв $\mathbf{N}$ из (29) его второму уравнению (15), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{5}Iq^2R\right)\boldsymbol{\Omega}' = 0. \quad (31)$$

Здесь $I = J/J_0$, $J_0 = \frac{2}{5}MR^2$ – момент инерции жесткого шара плотности окружающей среды, а значение $\boldsymbol{\Omega}$ дается равенством (12). Отметим, что частица может быть и более сложной и даже описываться тензором момента инерции, тогда для каждой проекции вектора $\boldsymbol{\Omega}$ будет свое уравнение.

Таким образом, на частице, колеблющейся со скоростью $\mathbf{w}$, даваемой равенством (6) при $\delta\mathbf{w} = 0$, средние по поверхности частицы поля удовлетворяют четырем уравнениям, отражающим наиболее просто три основные черты воздействия звукового поля на частицу: (17) – для монопольных (всесторонняя деформация), (22), (23) – дипольных, квадрупольных (поступательное движение) и (31) – ротационных колебаний (вращение). Эти уравнения, хотя и не имеют ограничений на радиус частицы, все же для больших ее размеров ($kR, k_pR > 1$) необходимо учитывать более высокие моды колебаний частицы, чем рассмотренные выше. Но для задач, связанных с распространением волн в средах с большой концентрацией таких частиц, скажем, газожидкостная смесь, вряд ли более высокие моды колебаний отдельной частицы могут играть заметную роль из-за угловой "изрезанности", дающей слабое взаимодействие их с рассматриваемыми типами колебаний.

2. РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

Задачей теории рассеяния является выделение из полных полей Ψ, $\boldsymbol{\Phi}$ вокруг частицы – рассеянных Ψ_s, $\boldsymbol{\Phi}_s$ и определение их параметров через характеристики оставшихся полей Ψ_{out}, $\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}$ (далее внешних) и свойства частицы. Запишем поля вокруг частицы суммой

$$\Psi, \boldsymbol{\Phi} = \Psi_{\text{out}}, \boldsymbol{\Phi}_{\text{out}} + \Psi_s\boldsymbol{\Phi}_s, \quad (32)$$

а рассеянные представим в виде

$$\Psi_s = L_k(r)a_s - R^2\frac{dL_k}{dr}(\mathbf{nB})$$
$$\boldsymbol{\Phi}_s = R^2\frac{dL_q}{dr}[\mathbf{nD}] + R^2L_q\boldsymbol{\omega}_s, \quad (33)$$

где функция $L_k(r) = \frac{R}{r}e^{-ik(r-R)}$, a_s определяет монопольную, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ – дипольные и $\boldsymbol{\omega}_s$ – ротационную компоненты в рассеянном поле. Для обеспечения ненарастания поля по мере удаления от частицы здесь, в отличие от выражений (3), где встречные волны, необходимо выбрать конкретные значения волнового числа звуковой волны [10]

$$k = \frac{\omega}{c_a}\left[1-\frac{i\omega}{c_a\rho}\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta+\kappa\left(\frac{1}{c_V}-\frac{1}{c_p}\right)\right)\right]^{1/2}, \quad (34)$$

с параметрами: c_a – адиабатическая скорость звука, ζ, κ, c_V, c_p – коэффициенты объемной вязкости, теплопроводности и теплоемкостей при постоянном объеме и давлении соответственно. И вязкой

$$q = \sqrt{-i\omega\rho/\eta} = (1-i)\sqrt{\omega\rho/2\eta}. \quad (35)$$

Рассеянные поля (33) удовлетворяют уравнениям (2); для определения же констант необходимо их вместе с внешними согласно (32) подставить в уравнения для средних полей на частице (17, 22, 23, 31). Простые вычисления дают для средних величин рассеянного поля (33) выражения:

$$\langle\Psi_s\rangle' = a_s\lim_{r\to R}\frac{R}{r}e^{-ik(r-R)} = a_s;$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\langle\Psi_s\rangle' = a_s\lim_{r\to R}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{R}{r}e^{ik(r-R)}\right] = -a_s\frac{1+ikR}{R} \quad (36)$$

$$\langle\Psi_s\mathbf{n}\rangle' = \frac{1}{3}R(1+ikR)\mathbf{B};$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\langle\Psi_s\mathbf{n}\rangle = \frac{1}{3}(1+ikR)(-2+3\beta_k)\mathbf{B}. \quad (37)$$

$$\langle[\mathbf{n\Phi}_s]\rangle' = \frac{2}{3}R(1+iqR)\mathbf{D},$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\langle[\mathbf{n\Phi}_s]\rangle' = -\frac{2}{3}(2-3\beta_q)(1+iqR)\mathbf{D}, \tag{38}$$

$$\langle(\mathbf{\Phi}_s\mathbf{n})\mathbf{n}\rangle = \frac{1}{3}\langle\mathbf{\Phi}_s\rangle; \quad \langle\mathbf{\Phi}_s\rangle = \frac{R^3}{r}e^{-iq(r-R)}\omega_s. \tag{39}$$

Подставив (39) в выражение для угловой частоты $\mathbf{\Omega}$ из (12), получим:

$$\mathbf{\Omega}'_s = (1+iqR)\boldsymbol{\omega}_s;$$
$$\frac{\partial\Omega'_s}{\partial r} = -\frac{3}{R}(1-\beta_q)(1+iqR)\boldsymbol{\omega}_s. \tag{40}$$

Здесь $\beta_x = x^2R^2/3(1+ixR)$, а $x = k, q$.

Из уравнения (17) с помощью выражений (36) находим амплитуду a_s монопольного рассеяния

$$a_s = \hat{a}\langle\Psi_{\text{out}}\rangle';$$
$$\hat{a} = -\frac{1+\left(z+\dfrac{4}{q^2R^2}\right)R\dfrac{\partial}{\partial r}}{1-(1+ikR)\left(z+\dfrac{4}{q^2R^2}\right)}. \tag{41}$$

Для плоских волн или волн, рассеянных другими частицами, согласно [9] имеем:

$$\langle\Psi_{\text{out}}\rangle = Q_1(kR)\Psi_{\text{out}},$$
$$R\frac{\partial}{\partial r}\langle\Psi_{\text{out}}\rangle' = -\frac{1}{3}k^2R^2Q_2(kR)\Psi_{\text{out}}, \tag{42}$$

где Ψ_{out} здесь и далее значение внешнего поля в центре частицы, если частицу убрать без изменения Ψ_{out}. В этом случае амплитуда монопольного рассеяния дается формулами

$$a_s = a\Psi_{\text{out}},$$
$$a = -\frac{Q_1(kR)-\dfrac{1}{3}k^2R^2\left(z+\dfrac{4}{q^2R^2}\right)Q_2(kR)}{1-(1+ikR)\left(\left(z+\dfrac{4}{q^2R^2}\right)\right)}. \tag{43}$$

Для частицы, состоящей из окружающей среды, когда $\rho = \rho_p$, $k = k_p$, $q = q_p$, а импеданс z согласно (16) равен $\dfrac{3}{k^2R^2}\left[\dfrac{Q_1(kR)}{Q_2(kR)}-\dfrac{4k^2}{3q^2}\right]$, величина $a = 0$, т.е. частица не рассеивает звук. Выражения (41) и (43) описывают все возможные ситуации в монопольном рассеянии звука сферической частицей.

Перейдем к дипольным колебаниям. Используя выражения (37), (38) из уравнений (22), (23), получим для амплитуд дипольного рассеяния $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ уравнения

$$-\left(\beta_k+\frac{m_{12}-m_2}{\Delta_1}\right)(1+ikR)\mathbf{B}+$$
$$+\left(-2\beta_q+\frac{2m_2+m_{12}}{\Delta_1}\right)(1+iqR)\mathbf{D} =$$
$$= \frac{1}{R}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2+3\frac{m_{12}-m_2}{\Delta_1}\right)\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle'+ \tag{44}$$
$$+\frac{1}{R}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-\frac{3(2m_2+m_{12})}{2\Delta_1}\right)\langle[\mathbf{n\Phi}_{\text{out}}]\rangle';$$

$$\left(1-\beta_k+\frac{m_{11}-m_{21}}{\Delta_1}\right)(1+ikR)\mathbf{B}-$$
$$-\left(1-\beta_q+\frac{2m_{21}+m_{11}}{\Delta_1}\right)(1+iqR)\mathbf{D} =$$
$$= \frac{1}{R}\left(R\frac{\partial}{\partial r}-1+\frac{m_{21}-m_{11}}{\Delta_1}\right)\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle'- \tag{45}$$
$$-\frac{1}{2R}\left(R\frac{\partial}{\partial r}-1-\frac{2m_{21}+m_{11}}{\Delta_1}\right)\langle[\mathbf{n\Phi}_{\text{out}}]\rangle'.$$

Их решением являются выражения

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R}\{\hat{d}_{11}\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle'+\hat{d}_{12}\langle[\mathbf{n\Phi}_{\text{out}}]\rangle'\}, \tag{46}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{R}\{\hat{d}_{21}\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle'+\hat{d}_{22}\langle[\mathbf{n\Phi}_{\text{out}}]\rangle'\}, \tag{47}$$

$$\hat{d}_{11} = \frac{1}{1+ikR}\times$$
$$\times\left[3+\frac{(1-3\beta_q)\Delta_1+\alpha_{11}}{\Delta_2}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-3\beta_k\right)\right],$$
$$\hat{d}_{12} = -\frac{\Delta+\alpha_{12}}{(1+ikR)\Delta_2}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-3\beta_q\right),$$
$$\hat{d}_{21} = \frac{\Delta_1+\alpha_{21}}{(1+iqR)\Delta_2}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-3\beta_k\right), \tag{48}$$
$$\hat{d}_{22} = \frac{1}{2(1+iqR)}\times$$
$$\times\left[3+\frac{(2-3\beta_k)\Delta_1+\alpha_{22}}{\Delta_2}\left(R\frac{\partial}{\partial r}+2-3\beta_q\right)\right],$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{1}{3}m_{11}+m_{12}+\frac{2}{3}m_{21}+2m_2,$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \frac{1}{3}m_{11} - \frac{1}{2}m_{12} + \frac{2}{3}m_{21} - m_2,\\ \alpha_{21} &= \frac{1}{3}m_{11} + m_{12} - \frac{1}{3}m_{21} - m_2,\\ \alpha_{21} &= \frac{2}{3}m_{11} - m_{12} - \frac{2}{3}m_{21} + m_2,\\ \Delta_2 &= -1 - 3m_2 + \Delta_1(\beta_k + 2\beta_q - 3\beta_k\beta_q) +\\ &\quad + \beta_k\alpha_{11} + \beta_q\alpha_{22}.\end{aligned} \tag{49}$$

Для внешнего поля в виде плоских волн и волн, рассеянных другими частицами, имеем согласно [9]

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle &= \frac{1}{3}rQ_2(kr)\nabla\Psi_{\text{out}},\\ \langle\mathbf{n}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}\rangle &= \frac{1}{3}rQ_2(qr)\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}},\\ \frac{\partial}{\partial r}\langle\Psi_{\text{out}}\mathbf{n}\rangle' &= \left[Q_1(kR) - \frac{2}{3}Q_2(kR)\right]\nabla\Psi_{\text{out}},\\ \frac{\partial}{\partial r}\langle\mathbf{n}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}\rangle' &= \left[Q_1(qR) - \frac{2}{3}Q_2(qR)\right]\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}},\end{aligned} \tag{50}$$

где операции дифференцирования внешних полей выполняются по координатам центра частицы. В результате амплитуды из (46), (47) записываются в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= d_{11}\nabla\Psi_{\text{out}} + d_{12}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}},\\ \mathbf{D} &= d_{21}\nabla\Psi_{\text{out}} + d_{22}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}},\end{aligned} \tag{51}$$

а операторы из (48) преобразуются в коэффициенты

$$\begin{aligned}d_{11} &= -\frac{Q_1(kR)}{1+ikR}\left[T_1 + \frac{(1-3\beta_q)\Delta_1 + \alpha_{11}}{\Delta_2}(1-\beta_kT_1)\right],\\ d_{12} &= -\frac{Q_1(qR)(\Delta_1 + \alpha_{12})}{(1+ikR)\Delta_2}(1-\beta_qT_2),\\ d_{21} &= -\frac{Q_1(kR)(\Delta_1 + \alpha_{21})}{(1+iqR)\Delta_2}(1-\beta_kT_1),\\ d_{22} &= -\frac{Q_1(qR)}{2(1+iqR)}\times\\ &\times\left[T_2 + \frac{(2-3\beta_k)\Delta_1 + \alpha_{22}}{\Delta_2}(1-\beta_qT_2)\right].\end{aligned} \tag{52}$$

В коэффициенты d_{12} и d_{22} входит экспоненциально растущая при $|q| \longrightarrow \infty$ функция $Q_1(qR)$, но произведение $Q_1(qR)\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}$ стремится к нулю, либо остается конечным, когда частица касается источника внешнего поля. Для частицы из окружающей среды ($m = 1$, $k_p = k$, $q_p = q$) имеем $d_{ij} = 0$, и рассеяния нет. Это же следует и из уравнений (26), которые удовлетворяются внешними полями без рассеянных.

И, наконец, рассмотрим ротационное рассеяние. Подставив выражения (40) в уравнение (31), получим для амплитуды $\boldsymbol{\omega}_s$ рассеянного ротационного поля

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_s &= \hat{\gamma}\boldsymbol{\Omega}'_{\text{out}};\\ \hat{\gamma} &= \frac{R\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{5}Iq^2R^2}{(1+iqR)\left(3 - \dfrac{1}{5}Iq^2R^2\right) - q^2R^2}.\end{aligned} \tag{53}$$

Опять для плоских и рассеянных другими частицами волн внешнего поля, когда

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{out}} = \frac{1}{2}Q_2(qR)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}, \tag{54}$$

имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_s &= \gamma\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Phi_{\text{out}},\\ \gamma &= \frac{Q_1(qR) + Q_2(qR)\left(\dfrac{1}{15}Iq^2R^2 - 1\right)}{(1+iqR)\left(1 - \dfrac{1}{15}Iq^2R^2\right) - \dfrac{1}{3}q^2R^2}.\end{aligned} \tag{55}$$

И опять частица, состоящая из окружающей среды, не рассеивает, т.е. $\boldsymbol{\omega}_s = 0$.

Таким образом, определены все коэффициенты полей (33), рассеянных сферической частицей от произвольного внешнего поля. Рассмотрим отдельные частные случаи, хорошо известные в литературе и подтверждающие правильность полученных результатов. Главным здесь является тот факт, что частица не рассеивает поле, если она состоит из окружающей среды, правда, только плоские волны и волны, рассеянные другими частицами. Для маленьких же частиц, очевидно, что это справедливо всегда.

Обсудим монопольные колебания. Задачи о колебаниях упругой частицы и полости в упругом пространстве [11] следуют из граничных условий (8), где надо положить $p_m = 0$, тогда равенство нулю импеданса (16), после замены q_p^2 на k_t^2 дает уравнение, определяющее частоты собственных колебаний частицы. А из второго равенства (8), после подстановки вместо $\langle\Psi\rangle'$ рассеянного поля (36), получим уравнение для частоты собственных колебаний полости

$$k_t^2R^2 = 4(1 + ikR). \tag{56}$$

Что касается непосредственно монопольного рассеяния, то здесь рассмотрим этот процесс для маленьких частиц (k^2R^2; $k_p^2R^2 \ll 1$). Упростим для этого случая величину $z + \dfrac{4}{q^2R^2}$, считая T_{p1} в z из (16) равным единице:

$$z + \frac{4}{q^2R^2} = \frac{3m}{k_p^2R^2} - \frac{4m}{q_p^2R^2} + \frac{4}{q^2R^2}. \quad (57)$$

Для жидкой частицы (скажем, пузырька газа) в жидкости знак второго слагаемого в (57) противоположен знаку третьего, который дает, например, затухание колебаний полости из-за сдвиговой вязкости окружающей ее среды. Действительно, заменив в (56) k_t^2 на $q^2 = -i\omega\rho/\eta$, получим для колебаний, пропорциональных $\exp(i\omega t)$,

$$\omega = 4i/R\left(\frac{R\rho}{\eta} + \frac{4}{c}\right). \quad (58)$$

Таким образом, второе слагаемое дает усиление колебаний упругой маленькой частицы, что невозможно. Оказывается, в этом случае необходимо учитывать мнимую часть продольного волнового числа из (34), что дает

$$z + \frac{4}{q^2R^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \\ + \frac{3im}{R^2\omega\rho_p}\left(\zeta_p + \kappa_p\left(\frac{1}{c_{pV}} - \frac{1}{c_{pp}}\right)\right) + \frac{4}{q^2R^2}, \quad (59)$$

где $\omega_0^2 = 3mc_a^2/R^2$ – собственная частота колебаний частицы. Учет мнимой части волнового числа k_p "убирает" зависимость импеданса частицы от сдвиговой вязкости, но появляется зависимость от объемной вязкости и теплопроводности. Для газового пузырька влияние этого фактора незначительно на фоне более мощного процесса теплообмена на границе, не учитываемого здесь. Если отбросить в (59) потери в частице и добавить потери от теплообмена на границе, то из (42) получим для амплитуды рассеяния звука на пузырьке газа в жидкости хорошо известное выражение (см., например, [2]).

Обсудим дипольные колебания для случая внешних полей в виде плоских или рассеянных другими частицами волн. Из вторых уравнений (9) следуют выражения для дипольной скорости $\mathbf{w}_d$ частицы и силы $\mathbf{F}_d$, действующей на нее:

$$\mathbf{w}_d = Q_1(kR)\nabla\Psi_{\text{out}} + Q_1(qR)\text{rot}\mathbf{\Phi}_{\text{out}} + \\ + \frac{R^2}{3}(k^2\mathbf{B} + 2q^2\mathbf{D}), \\ \mathbf{F}_d = i\omega M[Q_2(kR)\nabla\Psi_{\text{out}} + Q_2(qR)\text{rot}\Phi_{\text{out}} + \\ + (1+ikR)\mathbf{B} + 2(1+iqR)\mathbf{D}]. \quad (60)$$

Для маленькой частицы $T_1 = T_{p1} = 1$; $k_p^2R^2$, $k^2R^2 \ll 1$ в идеальной жидкости ($|q| \longrightarrow \infty$) из (60) и (51) имеем

$$\mathbf{w}_d = \frac{3}{2m+1}\nabla\Psi, \\ \mathbf{F}_d = i\omega M\frac{3m}{2m+1}\nabla\Psi; \quad \mathbf{B} = \frac{m-1}{2m+1}\nabla\Psi. \quad (61)$$

а в вязкой жидкости или упругой среде ($|q|^2R^2 \ll 1$) при дополнительном условии ($|q_p|^2R^2 \ll 1$) (частица упругая или сильно вязкая)

$$\mathbf{w}_d = \frac{9(1+iqR)}{9(1+iqR) - (2m+1)q^2R^2}(\nabla\Psi + \text{rot}\mathbf{\Phi}), \\ \mathbf{F}_d = \frac{9i\omega Mm(1+iqR)}{9(1+iqR) - (2m+1)q^2R^2}(\nabla\Psi + \text{rot}\mathbf{\Phi}). \quad (62)$$

Коэффициенты рассеяния $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ в этом случае принимают вид

$$\mathbf{B} = \frac{3(m-1)(1+iqR)}{9(1+iqR) - (2m+1)q^2R^2}(\nabla\Psi + \text{rot}\mathbf{\Phi}), \\ \mathbf{D} = \frac{3(m-1)}{9(1+iqR) - (2m+1)q^2R^2}(\nabla\Psi + \text{rot}\mathbf{\Phi}). \quad (63)$$

В равенствах (61–63) индекс "out" у полей опущен.

Выражения (61–63) достаточно очевидны, поэтому оставим их без обсуждения, отметим только предельный случай $m \longrightarrow \infty$, когда амплитуда $\mathbf{B}$ из (63) может увеличиваться по отношению к $\mathbf{B}$ из (61) в $3/|q|^2R^2$ раз. Этот факт был использован в работе [12] для объяснения увеличения коагуляции аэрозолей в воздухе под действием звука.

Другой хорошо известной задачей является задача о поле вокруг сферической частицы, совершающей заданные дипольные колебания со скоростью $\mathbf{w}_d$ в идеальной и вязкой жидкости [13]. Здесь дадим ее решение в общем случае. В уравнения (9) и (10) подставим только рассеянные поля (37) и (38), а скорость $\mathbf{w}_s$ квадрупольных колебаний положим равной нулю. В результате получим

$$\mathbf{B} = \frac{3(1+iqR) - q^2R^2}{3(1+ikR) - k^2R^2}\mathbf{D}, \quad (64)$$

$$\mathbf{D} = \frac{[3(1+ikR) - k^2R^2]\mathbf{w}_d}{2q^2R^2(1+ikR) + k^2R^2(1+iqR) - k^2q^2R^4}. \quad (65)$$

Для маленькой частицы $kR \ll 1$ имеем

$$\mathbf{D} = \frac{3\mathbf{w}_d}{2q^2R^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{3(1+iqR)-q^2R^2}{2q^2R^2}\mathbf{w}_d. \quad (66)$$

Выражение для **B** (66) приведено в задаче 2 к параграфу 74 [13]. Для произвольной частицы в идеальной жидкости ($|q| \longrightarrow \infty$)

$$\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{w}_d}{2(1+ikR)-k^2R^2}, \quad (67)$$

совпадающее с выражением для амплитуды поля из задачи 1 к параграфу 74 [13].

Кратко остановимся на квадрупольных колебаниях частицы. На самом деле это название не совсем точное, хотя и имеет много общего с этим типом колебаний. Из определения (6) видно, что средние скорость, сила и изменение объема частицы, как у квадруполя, равны нулю. Отличие содержится в колебаниях точек поверхности частицы на окружности, соответствующей условию $(\mathbf{w}_s\mathbf{n}) = 0$, для которых величины нормальных к поверхности скорости и силы равны нулю. Если квадрупольные колебания можно трактовать как переход от одного эллипса к другому с перпендикулярными осями, то здесь изменяются в противофазе объемы полусфер, ограниченных диаметральной плоскостью, направление которой параллельно вектору $\mathbf{w}_s$. По излучению звука это соответствует противофазным колебаниям двух монополей, которые дают диполь [10]. Из граничных условий (9, 10) при условии $\mathbf{w}_d = 0$ можно определить частоты собственных колебаний частицы и полости в среде для этого типа колебаний. Здесь же обсудим поле этого диполя при заданной скорости $\mathbf{w}_s$ и $\mathbf{w}_d = 0$. Из граничных условий (9) и (10) без внешнего поля имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (k^2/2q^2)\mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= 2q^2\mathbf{w}_s/[-6q^2(1+ikR) + \\ &\quad + 3k^2(1+iqR) + k^2q^2R^2]. \end{aligned} \quad (68)$$

Маленькой частице ($kR \ll 1$) соответствуют

$$\mathbf{D} = k^2\mathbf{w}_s/6q^2, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{w}_s/3, \quad (69)$$

а частице произвольного радиуса в идеальной жидкости ($|q| \longrightarrow \infty$) или в резине, где $q = k_t$ может быть также большим [14],

$$\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = -\bar{w}_s/\left[3(1+ikR)-\frac{1}{2}k^2R^2\right]. \quad (70)$$

Таким образом дипольным колебаниям частицы, определяемым $\mathbf{w}_d$, $\mathbf{p}_d$ и квазиквадрупольным – $\mathbf{w}_s$, $\mathbf{p}_s$, соответствуют два диполя с амплитудами **B** и **D** полей, даваемых выражениями (64, 65) и (68). Естественно, что в дипольное рассеяние частицей внешнего поля вклад дают оба диполя.

Если дипольное рассеяние определяется скалярным и векторным потенциалами, то ротационное, как и монопольное, только одним – векторным. Из выражений для рассеянных полей (33) видно, что ротационное поле аналогично полю монополя по зависимости от r – расстояния от центра частицы. Граничные условия (13, 15) дают решение известных задач о собственных колебаниях полости, и поле вокруг частицы при заданной ее угловой скорости $\mathbf{\Omega}_p$ [13].

3. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Одним из наиболее распространенных приложений теории рассеяния звука является метод многократного рассеяния, используемый для вычисления полей в средах, содержащих две, три и т.д., вплоть до бесконечности, число частиц. В основе этого метода лежит процесс многократного перерассеяния волн на частицах (см., например, [15]). Такой процесс только для монопольного рассеяния или ротационного, где нет взаимодействия между скалярным и векторным полями, представляет собой многократное воздействие операторов $\hat{a}$ из (41) или $\hat{\gamma}$ из (53) на средние от соответствующих потенциалов. Учет дипольного рассеяния приводит к взаимодействию между полями, как следует из выражений (46–47) и требует матричного описания.

Будем описывать поля потенциалов Ψ и $\mathbf{\Phi}$ вокруг частицы радиуса R матрицей-столбцом

$$E = \begin{bmatrix} \Psi \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

а действующее на частицу поле $H(r)$ – матрицей-столбцом

$$H(r) = \hat{H}E_{\text{out}} = \\ = \begin{bmatrix} \langle\,\rangle, & 0 \\ \frac{1}{R}\langle\mathbf{n}\rangle, & 0 \\ 0, & \frac{1}{R}\langle[\mathbf{n}]\rangle \\ 0, & \hat{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{\text{out}} \\ \mathbf{\Phi}_{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\Psi_{\text{out}}\rangle \\ \frac{1}{R}\langle\mathbf{n}\Psi_{\text{out}}\rangle \\ \frac{1}{R}\langle[\mathbf{n}\mathbf{\Phi}_{\text{out}}]\rangle \\ \mathbf{\Omega}_{\text{out}} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Здесь усреднение проводится по поверхности сферы радиуса $r > R$. Формулы для оператора $\hat{\Omega}$ даются выражением (12). Согласно выражениям, приведенным в работе [9] для средних полей от плоских и рассеянных другими частицами волн, оператор $\hat{H}$ записывается матрицей

$$\hat{H}(r) = \begin{bmatrix} Q_1(kR), & 0 \\ \frac{r}{3R}Q_2(kR)\nabla, & 0 \\ 0, & \frac{r}{3R}Q_2(qr)\mathrm{rot} \\ 0, & \frac{1}{2}Q_2(qr)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

В (73) операции ∇ и rot проводятся по координатам центра частицы ($r = 0$). Действующее на частицу поле $H(r)$ дает матрицу-столбец A амплитуд рассеяния

$$A = \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \hat{d}_{11}, & \hat{d}_{12}, & 0 \\ 0, & \hat{d}_{21}, & \hat{d}_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \hat{\gamma} \end{bmatrix} H(r)' = \hat{A}H(r)', \quad (74)$$

где элементы матрицы $\hat{A}$ даются формулами (41), (48) и (53), штрих у $H(r)'$ означает переход к $r = R$ после умножения на $\hat{A}$. И, наконец, рассеянное частицей поле записывается в виде матрицы-столбца

$$E_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_s \\ \boldsymbol{\Phi}_s \end{bmatrix} = \hat{u}_s A, \quad (75)$$

а матрица $\hat{u}_s$ определяется рассеянным полем (33)

$$u_s = \begin{bmatrix} L_k, & -R^2\frac{dL_k}{dr}(\mathbf{n}), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & R^2\frac{dL_q}{dr}[\mathbf{n}], & R^2L_q \end{bmatrix}. \quad (76)$$

При умножении $\hat{u}_s$ на A амплитуда **B** вставляется в круглые скобки, а **D** – в квадратные справа от **n**. Произведение $\hat{u}_s\hat{A}\hat{H} = \hat{E}$ представляет собой матрицу рассеяния, связывающую рассеянное поле E_s с внешним E_{out} равенством

$$E_s = \hat{E}E_{\mathrm{out}}. \quad (78)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, введение в работе [9] наряду со скалярным векторного потенциала, позволило решить задачу о монопольном, дипольном и ротационном рассеянии пространственно неоднородных звуковых волн на произвольной сферической частице в вязкой жидкости и в упругой среде. Полученные уравнения (17, 22, 23, 31) для сферических средних полей на частице позволяют подбором параметров z, m_{ij} и I “убрать” рассеянные частицей поля. Матрица рассеяния $\hat{E}$ дает возможность продвижения теории многократного рассеяния в направлении вязких и упругих сред с большой концентрацией рассеивателей, как регулярно, так и случайно распределенных в среде. Интересным, по мнению автора, развитием данной темы могут быть задачи рассеяния на эллиптических частицах, для которых имеются свои координаты, возможно, упрощающие средние по поверхности частицы поля интегрированием по частям, как в работе [9] в сферических координатах.

Работа выполнялась при финансовой поддержке грантов Минпромнауки НШ-1641.2003.2 и РФФИ 03-05-6493.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Колебания газовых пузырьков в упругих средах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.

2. *Кобелев Ю.А.* К вопросу определения параметров микрочастиц в жидкости, ответственных за монопольное рассеяние звука // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 808–812.

3. *Nail A.* Gumerov and Ramani Duraiswami // J Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 117. P. 1744–1761.

4. *Кузнецов Г.Н., Щекин И.Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 4. С. 505–570.

5. *Кузнецов Г.Н., Щекин И.Е.* Влияние поверхности раздела на резонансные характеристики пузырьков // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 2. С. 236–240.

6. *Кобелев Ю.А., Островский Л.А.* Акустико-электростатическая аналогия и взаимодействие газовых пузырьков в жидкости // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 5. С. 715–717.

7. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика // Пер. с англ. Гапонова А.В. и Миллера М.А. / М.: Изд-во иностр. лит. 1954. 604 с. (William R. Smythe. Static and Dynamic electricity // New York, Toronto, London, 1950).

8. *Alexander A. Doinikov.* Mutual interaction between a bubble and a drop in a sound field // J. Acoust. Soc. Amer.1996. V. 99. P. 3373–3379.

9. *Кобелев Ю.А.* Об аналогии процессов линейного рассеяния звука в вязкой жидкости и в изотропной упругой среде // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С.

10. *Исакович М.А.* Общая акустика // М.: Наука, 1973. 496 с.

11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости // М.: Наука, 1965. 204 с.

12. *Миронов М.А.* Силы Бьеркнесса в вязкой среде и акустическая коагуляция аэрозолей // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 6. С. 941–942.

13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика // М.: Наука, 1986. 736 с.

14. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике // М.: Наука, 1990. 238 с.

15. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах // М.: Мир, 1981. Т. 2. 318 с. (Ishimary A.Wave Propagation and Scattering in Random Media // NewYork,San Francisco- London, Academic Press.1978.V. 2)