

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.2:517.9

**РАССЕЯНИЕ НА АКУСТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ РАССЕЙВАТЕЛЯХ
С МАЛЫМИ ВОЛНОВЫМИ РАЗМЕРАМИ И ИХ ВОССТАНОВЛЕНИЕ**

© 2009 г. Н. П. Бадалян, В. А. Буров, С. А. Морозов, О. Д. Румянцева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы

Тел.: (495) 939-3081; Факс: (495) 932-8820; E-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 26.12.07 г.

С помощью функционального алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова, предназначенного для восстановления двумерных рассеивателей, сравнивается рассеивающая способность жестких и мягких цилиндрических рассеивателей. Численным моделированием подтверждается существование жесткой взаимосвязи между амплитудой и фазой волны, рассеянной на квазиточечном рассеивателе, а также на рассеивателях с малыми волновыми размерами в виде мягкого цилиндра, мягкой сферы и воздушного пузырька в жидкости.

PACS: 43.60.Pt, 43.20.Fn

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова (НГМ) является строгим функционально-аналитическим алгоритмом решения обратной задачи рассеяния без привлечения итераций. Он позволяет восстанавливать двумерные рефракционно-поглощающие рассеиватели, описываемые функцией $v(\mathbf{r})$, на основе монохроматических данных – амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\varphi, \varphi')$. Значения $f(\varphi, \varphi')$ измеряются (или пересчитываются из экспериментальных данных в ближнем поле) для всех углов падения φ падающей плоской волны, характеризуемой волновым вектором $\mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}$ (k_0 – волновое число в фоновой однородной непоглощающей среде) и всех углов рассеяния φ' ; $\mathbf{l} = \{k_0, \varphi'\}$. Сущность НГМ-алгоритма со ссылками на соответствующие публикации его авторов описана в [1], где на моделях акустических идеально жестких (выполняется граничное условие второго рода) и мягких (условие первого рода) рассеивателей с различными волновыми размерами исследованы пределы практической работоспособности данного алгоритма. Показано, что алгоритм сохраняет устойчивость, даже когда

норма данных $\|f(\varphi, \varphi')\| \equiv \sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |f(\varphi, \varphi')|^2}$, являющаяся своего рода характеристикой силы рассеивателя, в 10–20 раз превышает пороговое значение $1/(3\pi)$, первоначально указанное авторами алгоритма при определении достаточного условия сходимости алгоритма. Тем самым, возможно адекватное восстановление даже сильных рассеивателей, для которых рассеянное поле соизмеримо с падающим полем или превосходит его в отдельных областях внутри рассеивателя.

Представляемая работа тесно связана с результатами исследования работы [1], и, фактически, является ее продолжением. Поэтому можно посоветовать заинтересованным читателям сначала обратиться к этой публикации [1]. В ней, в частности, поясняется, что функция $K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv K(\mathbf{r}, \varphi)$ характеризует обобщенное волновое поле. На этапе восстановления значения угловых гармоник этого поля $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$, где q – целочисленный номер гармоники, находятся из системы уравнений, линейных относительно неизвестных (несмотря на то, что эффекты многократного рассеяния при восстановлении учитываются):

$$\sum_{q'=-\infty}^{\infty} C(\mathbf{r}, q, q') \tilde{K}(\mathbf{r}, q') = D(\mathbf{r}, q). \quad (1)$$

Здесь матрица при неизвестных $C(\mathbf{r}, q, q')$ и правая часть $D(\mathbf{r}, q)$ предварительно вычисляются (решением систем линейных уравнений) из данных $f(\varphi, \varphi')$ и зависят от этих данных нелинейно, за счет чего учитываются процессы многократного рассеяния. Тогда искомая функция рассеивателя $v(\mathbf{r})$ в любой фиксированной точке $\mathbf{r} = \{x, y\}$ связана линейно с $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$: $v(\mathbf{r}) = -k_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{K}(\mathbf{r}, q = -1)$.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ
РАССЕЙВАТЕЛЕЙ С МАЛЫМИ
ВОЛНОВЫМИ РАЗМЕРАМИ**

Самостоятельный интерес представляют результаты восстановления алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова граничных рассеивателей с предельно малыми волновыми размерами $k_0 a \ll 1$.

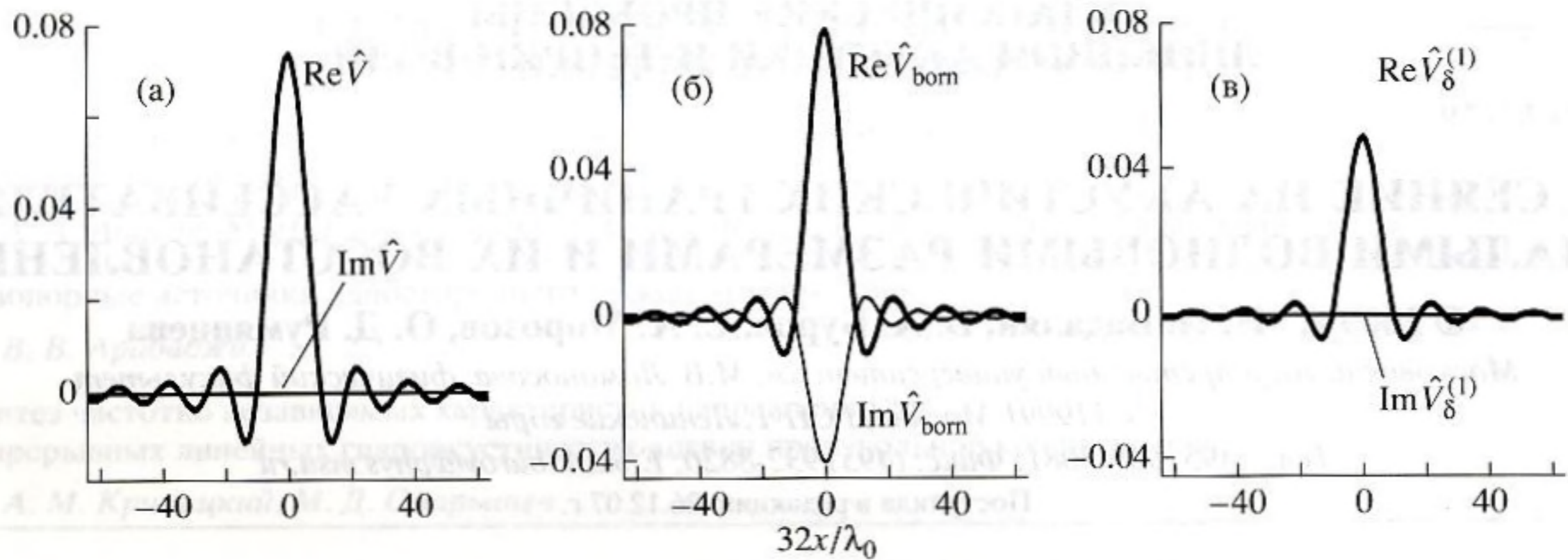


Рис. 1. Мягкий рассеиватель цилиндрической формы с волновым размером $k_0a = 0.05$; $\|f\| \approx 2.7/(3\pi)$:
 – центральные сечения рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний \hat{v} (а) и в приближении Борна \hat{v}_{born} (б);
 – центральное сечение результата восстановления в приближении Борна δ -образного (точечного) рассеивателя с единичной амплитудой, когда данные рассеяния сформированы в том же приближении: $\hat{v}_{\delta}^{(1)}$ (в).

Далее рассматриваются рассеиватели круговой цилиндрической формы с радиусом a . На рис. 1а и 2а изображены полученные из алгоритма оценки \hat{v} для мягкого ($\|f\| \approx 2.7/(3\pi)$) и жесткого ($\|f\| \approx 0.02/(3\pi)$) рассеивателей, соответственно, с одинаковым размером $k_0a = 0.05$. Эти оценки имеют два важных отличия. Во-первых, амплитуда боковых осцилляций по отношению к амплитуде главного максимума заметно больше в случае жесткого рассеивателя. Это связано с тем, что при данном размере k_0a рассеяние на мягком цилиндре носит сугубо монополярный характер, а на жест-

ком – монополярно-дипольный [2, 3]. Поэтому для жесткого цилиндра относительная доля мощности поля, рассеянного в обратном направлении и направлениях, близких к нему, больше, чем для мягкого цилиндра. Как следствие, оценка по НГМ-алгоритму, не учитывающая рассеяние назад, приобретает боковые осцилляции, сильнее выраженные в случае жесткого цилиндра. Во-вторых, абсолютные значения оценки \hat{v} гораздо больше (в 200 раз при рассматриваемом k_0a) для мягкого рассеивателя, чем для жесткого, что связано с различной силой рассеяния при одинаковом волновом размере: нормы $\|f\|$ отличаются более, чем в 130 раз. Жесткий рассеиватель, начиная с размера порядка $k_0a = 0.05$ и менее, становится эквивалентным (с точки зрения наблюдаемого вне цилиндра рассеянного поля) некоторому борновскому рассеивателю, т.е. рассеивателю, не порождающему перерассеяния. Другими словами, оценка \hat{v}_{born} в приближении однократного рассеяния совпадает с оценкой \hat{v} (рис. 2). При этом обусловленность всех решаемых систем уравнений алгоритма практически равна 1, т.е. идеально хорошая. Напротив, борновская оценка \hat{v}_{born} мягкого рассеивателя при $k_0a = 0.05$ имеет сильно выраженную мнимую часть (рис. 1б), отсутствующую в учитывающей перерассеяния оценке \hat{v} (рис. 1а), хотя $\text{Re } \hat{v}_{\text{born}}$ близка к \hat{v} . Обратная обусловленность матрицы $C(\mathbf{r}, q, q')$ в (1), т.е. отношение абсолютных значений минимального и максимального собственных чисел данной матрицы, составляет $\eta(\mathbf{r}) \approx 0.4-0.5$, в зависимости от точки восстановления \mathbf{r} . При дальнейшем уменьшении k_0a , форма и пропорции оценки \hat{v} не

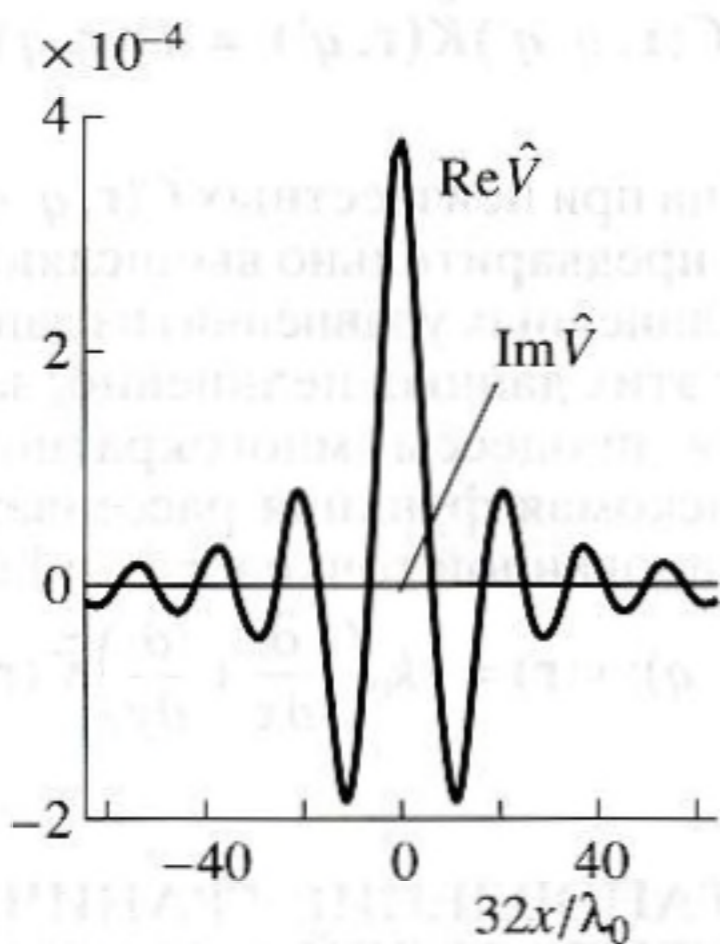


Рис. 2. Центральное сечение жесткого рассеивателя цилиндрической формы с волновым размером $k_0a = 0.05$ и $\|f\| \approx 0.02/(3\pi)$, восстановленного при отсутствии шумовых помех (результаты восстановления при учете многократных рассеяний и в приближении Борна совпадают).

изменяются; ее полная ширина по уровню 0.7 составляет около $\lambda_0/4$, где λ_0 – длина волны в фоновой среде. Эта оценка \hat{v} , пронормированная на свой объем, является некоторой предельной эффективной аппаратной функцией НГМ-алгоритма, нелинейного относительно данных рассеяния. Это связано с тем, что при $k_0a \leq 0.05$ волновые размеры рассеивателя столь малы, что такой мягкий цилиндр представляет собой почти “точечное” препятствие с круговой диаграммой рассеяния.

Таким образом, рассеивающая способность мягкого цилиндра, по сравнению с жестким, оказывается гораздо больше, при одном и том же волновом размере $k_0a \ll 1$. Сопоставление сечений рассеяния мягкого (σ_{soft}) и жесткого (σ_{hard}) цилиндров с соответствующими радиусами $a = a_{\text{soft}}$ и $a = a_{\text{hard}}$ подтверждает этот вывод. Так, при $k_0a \ll 1$

$$[2]: \sigma_{\text{soft}} \approx \frac{\pi a_{\text{soft}}}{k_0 a_{\text{soft}} \ln^2\left(\frac{1}{k_0 a_{\text{soft}}}\right)}, \sigma_{\text{hard}} \approx \frac{3}{8} (k_0 a_{\text{hard}})^3 2a_{\text{hard}}.$$

Из условия $\sigma_{\text{soft}} = \sigma_{\text{hard}}$ вытекает соотношение, связывающее волновые размеры “эквивалентных” по силе жестких и мягких рассеивателей:

$$k_0 a_{\text{soft}} = \exp\left[-2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(k_0 a_{\text{hard}})^2}\right]. \quad (2)$$

Из (2) следует, что $k_0 a_{\text{soft}} \approx 2.8 \times 10^{-4}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 0.5$; $k_0 a_{\text{soft}} \approx 6 \times 10^{-15}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 0.25$; $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-30}$ при $k_0 a_{\text{hard}} \approx 0.172$; $k_0 a_{\text{soft}} \approx 1.3 \times 10^{-89}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 0.1$. При одинаковом сечении рассеяния мягкий цилиндр имеет гораздо меньшие размеры. Незначительное уменьшение размеров жесткого цилиндра влечет значительное (на много порядков!) уменьшение размеров “эквивалентного” мягкого цилиндра. Жесткий цилиндр становится квазиборновским при $k_0 a_{\text{hard}} \leq 0.05$. Мягкий же цилиндр не становится квазиборновским ни при каких физически реализуемых размерах. Действительно, уже при $k_0 a_{\text{hard}} \approx 0.167$ вытекающий из (2) размер мягкого цилиндра $k_0 a_{\text{soft}} \approx 10^{-32}$ выходит на уровень, соответствующий (при скорости ≈ 1500 м/сек и частоте ≈ 1 МГц) планковскому размеру 10^{-35} м. При этом ненулевое значение $\text{Im} \hat{v}_{\text{born}}$ в борновской оценке мягкого рассеивателя с $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-30}$ все равно присутствует (рис. 3), свидетельствуя о наличии процессов “перерасеяния”. Одновременно, оценка \hat{v} того же мягкого цилиндрического рассеивателя по НГМ-алгоритму является чисто действительной величиной, практически совпадающей, при данном $k_0 a_{\text{soft}}$, с функцией $\text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$. Отсутствие $\text{Im} \hat{v}$ означает, что даже в случае чрезвычайно малых, физически принципиально нереализуемых, волновых размеров рассеивателей,

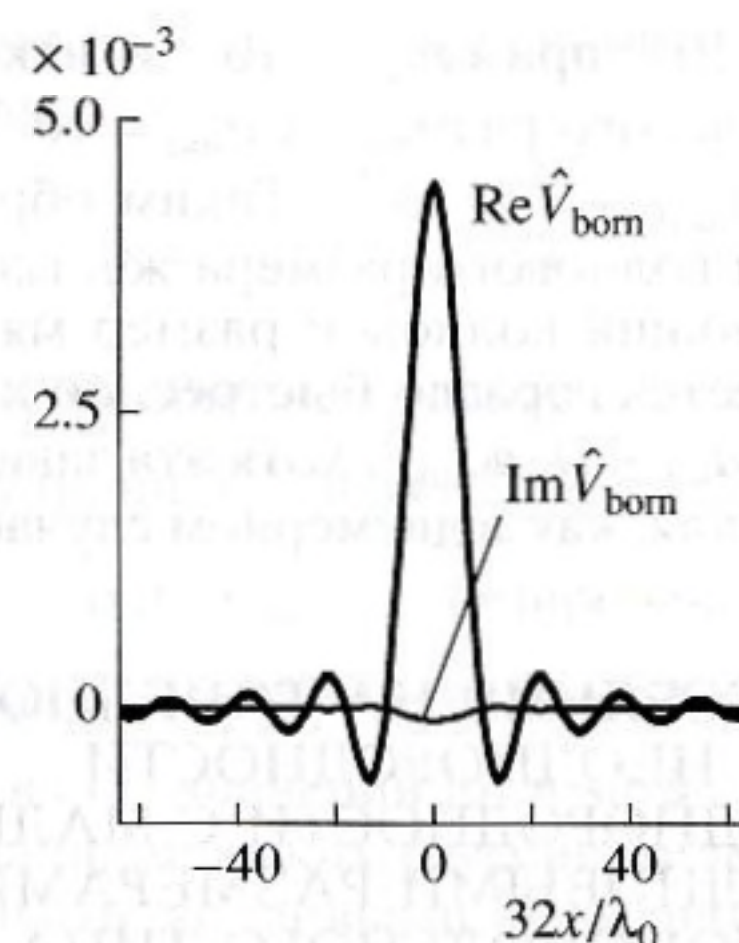


Рис. 3. Центральное сечение мягкого рассеивателя цилиндрической формы с волновым размером $k_0a = 10^{-30}$ и $\|f\| \approx 0.14/(3\pi)$, восстановленного при отсутствии шумовых помех в приближении Борна \hat{v}_{born} ; оценка \hat{v} при учете многократных рассеяний имеет $\text{Re} \hat{v} = \text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$, $\text{Im} \hat{v} = 0$.

НГМ-алгоритм способен учесть процессы перерасеяния, происходящие на расстояниях, на 30 порядков (!) меньших λ_0 , т.е. далеко за пределами реальной разрешающей способности алгоритма. Этот факт объясняется строгостью математического аппарата алгоритма. Однако даже при таких предельно малых размерах мягкого рассеивателя норма данных $\|f\| \approx 0.14/(3\pi)$ и амплитуда оценки \hat{v} оказываются на порядок больше, чем в случае квазиборновского жесткого рассеивателя с $k_0a = 0.05$ (рис. 2). С другой стороны, при одном и том же размере a жесткий цилиндр является гораздо более слабым, чем мягкий, причем это различие в силе рассеивателей проявляется тем сильнее, чем меньше их размер. Так, жесткий рассеиватель при $k_0a = 10^{-30}$ имеет норму данных $\|f\| \approx 8.2 \times 10^{-60}/(3\pi)$. Его оценка \hat{v} , совпадающая с \hat{v}_{born} , в точности повторяет форму и пропорции оценки для жесткого рассеивателя при $k_0a = 0.05$ (рис. 2), однако амплитуда оценки \hat{v} составляет $\approx 1.5 \times 10^{-61}$.

Интересно сопоставить приведенные результаты сравнения волновых размеров мягкого и жесткого двумерных рассеивателей с результатами в трехмерном случае. Так, сечения рассеяния для мягкой и жесткой сфер с радиусами $a = a_{\text{soft}}$ и $a = a_{\text{hard}}$, соответственно, составляют при $k_0a \ll 1$ [2]: $\sigma_{\text{soft}} \approx 4\pi a_{\text{soft}}^2$; $\sigma_{\text{hard}} \approx (7/9)(k_0 a_{\text{hard}})^4 \pi a_{\text{hard}}^2$. Из условия $\sigma_{\text{soft}} = \sigma_{\text{hard}}$ следует связь: $k_0 a_{\text{soft}} = (\sqrt{7}/6)(k_0 a_{\text{hard}})^3$. Тогда $k_0 a_{\text{soft}} \approx 5.5 \times 10^{-2}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 0.5$; $k_0 a_{\text{soft}} \approx 4.4 \times 10^{-4}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 0.1$;

$k_0 a_{\text{soft}} \approx 4.4 \times 10^{-16}$ при $k_0 a_{\text{hard}} = 10^{-5}$; и, наконец, уровень планковского размера $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-32}$ достигается при $k_0 a_{\text{hard}} \approx 3 \times 10^{-11}$. Таким образом, при уменьшении волнового размера жесткой сферы, соответствующий волновой размер мягкой сферы уменьшается гораздо быстрее, по кубическому закону $k_0 a_{\text{soft}} \sim (k_0 a_{\text{hard}})^3$, хотя эта зависимость и не столь резкая, как в двумерном случае.

РАСSEЯНИЕ НА ТОЧЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ С МАЛЫМИ ВОЛНОВЫМИ РАЗМЕРАМИ МОНОПОЛЬНОГО ТИПА

Проблема рассеяния на точечной неоднородности привлекала внимание исследователей в области квантовой теории рассеяния [4], а в настоящей работе рассматривалась в связи с анализом акустического рассеяния на объектах с малыми волновыми размерами, на границах которых выполняется граничное условие 1-го рода. Вопрос о точечном рассеивателе интересен по нескольким причинам. Во-первых, как будет показано, процесс рассеяния на точечном рассеивателе всегда сопровождается многократным рассеянием, что интересно уже само по себе. Во-вторых, НГМ-алгоритм учитывает многократные рассеяния, что делает процедуру восстановления нелинейной относительно экспериментальных данных. В связи с этим вопрос о виде аппаратной функции данного алгоритма более сложен, чем в системах с линейной обработкой. В-третьих, алгоритм не учитывает рассеяние назад. Поэтому точечный рассеиватель, одинаково рассеивающий во всех направлениях, может служить иллюстрацией характера и степени тех искажений результата восстановления, которые вызваны присутствием рассеяния назад.

При $k_0 a \leq 0.05$ волновые размеры рассеивателя столь малы, что акустически мягкий цилиндр является как бы "квазиточечным" препятствием с круговой диаграммой рассеяния. При этом оценка такого рассеивателя в приближении однократного рассеяния \hat{v}_{born} оказывается комплексной величиной. Можно полагать, что функция $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ эквивалентна оценке эффективного квазиточечного слабого (борновского) комплексного рассеивателя. Этот комплексный рассеиватель создает то же самое рассеянное поле, что и мягкий цилиндр, но только за счет однократного рассеяния. В связи с этим возникает возможность проверить существование взаимнооднозначной связи между амплитудой и фазой волны, рассеянной на мягком рассеивателе с малыми размерами. Существование жесткой аналитической связи между амплитудой и фазой волны, рассеянной на аку-

стической "точечной" неоднородности (δ -образном рассеивателе – достаточно сильном рассеивателе с исчезающе малыми размерами), было ранее показано теоретически в [5]. Вывод следовал как из общих соотношений для волновых полей (уравнений Марченко–Ньютона–Роуза), так и непосредственно из выражения для поля, рассеянного на неоднородности скорости цилиндрической формы с малыми волновыми размерами. Было показано, что в случае δ -образного рассеивателя с произвольной амплитудой $v_\delta(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, находящегося в точке \mathbf{r}_0 , вторичные источники $v_\delta(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, \alpha)$, возбуждаемые падающим полем $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$ в области рассеяния, в приближении монопольного характера рассеяния можно представить в виде:

$$v_\delta(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, \alpha) = \beta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)u_0(\mathbf{r}, \alpha), \quad (3)$$

где α – индекс, описывающий параметры падающего поля (его конфигурацию и частоту, положение источника); $u(\mathbf{r}, \alpha)$ – полное поле, сформированное в результате рассеяния. Оказывается, что процессы рассеяния запаздывающих и опережающих волн протекают различно, хотя между ними существует взаимосвязь. Однако для обоих этих типов рассеяния эффективный множитель β оказывается комплексной величиной. Это означает, что в "точечной" области рассеяния имеют место процессы перерассеяния, для описания которых не достаточно первого приближения Борна. В то же время, такой рассеиватель можно свести к квазиторновскому путем введения множителя β , учитывающего все внутренние процессы рассеяния на δ -рассеивателе. Значение β характеризует амплитуду и фазу вторичного источника, который возбуждается внешним полем, падающим на точечную неоднородность. Другими словами, β является перенормированным коэффициентом пропорциональности между значением амплитуды вторичного источника, порождаемого внешним полем в точке \mathbf{r}_0 , и локальным значением этого поля. Тогда в уравнении Липпмана–Швингера

$$u(\mathbf{r}, \alpha) = u_0(\mathbf{r}, \alpha) + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', k_0)v(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}', \alpha)d\mathbf{r}' \quad \forall \mathbf{r}$$

соотношение (3) позволяет учесть эффекты перерассеяния для точечного рассеивателя $v(\mathbf{r}) = v_\delta(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ в форме сдвига фазы, описываемого комплексным коэффициентом β :

$$u(\mathbf{r}, \alpha) = u_0(\mathbf{r}, \alpha) + G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, k_0)\beta u_0(\mathbf{r}_0, \alpha) \quad \forall \mathbf{r}, \quad (4)$$

где G_0 – классическая функция Грина однородной безграницной непоглощающей среды с волновым числом k_0 . Из (4) следует, что β однозначно характеризует амплитуду и фазу рассеянной на точечной неоднородности волны.

Множитель $\beta \equiv |\beta| \exp(i\phi)$ отражает в себе присутствие реальных процессов перерасеяния. Его фаза ϕ и модуль $|\beta|$ оказываются жестко связанными [5]. Так, для физически реализуемых запаздывающих волновых полей при используемой далее временной зависимости $\sim \exp(-i\omega t)$ эта связь имеет вид:

$$\sin \phi = -|\beta|/4, \text{ или } |\beta|^2 + 4\text{Im}(\beta) = 0 \quad (5)$$

в двумерном случае;

$$\sin \phi = -\frac{|\beta|}{(4\pi/k_0)}, \text{ или } |\beta|^2 + \frac{4\pi}{k_0}\text{Im}(\beta) = 0 \quad (6)$$

в трехмерном случае.

Зависимость, аналогичная (6), вытекает также из выражения (4) и соотношения, полученного в [4] для пространственного фурье-образа рассеянного поля при анализе квантовомеханической задачи рассеяния на сингулярном δ -образном потенциале в уравнении Шредингера. Тем самым, связь (5), (6) является строгим и чисто классическим аналогом результата, полученного Л.Д. Фаддеевым для δ -рассеивающих потенциалов в квантовой механике. Ее существование подтверждается далее численным анализом аппаратной функции НГМ-алгоритма. В силу исчезающе малых размеров рассеивателя, соотношения (5), (6) справедливы для любой конфигурации падающего поля с радиусом кривизны волнового фронта, много большим длины волны.

Множитель β , для которого проверялось выполнение соотношения (5) в случае акустически мягких цилиндрических рассеивателей при $k_0 a \ll 1$ (рассеяние на таких цилиндрах носит монополярный характер), можно рассчитать следующим образом. Рассматривается модельная задача рассеяния на точечной двумерной неоднородности с единичной амплитудой $v_\delta^{(1)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, для которой прямая задача строго решается в приближении однократного рассеяния: $f(\phi, \phi') \equiv f_\delta^{(1)}(\phi, \phi') \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}$ при $\mathbf{r}_0 = 0, u_0(\mathbf{r}, \alpha) = u_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Тогда в (3): $v_\delta^{(1)}(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, \alpha) = v_\delta^{(1)}(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r}, \alpha)$, откуда $\beta \equiv \beta_\delta^{(1)} = 1$ в этом случае. Решение обратной задачи в том же первом борновском приближении по данным $f_\delta^{(1)}(\phi, \phi')$ дает оценку $\hat{v}_\delta^{(1)}(\mathbf{r})$ (рис. 1в). С другой стороны, борновская оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ мягкого цилиндра (полученная при таком же падающем поле на основе строгих данных рассеяния, в которых играют роль процессы перерасеяния) оказывается комплексной величиной:

рис. 1б, $k_0 a = 0.05$. Тогда для данного цилиндрического рассеивателя:

$$\beta = \hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})/\hat{v}_\delta^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

причем это отношение не зависит от \mathbf{r} , поскольку все три функции $\hat{v}_\delta^{(1)}/\max_r \hat{v}_\delta^{(1)}, \text{Re} \hat{v}_{\text{born}}/\max_r \text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$ и $-\text{Im} \hat{v}_{\text{born}}/\max_r |\text{Im} \hat{v}_{\text{born}}|$, нормированные на свое максимальное значение, совпадают.

Расчет из (7) значений $|\beta|$ и $\sin \phi \equiv \text{Im} \beta/|\beta|$ для мягких цилиндрических рассеивателей с различными малыми волновыми размерами показал, что взаимосвязь (5) выполняется практически с машинной точностью. Так, при $k_0 a = 0.005$: $|\beta| = 1.114533676$, $-4\sin \phi = 1.114533646$ (отличие в 9-ом знаке); при $k_0 a = 0.05$: $|\beta| = 1.80286786$, $-4\sin \phi = 1.80286798$ (отличие в 8-ом знаке). При $k_0 a = 0.5$ уже появляется отклонение характера рассеяния от монополярного, и понятие множителя β , определяющего правую часть соотношения (3), теряет смысл, поскольку требуется учет составляющих рассеянного поля более высокого порядка, чем монополярное рассеяние.

Надо заметить, что множитель β можно также рассчитать непосредственно из (4), подставляя аналитическое значение рассеянного поля $u_{\text{sc}}(\mathbf{r}, \alpha) \equiv u(\mathbf{r}, \alpha) - u_0(\mathbf{r}, \alpha)$ в монополярном приближении. Поскольку значение β не зависит от положения центра рассеивателя \mathbf{r}_0 , то далее везде полагается $\mathbf{r}_0 = 0, u_0(\mathbf{r}_0, \alpha) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) = 1$; значения u_{sc} приведены в [2]. Для мягкого двумерного цилиндра при $k_0 a \ll 1$ и любого \mathbf{k} : $u_{\text{sc}}(\mathbf{r}, \alpha) = u_{\text{sc}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \approx -J_0(k_0 a) H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r}|)/H_0^{(1)}(k_0 a)$; $G_0(\mathbf{r}, k_0) = -(i/4) H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r}|)$, где $J_0, H_0^{(1)}$ – функции Бесселя и Ханкеля (1-го рода) нулевого порядка. Тогда из (4) вытекает: $\beta = -4iJ_0(k_0 a)/H_0^{(1)}(k_0 a)$, $\text{Im} \beta = -4J_0^2(k_0 a)/|H_0^{(1)}(k_0 a)|^2$, и, следовательно, взаимосвязь (5) строго выполняется. Аналогично в трехмерном случае для рассеяния на абсолютно мягкой сфере радиуса a ($k_0 a \ll 1$): $u_{\text{sc}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \approx -\sin(k_0 a) \exp\{ik_0(|\mathbf{r}| - a)\}/[k_0 |\mathbf{r}|]$. Подстановка в (4) с учетом $G_0(\mathbf{r}, k_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \exp(ik_0|\mathbf{r}|)$ дает: $\beta = \frac{4\pi}{k_0} (k_0 a) \exp(-ik_0 a)$, $\text{Im} \beta = -\frac{4\pi}{k_0} \sin^2(k_0 a)$, т.е. имеет место взаимосвязь (6). Соотношение (6) также удовлетворяется и в случае монополярного резонансного рассеяния на газовом пузырьке радиуса a ($k_0 a \ll 1$), колеблющемся в жидкости с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . При этом моно-

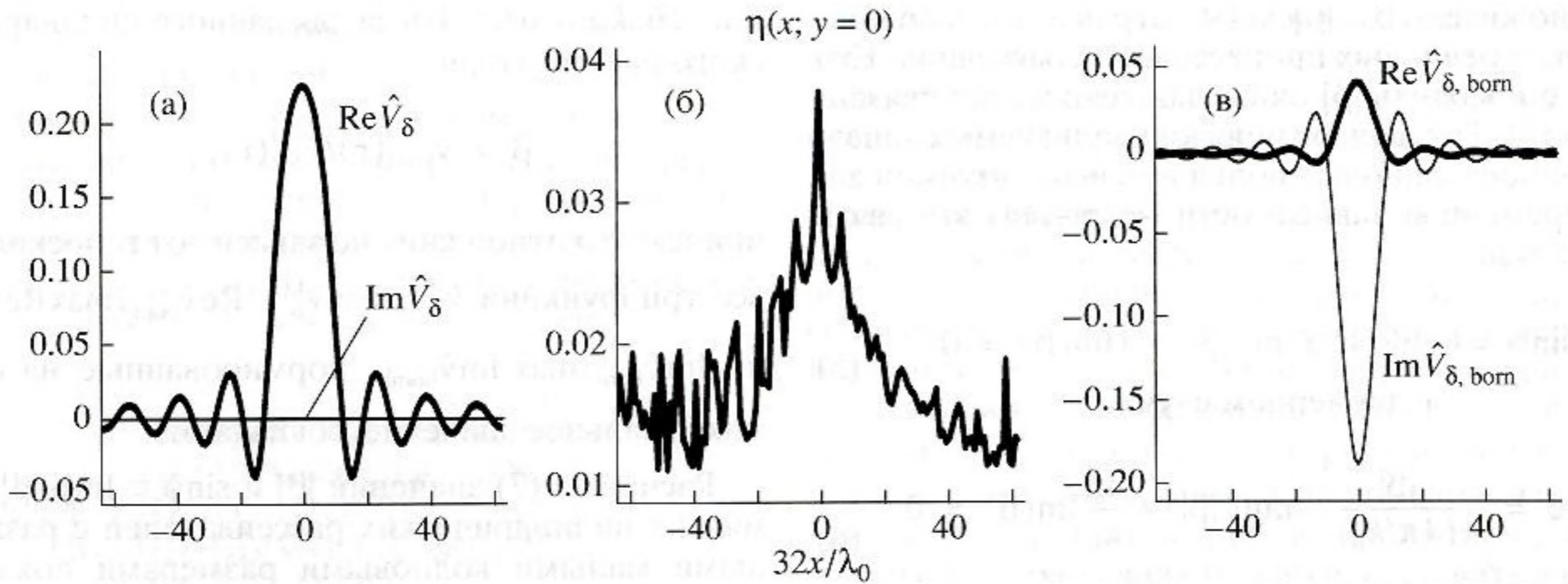


Рис. 4. Сильный точечный рассеиватель ($|\beta| = 3.9$, $\phi = -77.16^\circ$):

- центральное сечение действительной (толстая линия) и мнимой (тонкая линия) части результата восстановления с учетом многократных рассеяний (а) и в приближении Борна (в);
- значения обратной обусловленности в центральном сечении (б).

польное рассеяние на несколько порядков сильнее дипольного: $u_{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \approx A \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}|)}{k_0|\mathbf{r}|}$, где $A =$

$$= \frac{k_0 a}{(\omega_{res}/\omega)^2 - 1 - ik_0 a}, \quad \omega_{res} = \sqrt{\frac{3\kappa}{a^2 \rho_0}}$$

– резонансная частота, κ – модуль сжатия газа в пузырьке. Данное выражение для ω_{res} приведено в предположении, что газ внутри пузырька описывается линеаризованным адиабатическим уравнением состояния, а влиянием лапласовского капиллярного давления можно пренебречь (т.е. при соблюдении условия $k_0 a \ll 1$ радиус пузырька все же не слишком мал). Из подстановки u_{sc} в (4) следует: $\beta = -4\pi A/k_0$, и связь (6) остается в силе. Учет капиллярного давления изменяет только ω_{res} и не приводит к нарушению (6).

Интересно сопоставить приведенные результаты, полученные для акустически мягких неоднородностей малых волновых размеров, с результатами восстановления модельного точечного рассеивателя $v_\delta(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Подстановка в (4) асимптотического выражения для $u_{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv u - u_0$ в двумерном случае

$$u_{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -\pi \sqrt{\pi} (1+i) \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}|)}{\sqrt{k_0|\mathbf{r}|}} \times \\ \times f\left(\mathbf{k}, \mathbf{l} = k_0 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}|}}\right), \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty,$$

даст при $\mathbf{r}_0 = 0$: $f(\phi, \phi') \equiv f_\delta(\phi, \phi') \equiv \frac{\beta}{(2\pi)^2} \forall \phi, \phi'$.

При этом амплитуда $|\beta|$ и фаза ϕ коэффициента рассеяния β подчиняются связи (5). Результат вос-

становления точечного рассеивателя с $|\beta| = 0.1$, $\phi = -1.43^\circ$ по данным f_δ на основе НГМ-алгоритма $\hat{v} \equiv \hat{v}_\delta$, т.е. с учетом перерассеяний, близок по форме и величине к результату аналогичного восстановления двумерного мягкого рассеивателя цилиндрической формы с предельно малыми волновыми размерами $k_0 a = 10^{-30}$ (рис. 3). Следовательно, это несильный точечный рассеиватель. Однако процессы “перерассеяния” все же заметны, поскольку борновская оценка данного рассеивателя $\hat{v}_{born} \equiv \hat{v}_{\delta, born}$ содержит ненулевую мнимую часть, отсутствующую в оценке \hat{v}_δ , полученной с учетом перерассеяний. Рассеиватель с $|\beta| = 1.7$, $\phi = -25.15^\circ$ относится к рассеивателям средней силы. Восстановленные значения \hat{v}_δ близки к случаю двумерного мягкого рассеивателя цилиндрической формы с размером $k_0 a = 0.05$ (рис. 1а, б). Здесь процессы “перерассеяния” существенны, поскольку борновская оценка $\hat{v}_{\delta, born}$ заметно отличается присутствием мнимой части от результата его восстановления на основе НГМ-алгоритма. Для сильного точечного рассеивателя с $|\beta| = 3.9$, $\phi = -77.16^\circ$ (рис. 4) уже заметно отличие формы воспроизведенной функции \hat{v}_δ от предыдущих случаев $|\beta| \leq 1.7$. У борновской оценки (рис. 4в) увеличивается амплитуда ложной мнимой части $\text{Im} \hat{v}_{\delta, born}$, а амплитуда $\text{Re} \hat{v}_{\delta, born}$, наоборот, становится существенно меньше, чем амплитуда \hat{v}_δ . Предельно сильный рассеиватель, который еще восстанавливается достаточно устойчиво НГМ-алгоритмом, характеризуется $|\beta| = 3.999$, $\phi = -88.72^\circ$. При $|\beta| = 3.999999$ (это значение уже предельно близко к максимально допустимому $|\beta| = 4$), $\phi = -89.96^\circ$ устойчивость оцен-

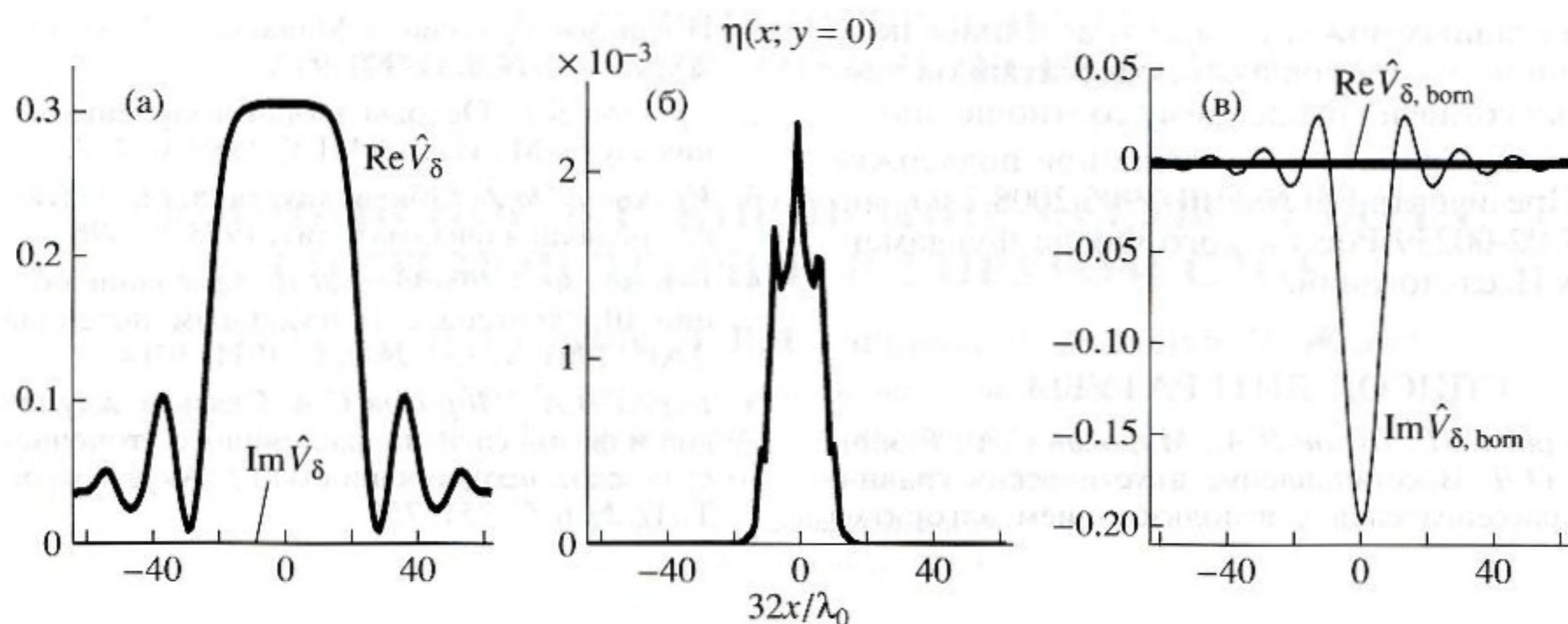


Рис. 5. Сильный точечный рассеиватель ($|\beta| = 3.999999$, $\phi = -89.96^\circ$), иллюстрирующий границы работоспособности алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова. Содержание графиков аналогично рис. 4.

ки \hat{V}_δ утрачивается даже при отсутствии шумовых помех в данных рассеяния (рис. 5). Критерием устойчивости решения служат значения обратной обусловленности $\eta(\mathbf{r})$ матрицы $C(\mathbf{r}, q, q')$ при неизвестных $\tilde{K}(\mathbf{r}, q')$ системы (1), приведенные на рисунках 4б, 5б. Чем сильнее точечный рассеиватель, тем хуже обусловленность. При возникновении неустойчивости, значения $\eta(\mathbf{r})$ в соответствующих точках \mathbf{r} падают до $\approx 10^{-5}$ (рис. 5б), так же как и при восстановлении граничных рассеивателей [1].

Итак, благодаря учету перерассеяний на этапе восстановления точечного рассеивателя, результат восстановления $\hat{V}_\delta(\mathbf{r})$ оказывается действительной функцией. В то же время, результат восстановления этого же рассеивателя в приближении Борна $\hat{V}_{\delta, \text{born}}(\mathbf{r})$ всегда является комплексной величиной, даже при самых малых значениях $|\beta|$. Это подтверждает, что точечный рассеиватель обязательно создает эффекты перерассеяния собственного ближнего поля, и никогда не становится слабым рассеивателем.

Рассеяние на мягких рассеивателях с малыми волновыми размерами реализует и иллюстрирует реальное существование жесткой взаимосвязи между амплитудой и фазой волны, рассеянной квазиточечным рассеивателем. В случае рассеивателя, близкого к δ -образному (в виде сильной неоднородности с исчезающе малыми размерами), факт существования связи между амплитудой и фазой рассеянного сигнала означает, с физической точки зрения, что процесс перерассеяния может происходить внутри и в окрестности очень малой неоднородности. Однако для абсолютно мягких рассеивателей внутреннее давление и внутреннее поле равны нулю, поэтому процессы перерассеяния внутри рассеивателя

отсутствуют. Тогда в этом случае механизм реализации универсальной связи между амплитудой и фазой можно объяснить лишь процессами дифракции, происходящими во внешнем, относительно мягкого рассеивателя, поле, в сочетании с процессами перерассеяния на границе этого рассеивателя, происходящими на ничтожных пространственных масштабах.

Модель исчезающе малого рассеивателя выявила интересное и важное свойство НГМ-алгоритма – способность (ввиду математической строгости алгоритма) находить такие черты рассеивателя, которые проявляются на расстояниях, заведомо много меньших потенциальной разрешающей способности любого из методов реконструкции. Используется, таким образом, не разрешающая способность, а строгость метода, позволяющая найти решение в виде действительной функции рассеивателя в области, в которой “разглядеть” эти свойства невозможно.

Полученный результат фундаментального характера – однозначная связь амплитуды и фазы поля, рассеянного от квазиточечного рассеивателя – может быть применен на практике для контроля качества решения (т.е. качества восстановления исследуемого объекта), обеспечиваемого тем или иным алгоритмом томографирования, в котором экспериментально измеряемые данные рассеяния обрабатываются нелинейным образом для учета процессов перерассеяния. А именно, высокое качество восстановления, свидетельствующее об адекватности алгоритма, имеет место, если аппаратная функция этого алгоритма оказывается действительной величиной при полных данных рассеяния. Другими словами, алгоритм, адекватно учитывающий процессы перерассеяния, должен восстанавливать точечную неоднородность как действительную хорошо локализованную функцию. При этом в качестве

тестовых данных может служить рассеянное поле от точечной неоднородности, рассчитанное теоретически согласно найденному соотношению.

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-2906.2008.2 и гранта № 07-02-00239 Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадалян Н.П., Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Восстановление акустических граничных рассеивателей с использованием алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 990–997.
2. Крылов В.В. Основы теории излучения и рассеяния звука. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 118.
3. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит, 1973. С. 496.
4. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // ДАН. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
5. Буров В.А., Морозов С.А. Связь между амплитудой и фазой сигнала, рассеянного “точечной” акустической неоднородностью // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751–756.