

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ
ТВЕРДЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.222

АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОЕ ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ
И ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК В РЕЗОНАТОРЕ ИЗ ГРАНИТА

© 2009 г. В. Е. Назаров, А. Б. Колпаков, А. В. Радостин

*Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, Ульянова 46
E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru
Поступила в редакцию 22.01.08 г.*

Приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований низко-частотных эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения (нелинейных потерь и сдвига резонансной частоты) и генерации высших (второй и третьей) гармоник в стержневом резонаторе из карельского гранита. Аналитическое описание наблюдаемых эффектов проведено в рамках феноменологических гистерезисных уравнений состояния, содержащих упругий и неупругий гистерезисы. Показано, что при малых амплитудах деформации проявляется упругий кубический гистерезис, а при больших — имеет место суперпозиция квадратичных упругого и неупругого гистерезисов, определены их относительные веса и эффективные параметры акустической нелинейности гранита.

PACS: 43.25.Ba, 43.25.Dc

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время высокая (или сильная) акустическая нелинейность многих микронеоднородных (или мезоскопических) твердых тел, в частности, поликристаллических горных пород и металлов, является надежно установленным, бесспорным и общепризнанным фактом [1–6]. Тем не менее, проведение экспериментальных и теоретических исследований нелинейных волновых процессов в подобных средах будет, по-видимому, и актуально и необходимо всегда (или, по крайней мере, пока в наличии будут образцы еще неисследованных природных и искусственных материалов). Это связано с тем, что, во-первых, акустическая нелинейность микронеоднородных твердых тел значительно превышает нелинейность однородных материалов, во-вторых, “акустическое поведение” таких сред (количество которых практически безгранично), как правило, индивидуально и не соответствует каноническим уравнениям “классической” нелинейной (пяти- или девятиконстантной) теории упругости [7–9] и, в-третьих, представление об акустической нелинейности конкретного микронеоднородного твердого тела можно получить только на основе результатов детальных экспериментальных исследований в нем нелинейных акустических эффектов (НАЭ). Анализ результатов таких исследований позволяет, в принципе, построить реологическую модель исследуемой среды и реконструировать ее уравнение состояния, а также определить эффективные параметры нелинейности этого уравнения, зависимость их от частот взаимодействующих волн и т.д., что, несомненно, необходимо для раз-

вития нелинейных методов диагностики. Следует также отметить, что, согласно [10, 11], изучение “необычных нелинейных эффектов при распространении волн в геофизических структурах” относится к одной из пяти актуальных проблем современной нелинейной акустики.

Как известно [12–16], акустическая нелинейность поликристаллических твердых тел связана с наличием в их структуре различных дефектов (вакансий, примесных и межузельных атомов, дислокаций, границ зерен, трещин и т.д.), движение и взаимодействие которых является причиной нелинейного амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ). Дислокационный механизм нелинейности таких поликристаллов приводит к проявлению в них разнообразных НАЭ, в связи с чем исследование этих эффектов позволяет глубже понять физику явления АЗВТ. В относительно низкочастотном (НЧ) диапазоне акустическая нелинейность подобных сред, как правило, проявляет гистерезисные свойства, поэтому одной из основных задач аналитического описания НЧ нелинейных волновых процессов в таких средах является адекватный выбор гистерезисного уравнения состояния исследуемой среды [17–19]. Несмотря на то, что применение гистерезисных уравнений для описания нелинейных процессов в средах с несовершенной упругостью [20] уже давно не вызывает сомнений, правомерность, однозначность и адекватность такого выбора до сих пор представляет довольно сложную и актуальную проблему. Так, например, в работе [18], в качестве характерного признака, способствующего отличить различные (симметричные) виды аку-

стических гистерезисов, предлагалось рассматривать параметр r , равный отношению амплитудно-зависимых дефекта модуля упругости и декремента затухания. Для различных моделей гистерезисов (трения и отрыва [17] или упругого и неупругого [19]) это отношение не зависит от амплитуды деформации [12], а для симметричных – параметр r изменяется в пределах нескольких единиц, что, казалось бы, может быть вполне информативным идентификатором формы гистерезиса. Однако экспериментальные исследования эффектов АЗВТ во многих поликристаллических твердых телах, а также более тонких эффектов проявления гистерезисной нелинейности (например, генерации высших гармоник), свидетельствуют о том, что гистерезисные уравнения состояния этих материалов, как правило, несимметричны, при этом диапазон изменения параметра r – весьма неопределен и поэтому предложенный в работе [18] критерий часто не работает. В работе [19], для определения вида гистерезиса, кроме традиционно изучаемых эффектов АЗВТ – дефекта модуля и декремента затухания, предлагалось исследовать амплитудные зависимости других НАЭ, в частности генерации высших гармоник. В недавней работе [21], на основе анализа амплитудных зависимостей НАЭ в известняке удалось показать, что упругий гистерезис самосогласованным образом описывает результаты экспериментов, а неупругий гистерезис для их объяснения не пригоден.

Настоящая работа посвящена определению уравнения состояния твердого тела, обладающего гистерезисной нелинейностью. Поставленная задача решается на основе анализа результатов экспериментальных и теоретических исследований НЧ волновых процессов, связанных с проявлением амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерации высших гармоник в стержневом акустическом резонаторе из карельского гранита Питкяранта. Аналитическое описание наблюдаемых нелинейных эффектов проводится в рамках феноменологических уравнений состояния, содержащих упругий и неупругий гистерезисы [19]. Из сравнения теоретических расчетов с экспериментальными результатами показано, что уравнение состояния гранита определяется суперпозицией этих гистерезисов, при этом определены их относительные веса и эффективные параметры нелинейности гранита.

УСЛОВИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперимент проводился со стержневым резонатором, изготовленным из гранита: длина стержня $L = 35$ см, его сечение – квадрат со стороной 1.6 см. Плотность гранита составляла около 2.75 гр/см³ ($\pm 1\%$). Измерения проводились при комнатной температуре, по стандартной схеме,

подробно описанной, например, в работах [1–3, 21]. Исследуемый стержень является акустическим резонатором с почти жесткой и мягкой границами, первые собственные частоты которого определяются выражением $F_p \cong (2p - 1)C_0/4L$, где C_0 – фазовая скорость НЧ продольной волны в стержне, p – номер моды. Погрешности измерения частот и амплитуд НЧ акустических волн составляли соответственно $\pm 5 \times 10^{-1}$ Гц, $\pm 5 \times 10^{-2}$ Дб. Резонансные частоты F_p и добротности Q_p для первых трех продольных мод резонатора при малой амплитуде его возбуждения, когда нелинейные эффекты не наблюдались, составляли соответственно: $F_1 \cong 3820$ Гц, $F_2 \cong 10220$ Гц, $F_3 \cong 17200$ Гц и $Q_1 \cong 255$, $Q_2 \cong 238$, $Q_3 \cong 273$. Резонансной частоте первой моды такого резонатора соответствует $C_0 \cong 5.3 \times 10^5$ см/с.

ЭФФЕКТЫ АЗВТ И ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК НЧ ВОЛНЫ

В этом эксперименте исследовались НЧ эффекты АЗВТ, обусловленные гистерезисной нелинейностью гранита: нелинейные потери и сдвиг резонансной частоты, а также генерация второй и третьей гармоник волны накачки [1–3, 21]. Для этого в резонаторе возбуждались НЧ акустические колебания на частоте F , близкой к частоте F_p одной из первых трех его продольных мод, и измерялись амплитудные зависимости нелинейных сдвига резонансной частоты $\Delta F_{nl} = F - F_p < 0$ и коэффициента затухания μ_{nl} , а также амплитуд второй и третьей гармоник. На рис. 1 приведены зависимости амплитуды деформации ϵ_m стержня (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения U на излучателе накачки при возбуждении резонатора на первых трех продольных модах. Из этого рисунка видно, что при увеличении амплитуды возбуждения резонатора зависимости $\epsilon_m = \epsilon_m(U)$ становятся нелинейными; это свидетельствует о наличии амплитудно-зависимых потерь. На рис. 2а,б представлены графики зависимостей относительных модуля нелинейного сдвига резонансной частоты $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и коэффициента нелинейного затухания μ_{nl}/μ_p от ϵ_m , где $\Omega_p = 2\pi F_p$, $\mu_p = (\Omega_p Q_p)^{-1}$, $p = 1, 2, 3$. Относительный коэффициент нелинейного затухания определялся по формуле:

муле: $\frac{\mu_{nl}}{\mu_p} = \frac{\epsilon_{m1} U}{\epsilon_m U_1} - 1$, описывающей отклонение

наблюдаемой зависимости $\epsilon_m = \epsilon_m(U)$ на рис. 1 от линейной, проведенной через начальные экспериментальные точки (U_1, ϵ_{m1}) , соответствующие малым амплитудам возбуждения резонатора, когда эффекты АЗВТ пренебрежимо малы и $\epsilon_m \sim U$ [2, 3]. Из рис. 2 следует, что, во-первых, зависимости $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p от ϵ_m не зависят от частоты F_p возбуждения резонатора (для первых трех мод),

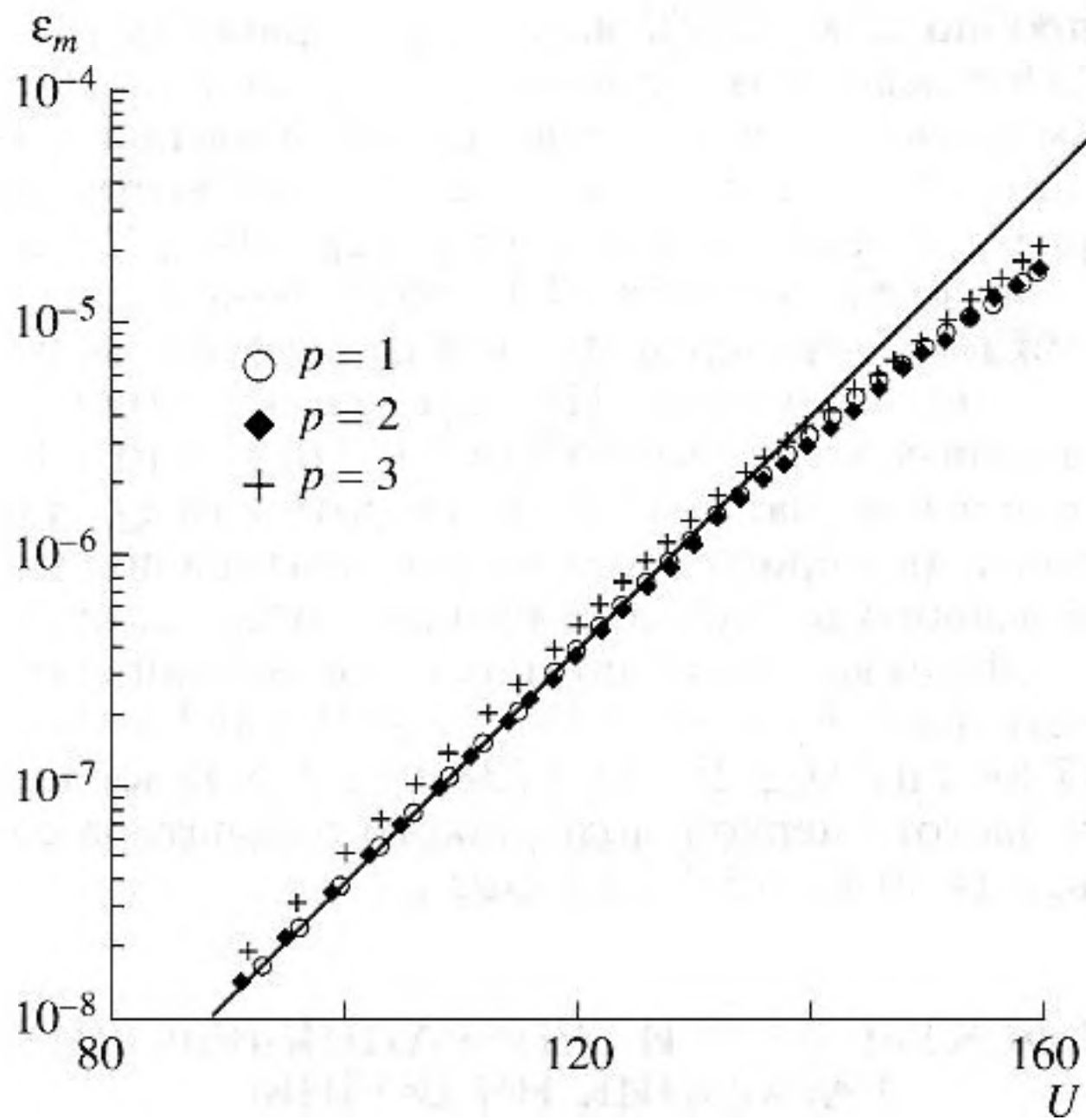


Рис. 1. Зависимость амплитуды волны в резонаторе от амплитуды напряжения на излучателе накачки (в дБ относительно 1 мкВ). Прямая линия соответствует зависимости $\epsilon_m \sim U$.

и, во-вторых, в зависимостях этих параметров от амплитуды возмущения можно выделить два диапазона: первый (I) диапазон – $\epsilon_m < \epsilon^* \cong 2 \times 10^{-6}$, где $\Delta F_{nl}/F_p \sim \epsilon_m^2$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \epsilon_m^2$, и второй (II) – $\epsilon_m > \epsilon^*$, где $\Delta F_{nl}/F_p \sim \epsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \epsilon_m$. Очевидно, что для каждого диапазона отношение нелинейных дефекта модуля упругости и декремента затухания, т.е. параметр $r_{1,2} = \left(\frac{|\Delta F_{nl}/F_p|}{2\pi F_p \mu_{nl}} \right)_{1,2}$, не зависит от амплитуды ϵ_m , при этом $r_1 \cong 4.7$, а $r_2 \cong 3.3$. Наличие одинаковых амплитудных зависимостей сдвига резонансной частоты и нелинейных потерь (в каждом диапазоне) свидетельствует о проявлении гистерезисной нелинейности исследуемого образца [12–17], причем, если для первого диапазона эта нелинейность должна быть кубической, то для второго – квадратичной.

Далее, при достаточно сильном возбуждении резонатора (при $\epsilon_m > 3 \times 10^{-6}$, т.е. во втором диапазоне) наблюдались эффекты генерации второй и третьей гармоник частоты накачки. На рис. 3 приведен график зависимостей амплитуды смещения $U_2(L)$ свободного торца стержня на частоте второй гармоники и амплитуды деформации ϵ_3 на частоте третьей гармоники от амплитуды деформации ϵ_m на первой моде (в резонансе). Из этого рисунка видно, что зависимости $U_2(L)$ и ϵ_3 от ϵ_m близки к квадратичной: $U_2(L), \epsilon_3 \sim \epsilon_m^2$; это

также свидетельствует о проявлении (во втором диапазоне) квадратичной гистерезисной нелинейности исследуемого образца гранита [1].

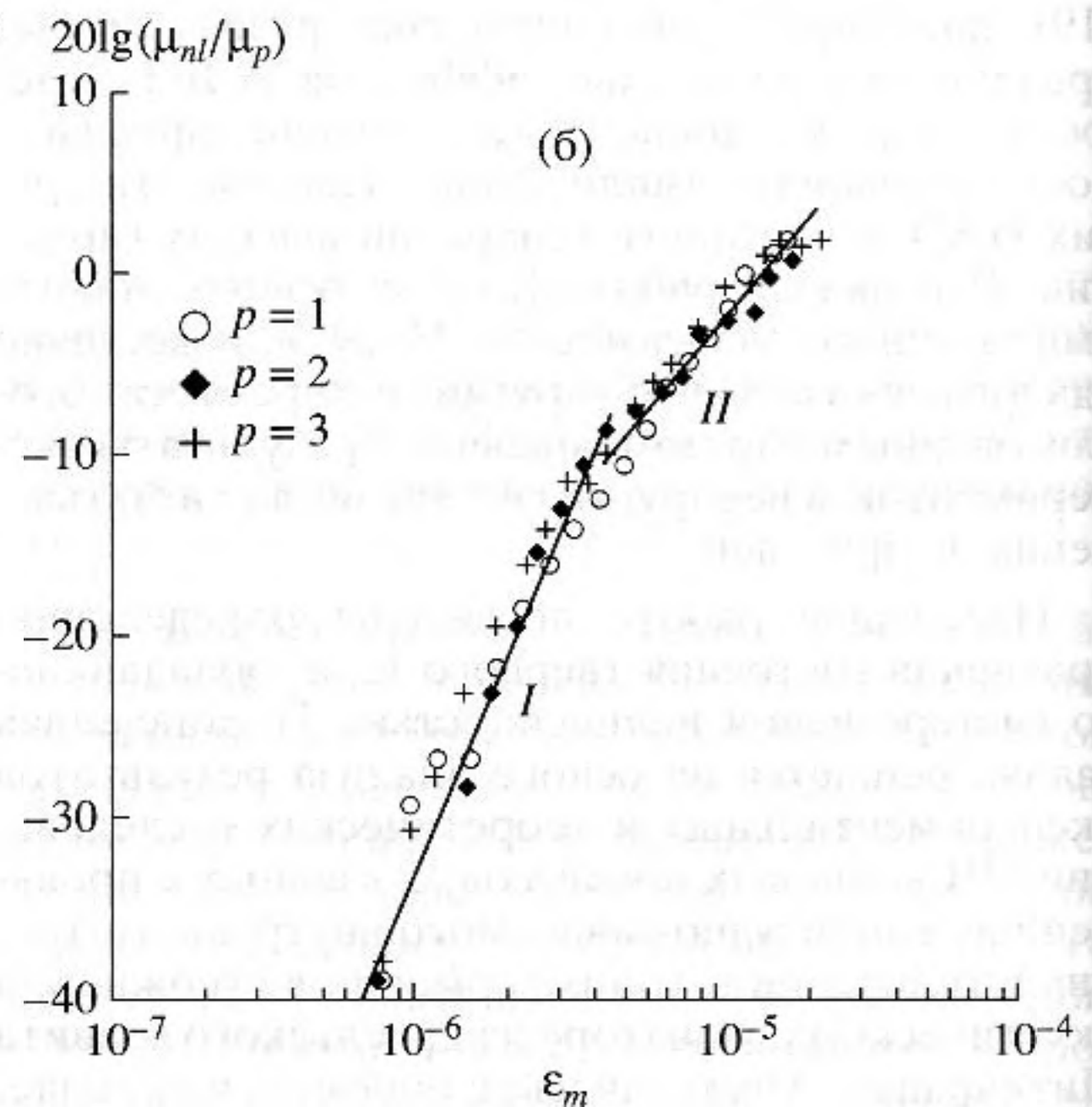
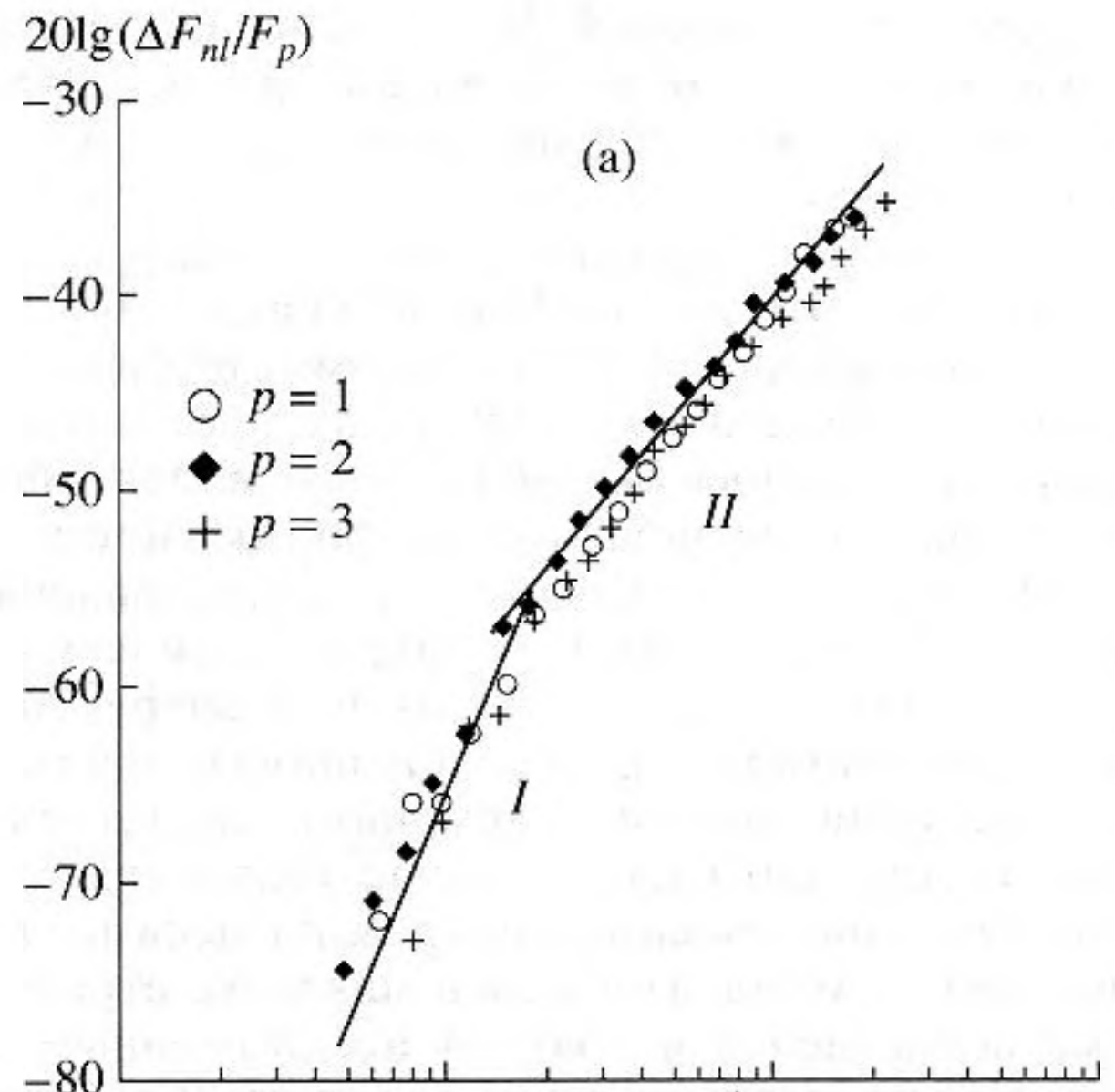


Рис. 2. Зависимости относительных нелинейных сдвига резонансной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от амплитуды волны в резонансе. Прямые линии соответствуют зависимостям: I – $\Delta F_{nl}/F_p \sim \epsilon_m^2$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \epsilon_m^2$, II – $\Delta F_{nl}/F_p \sim \epsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \epsilon_m$.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НАЭ В РАМКАХ УПРУГИХ ГИСТЕРЕЗИСОВ

Попытаемся аналитически описать и объяснить обнаруженные амплитудные зависимости

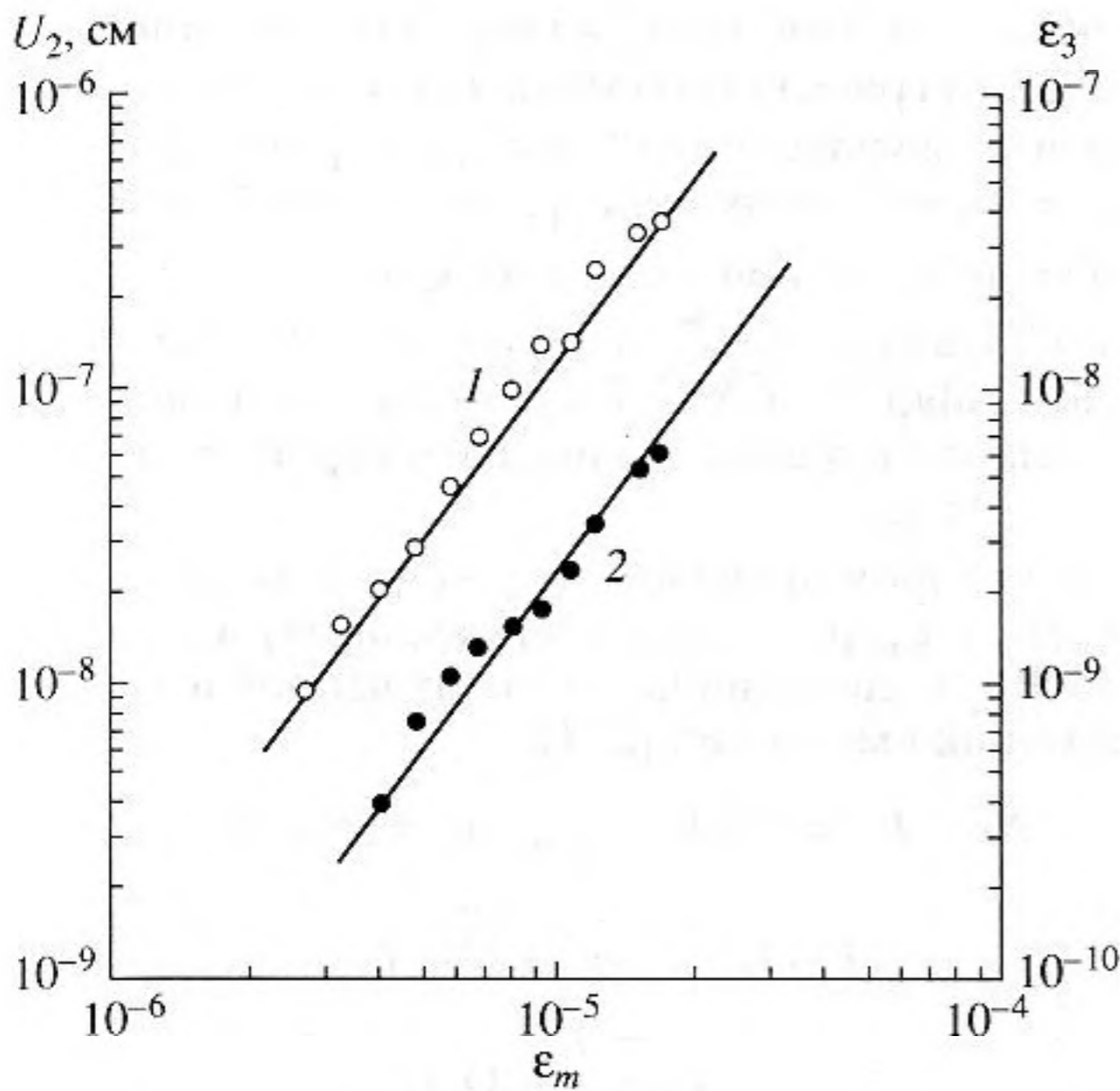


Рис. 3. Зависимости амплитуды смещения U_2 свободного торца стержня на частоте второй гармоники (1) и амплитуды деформации ϵ_3 на частоте третьей гармоники (2) от амплитуды ϵ_m . Прямые линии соответствуют зависимостям: $U_2, \epsilon_3 \sim \epsilon_m^2$.

НЧ эффектов АЗВТ и генерации второй и третьей гармоник сначала в рамках уравнения состояния, содержащего упругий гистерезис [19], качественно аналогичный дислокационному гистерезису Гранато–Люкке [12, 17, 18]:

$$\sigma(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}) = E[\epsilon - f(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon})] + \alpha\rho\dot{\epsilon}, \quad (1)$$

$$f(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}) = \frac{1}{n} \begin{cases} \gamma_1 \epsilon^n, & \epsilon > 0, \dot{\epsilon} > 0; \\ (\gamma_1 + \gamma_2)\epsilon_m^{n-1}\epsilon - \gamma_2 \epsilon^n, & \epsilon > 0, \dot{\epsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \epsilon^n, & \epsilon < 0, \dot{\epsilon} < 0; \\ (-1)^n(\gamma_3 + \gamma_4)\epsilon_m^{n-1}\epsilon + \gamma_4 \epsilon^n, & \epsilon < 0, \dot{\epsilon} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}$ – продольные напряжение, деформация и скорость деформации стержня, E – модуль Юнга, $f = f(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon})$ – гистерезисная функция, $|f_\epsilon(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon})| \ll 1$, γ_{1-4} – параметры гистерезисной нелинейности, $\epsilon_m = \epsilon_m(x)$ – локальная амплитуда деформации, $\epsilon_m < |\epsilon_{th}|$, ϵ_{th} – предел текучести, при превышении которого в твердом теле возникают необратимые пластические деформации и происходит его разрушение (для многих материалов $|\epsilon_{th}| > 10^{-4} - 10^{-3}$), α – коэффициент вязкости ($\alpha = C_0^2 / \Omega_p Q_p$), ρ – плотность, $n = 3$ – для первого диапазона и $n = 2$ – для второго, $|\gamma_{1-4}\epsilon_m^{n-1}| \ll 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$.

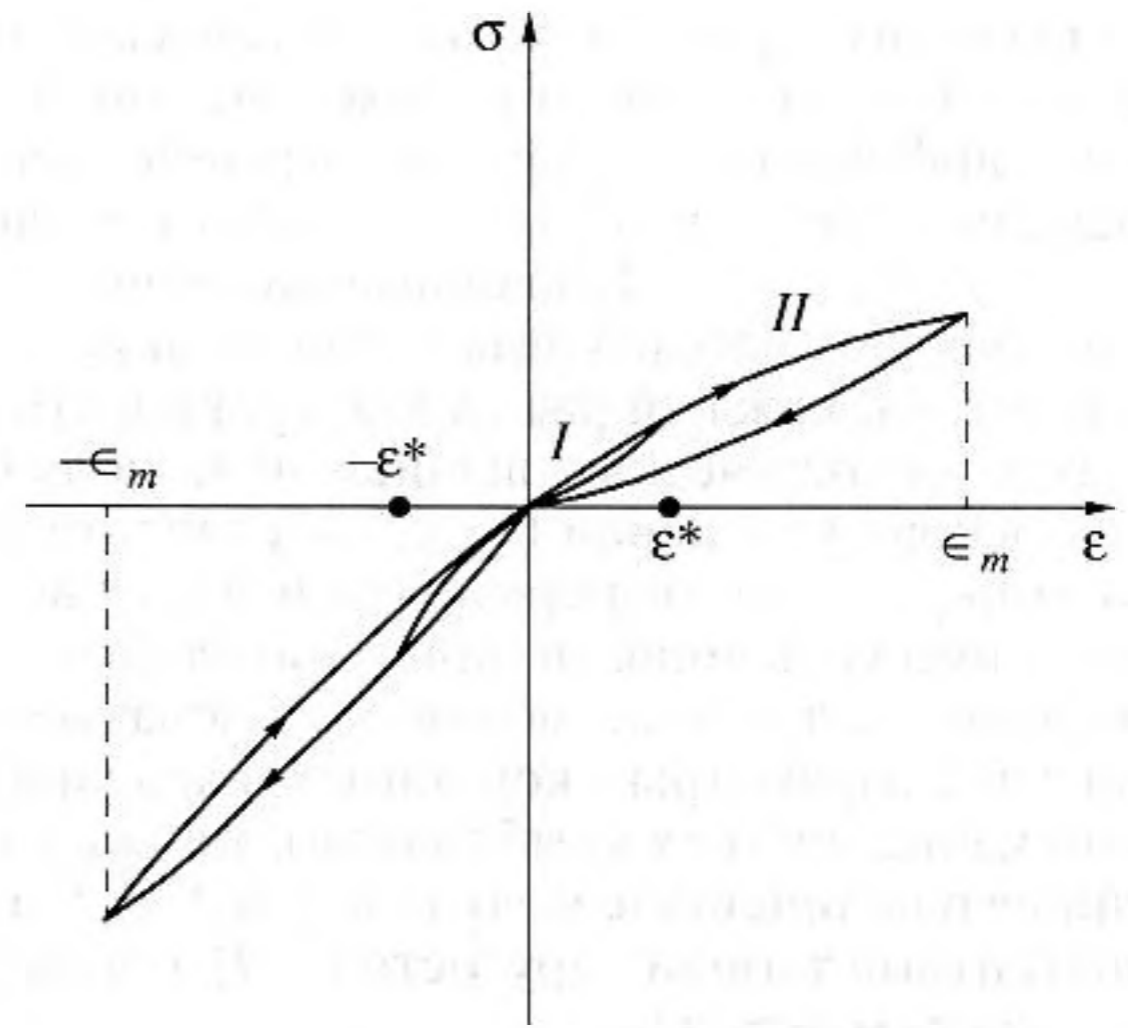


Рис. 4. Квазистатические зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})$ для упругих гистерезисов (1), (2) при малых ($\epsilon_m < \epsilon^* - I$) и при больших ($\epsilon_m > \epsilon^* - II$) амплитудах деформации.

(Здесь используется одна и та же индексация параметров γ_{1-4} при $\epsilon_m < \epsilon^*$ и $\epsilon_m > \epsilon^*$, но, конечно, значения этих параметров в различных диапазонах различны.) Для такого гистерезиса, в квазистатике, когда $\alpha\rho|\dot{\epsilon}| \ll E|f_\epsilon(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon})|$, имеем: $\sigma(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}) = 0$ при $\epsilon = 0$ (рис. 4), поэтому мы его называем упругим.

Отметим, что гистерезисные уравнения состояния вида (1), (2) характерны для многих микро неоднородных сред с несовершенной упругостью в области достаточно низких частот, когда релаксационные (а уж, тем более, резонансные) свойства дефектов среды не проявляются, при этом ее нелинейность является безинерционной. Эти уравнения имеют большую область применимости, чем общепринятое уравнение пятиконстантной теории упругости [8, 9], поскольку уравнение пятиконстантной теории можно получить (как частный случай) из уравнений (1), (2), полагая в них $\alpha = 0$ (т.е. рассматривая среду как идеальную), и $\gamma_1 = -\gamma_2 = -\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma$ – в этом случае гистерезис исчезает и остается только квадратичная упругая нелинейность. Обратное же утверждение неверно, т.е. из пятиконстантной теории упругости нельзя получить уравнения (1), (2). Уравнения (1), (2) учитывают и неидеальность среды (т.е. линейную диссипацию) и ее гистерезисную нелинейность. В этих уравнениях предполагаются только ограничения на величину их нелинейности ($|f_\epsilon(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon})| \ll 1$) и амплитуду деформации ($\epsilon_m < |\epsilon_{th}|$), согласующиеся с малостью нелинейных акустических эффектов, наблюдаемых в эксперименте. Эти ограничения используются при получении аналитических выражений для нелинейных потерь, сдвига резонансных частот и ам-

плитуд высших гармоник. С математической точки зрения, т.е. при теоретическом описании нелинейных эффектов, нет других ограничений на применение этих уравнений, что следует из литературы [1, 5, 6, 17–21]. При описании же нелинейных эффектов, наблюдаемых для конкретного твердого тела, каждый раз нужно сравнивать результаты аналитических вычислений, полученных на основе уравнений (1), (2), с результатами этого конкретного эксперимента и в случае согласия этими уравнениями (применительно к этому твердому телу) тоже можно пользоваться. И, наконец, все параметры – константы уравнений (1), (2) (или какие-либо их комбинации), так же как и линейные и нелинейные модули K , μ и A , B , C в пятikonстантной теории упругости [7–9], определяются экспериментально.

Уравнения состояния (1), (2), вместе с уравнением движения $\rho W_{tt} = \sigma_x(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})$ и граничными условиями на торцах резонатора: $W(x=0, t) = A_0 \cos \Omega t$, $W_x(x=L, t) = 0$ (где W – смещение, $\epsilon = W_x$, A_0 и Ω – амплитуда и частота колебаний излучателя накачки) описывают НЧ нелинейные волновые процессы в таком резонаторе [1–3]; их расчет проводился методом возмущений, поскольку в эксперименте выполнялись условия: $|\Delta F_{nl}/F_p| \ll 1$, $\epsilon_{2,3} \ll \epsilon_m$ ($\epsilon_{2,3}$ – амплитуды деформации на частотах 2Ω и 3Ω). Резонансная кривая резонатора определяется выражением [3]

$$\epsilon_m = \frac{A_0 \Omega_p}{L} \frac{1}{[(\delta + \delta_{nl})^2 + (\mu_p + \mu_{nl})^2 \Omega_p^4 / 4]^{1/2}}, \quad (3)$$

где нелинейный сдвиг резонансной частоты $\delta_{nl} = 2\pi \Delta F_{nl}$ и потери μ_{nl} для первого и второго диапазонов зависят от параметров γ_i гистерезиса (2), $\delta = \Omega - \Omega_p$, $|\delta| \ll \Omega_p$.

В первом диапазоне ($\epsilon_m < \epsilon^*$), выражения для $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p имеют вид [3]:

$$\Delta F_{nl}/F_p = -a_1 \epsilon_m^2, \quad \mu_{nl}/\mu_p = b_1 Q_p \epsilon_m^2, \quad (4)$$

где $a_1 = \frac{1}{32} \left\{ (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{3}{4} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \right\}$,

$$b_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{16\pi} > 0.$$

Для такого гистерезиса отношение $r_1 = a_1/b_1$ зависит от соотношения параметров γ_{1-4} , без знания которых (или их линейных комбинаций $\gamma_1 - \gamma_3$ и $\gamma_2 - \gamma_4$) значение r_1 определить нельзя, но, разумеется, в первом диапазоне $r_1 \cong 4.7$. Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 2а,б) и выражений (4) находим коэффициенты a_1 , b_1 , а по ним и параметры $\gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_2 - \gamma_4$: $a_1 = 5.6 \times 10^8$, $b_1 = 1.2 \times 10^8$, $\gamma_1 - \gamma_3 = 1.1 \times 10^{10}$, $\gamma_2 - \gamma_4 = -4.9 \times 10^9$. Из первого выражения (4) можно определить эф-

фективный параметр Γ_3 упругой кубической нелинейности гранита (при малых амплитудах $\epsilon_m < \epsilon^*$). Полагая в уравнении (2) $n = 3$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$ и $\gamma_1 = -\gamma_3 = \Gamma_3$, получаем уравнение состояния (1) с упругой кубической нелинейностью $f(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}) = \Gamma_3 \epsilon^3/3$, в котором $\Gamma_3 = 32a_1/3 = 6 \times 10^9$. Таким образом, эффекты АЗВТ в первом диапазоне можно непротиворечиво описывать упругим гистерезисом (1), (2).

Во втором диапазоне ($\epsilon_m > \epsilon^*$), выражения для $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p , а также для амплитуд $U_2(L)$, ϵ_3 и фаз $\Psi_{2,3}$ колебаний на частотах второй и третьей гармоник имеют вид [2, 3]:

$$\Delta F_{nl}/F_p = -a_1 \epsilon_m, \quad \mu_{nl}/\mu_p = b_1 Q_p \epsilon_m, \quad (5)$$

$$U_2(L) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \epsilon_m^2 L, \quad (6)$$

$$\epsilon_3 = \frac{4\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \Omega_p \epsilon_m^2}{15\pi [(\Omega_p/Q_{3p-1})^2 + 4[\delta_{nl} - \Delta\Omega_p/3]^2]^{1/2}}, \quad (7)$$

$$\Psi_{2,3} = \text{arctg}(b_{2,3}/a_{2,3}), \quad (8)$$

где

$$a_1 = \frac{4}{9\pi^2} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{6\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$$b_1 = \frac{2}{9\pi^2} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) > 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{64} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{24\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$$

$$b_2 = \frac{1}{48\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$$

$$a_3 = \frac{2}{15\pi} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4),$$

$$b_3 = \frac{1}{30\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$\Delta\Omega_p = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1}$ – дисперсионная расстройка частоты $3\Omega_p$ от резонансной частоты моды с номером $3p - 1$.

При получении выражений (5)–(8), гистерезисной нелинейностью первого диапазона пренебрегалось, поскольку амплитуда и длительность фазы (т.е. времени нахождения точки (ϵ, σ) на диаграмме $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})$) для первого диапазона значительно меньше соответствующих величин для второго диапазона (отношение максимальных амплитуд для второго и первого диапазонов составляет около 10, близкой к нему величине равно и отношение длительностей фаз второго и первого диапазонов).

Здесь, в общем случае, отношение $r_2 = a_1/b_1$ также зависит от соотношения параметров γ_{1-4} , и также не определено пока не определены эти коэффициенты (или линейные комбинации параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$), но, естественно, во втором диапазоне $r_2 \cong 3.3$. Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 3, 4) и выражений (5), (6), (7) находим коэффициенты $a_1, b_1, \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ (при $p = 1, \Delta\Omega_1 \cong 2\pi \times 1250 \text{ с}^{-1}$) и соответствующие коэффициентам a_1 и b_1 параметры $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$: $a_1 = 9 \times 10^2, b_1 = 2.7 \times 10^2, \gamma_1 + \gamma_3 = 8.9 \times 10^3, \gamma_2 + \gamma_4 = 3.3 \times 10^3, \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 30, \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 60$. Из выражения (6) можно определить эффективный параметр Γ_2 квадратичной упругой нелинейности гранита (при $\epsilon_m > \epsilon^*$). Полагая в уравнении (2) $n = 2, \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \gamma_3 + \gamma_4 = 0$ и $\gamma_1 = -\gamma_3 = \Gamma_2$, получим уравнение состояния (1) с упругой квадратичной нелинейностью $f(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}) = \Gamma_2 \epsilon^2/2$, в котором параметр $\Gamma_2 = 16 \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 4.8 \times 10^2$. Как и следовало ожидать, значение квадратичного параметра Γ_2 для исследуемого образца гранита оказалось намного (в 10^2 раз) выше аналогичного параметра для относительно "жестких" твердых тел (сталь, стекло) [8, 9].

Значение коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, ответственного за амплитуду третьей гармоники, можно также однозначно вычислить и из определенных выше (по нелинейным потерям и сдвигу частоты) параметров $\gamma_1 + \gamma_3, \gamma_2 + \gamma_4$: $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 2.7 \times 10^2$. Как видно, определение коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ двумя независимыми способами (по третьей гармонике — $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 60$ и нелинейным сдвигу частоты и потерям — $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 2.7 \times 10^2$) дает существенно различные результаты (отличие составляет $2.7 \times 10^2/60 \cong 4.5$ раза), что, конечно, требует объяснения.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НАЭ В РАМКАХ НЕУПРУГИХ ГИСТЕРЕЗИСОВ

Отметим следующий важный момент, связанный с тем, что нелинейные эффекты АЗВТ можно, вообще говоря, описывать не только упругим гистерезисом (2), но и гистерезисом неупругим [17], при этом амплитудные зависимости НАЭ будут такими же, как и для упругого гистерезиса. Так, в первом диапазоне эффекты АЗВТ можно было бы описать симметричным кубическим неупругим гистерезисом (с одним параметром нели-

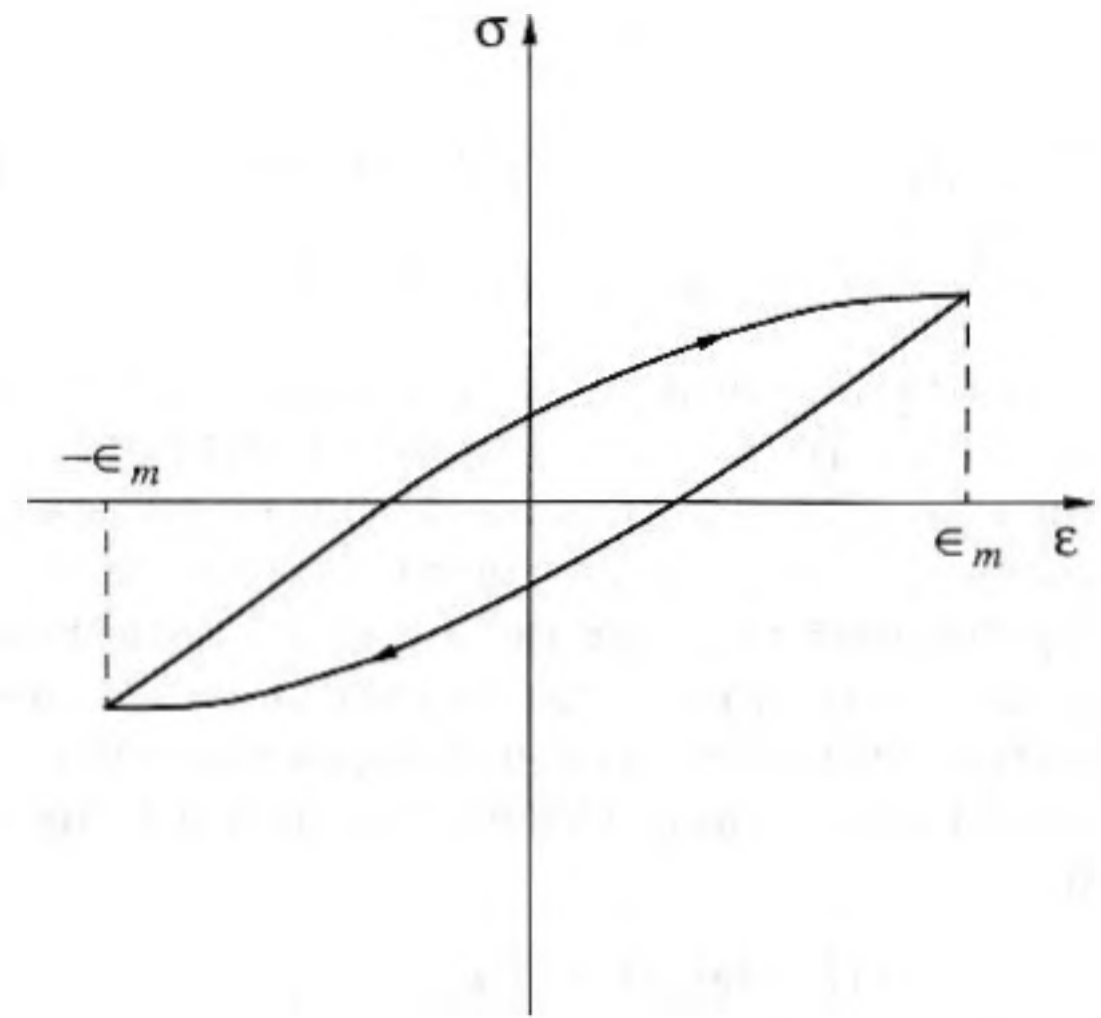


Рис. 5. Квазистатическая зависимость $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})$ для неупругого кубического гистерезиса (1), (9).

нейности $\beta \gg 1$), для которого нелинейная гистерезисная функция имеет вид:

$$f(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}) = \beta \epsilon (3\epsilon_m^2 + \epsilon^2) + 3\beta \epsilon_m \begin{cases} \epsilon^2 - \epsilon_m^2, & \dot{\epsilon} > 0, \\ -\epsilon^2 + \epsilon_m^2, & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Качественный вид квазистатического (когда $\alpha p |\dot{\epsilon}| \ll E |f(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon})|$), неупругого гистерезиса (1), (9) изображен на рис. 5, из которого видно, что $\sigma(\epsilon, \text{sign} \dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}) \neq 0$ при $\epsilon = 0$. В этом случае выражения для $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p совпадают с выражениями (4), в которых: $a_1 = 45\beta/64, b_1 = 3\beta/\pi$. При этом, однако, мы сразу получаем противоречие, поскольку отношение $r_1 = a_1/b_1$ не зависит от параметра β : $r_1 = 15\pi/64 \cong 0.74$, а измерения показали, что $r_1 = 4.7$. Из экспериментальных результатов (рис. 2) находим коэффициенты a_1 и b_1 : $a_1 = 5.6 \times 10^8, b_1 = 1.2 \times 10^8$, а по ним — единственный параметр β . Теперь этим двум коэффициентам (a_1 и b_1) соответствуют два различных значения одного и того же параметра β : $\beta = 8 \times 10^8$ — по сдвигу резонансной частоты и $\beta = 1.3 \times 10^8$ — по потерям, что также является противоречием и, следовательно, неупругий кубический гистерезис (9) для описания эффектов АЗВТ (в первом диапазоне) не пригоден.

Далее, во втором диапазоне, НАЭ можно было бы описать неупругим квадратичным гистерезисом, так же, как и кубический (9), состоящим из двух ветвей (квадратичных парабол), для которого гистерезисная функция имеет вид [20]:

$$f(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}) = \beta\epsilon_m\epsilon + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1\epsilon^2 - (\beta_1 + \beta_2)\epsilon_m^2/2, & \dot{\epsilon} > 0, \\ -\beta_2\epsilon^2 + (\beta_1 + \beta_2)\epsilon_m^2/2, & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases} \quad (10)$$

В этом уравнении три параметра нелинейности $\beta \gg 1$ и $\beta_1, \beta_2, |\beta_{1,2}| \gg 1$, причем негистерезисное слагаемое $\beta\epsilon_m\epsilon$ определяет только дефект модуля упругости (или сдвиг резонансной частоты), а гистерезисные (т.е. все остальные слагаемые) – нелинейные потери и генерацию высших гармоник. Интересно отметить, что функцию (10) можно представить в виде суммы четной и нечетной частей:

$$f(\epsilon, \text{sign}\dot{\epsilon}) = \beta\epsilon_m\epsilon + \frac{1}{4} [(\beta_1 - \beta_2)\epsilon^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\epsilon^2 - \epsilon_m^2)\text{sign}\dot{\epsilon}]. \quad (11)$$

Очевидно, что четное (квадратичное) слагаемое $(\beta_1 - \beta_2)\epsilon^2/4$ отвечает за генерацию только второй гармоники (в первом приближении), а нечетное $(\beta_1 + \beta_2)(\epsilon^2 - \epsilon_m^2)\text{sign}\dot{\epsilon}/4$ – за нелинейные потери ($\beta_1 + \beta_2 > 0$) и генерацию нечетных гармоник, при этом, здесь также, как и для упругого гистерезиса (2), сдвиг резонансной частоты и декремент затухания также будут пропорциональны ϵ_m , а амплитуды высших гармоник – ϵ_m^2 (правда, из четных с такой зависимостью будет только вторая). Таким образом, с точки зрения нелинейной акустики, среды, описываемые квадратичными упругим (2) и неупругим (10) гистерезисами “похожи”, однако они принципиально отличаются тем, что при возбуждении в них гармонической волны в среде с неупругим гистерезисом волн четных гармоник (выше второй) не будет, а в среде с гистерезисом упругим они возникнут [19]. Этот отличительный признак можно, в принципе, использовать для определения вида гистерезиса микронеоднородной среды.

Для резонатора с гистерезисной нелинейностью (10) значения $\Delta F_{nl}/F_p$, μ_{nl}/μ_p , $U_2(L)$, ϵ_3 и $\Psi_{2,3}$ определяются выражениями (5)–(8), в которых: $a_1 = c_1 = 2\beta/3\pi$, $b_1 = d_1 = (8/9\pi^2)(\beta_1 + \beta_2)$, $a_2 = c_2 = -(\beta_1 - \beta_2)/16$, $a_3 = c_3 = -4(\beta_1 + \beta_2)/45\pi$, $b_{2,3} = d_{2,3} = 0$ и, следовательно, неупругий гистерезис (10) дает такие же, как и упругий гистерезис (2) при $n = 2$, амплитудные зависимости эффектов АЗВТ и амплитуд высших гармоник:

$$\Delta F_{nl}/F_p = -c_1\epsilon_m, \quad \mu_{nl}/\mu_p = d_1 Q_p \epsilon_m, \quad (12)$$

$$U_2(L) = \sqrt{c_2^2 + d_2^2} \epsilon_m^2 L \quad (13)$$

$$\epsilon_3 = \frac{4\sqrt{c_3^2 + d_3^2} \Omega_p \epsilon_m^2}{15\pi[(\Omega_p/Q_{3p-1})^2 + 4[\delta_{nl} - \Delta\Omega_p/3]^2]^{1/2}}, \quad (14)$$

$$\Psi_{2,3} = \arctg(d_{2,3}/c_{2,3}). \quad (15)$$

Вычисления показывают, что если определить коэффициенты c_1 , d_1 и β , $\beta_1 + \beta_2$ по традиционно измеряемым эффектам АЗВТ – нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям, то получим, что $c_1 = 9 \times 10^2$, $d_1 = 2.7 \times 10^2$, $\beta = 4.2 \times 10^3$, $\beta_1 + \beta_2 = 3.1 \times 10^3$, при этом, конечно, $r_2 = c_1/d_2 \cong 3.3$. По измерению амплитуды второй гармоники находим: $\sqrt{c_2^2 + d_2^2} = 30$ или $|\beta_1 - \beta_2| = 4.8 \times 10^2$, что, естественно, в точности совпадает с ранее введенным эффективным параметром квадратичной нелинейности Γ_2 .

Найденное по нелинейным потерям значение $\beta_1 + \beta_2 = 3.1 \times 10^3$ соответствует следующему значению коэффициента $\sqrt{c_3^2 + d_3^2}$, определяющему амплитуду третьей гармоники: $\sqrt{c_3^2 + d_3^2} = 86$, что заметно (в $86/60 \cong 1.4$ раза) превышает значение $\sqrt{c_3^2 + d_3^2}$, определенное по ее амплитуде: $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{c_2^2 + d_2^2} = 60$. Это противоречие также (как и для упругого гистерезиса) требует объяснения. Однако, если не обращать внимания на отмеченные количественные расхождения значений коэффициентов $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ и $\sqrt{c_2^2 + d_2^2}$, определенных по нелинейным сдвигу резонансной частоты (и потерям), и амплитуде третьей гармоники (или при измерении НАЭ ограничиться только второй гармоникой), то эффекты АЗВТ в исследованном образце карельского гранита (при $\epsilon_m > \epsilon^* \cong 2 \times 10^{-6}$) можно описывать как упругим (2), так и неупругим (10) гистерезисами.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫБОР ГИСТЕРЕЗИСА

Обнаруженное несоответствие коэффициентов $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ и $\sqrt{c_2^2 + d_2^2}$, определенных различными способами, можно объяснить, если предположить, что гранит содержит два типа дефектов, один из которых (их относительная концентрация равна η) отвечает за “работу” упругого гистерезиса (2), а другой, с относительной концентрацией $1 - \eta$, – за “работу” гистерезиса неупругого (10), так что, в итоге, НАЭ определяются суперпозицией проявлений этих гистерезисов с весами η и $1 - \eta$ соответственно:

$$\begin{aligned}\Delta F_{nl}/F_p &= -[\eta a_1 + (1 - \eta)c_1]\epsilon_m, \\ \mu_{nl}/\mu_p &= [\eta b_1 + (1 - \eta)d_1]Q_p \epsilon_m,\end{aligned}\quad (16)$$

$$U_2(L) = \sqrt{[\eta a_2 + (1 - \eta)c_2]^2 + [\eta b_2 + (1 - \eta)d_2]^2} \epsilon_m^2 L, \quad (17)$$

$$\epsilon_3 = \frac{4\sqrt{[\eta a_3 + (1 - \eta)c_3]^2 + [\eta b_3 + (1 - \eta)d_3]^2} \Omega_p \epsilon_m^2}{15\pi[(\Omega_p/Q_{3p-1})^2 + 4[\delta_{nl} - \Delta\Omega_p/3]^2]^{1/2}}. \quad (18)$$

Вообще говоря, природа таких гистерезисных дефектов в граните неизвестна, однако можно отметить, что ими могут быть, например, краевые и винтовые дислокации, их скопления, границы зерен, микротрещины и т.д. В этом случае, как видно из выражений (16)–(18), амплитуда третьей гармоники, вследствие интерференции и компенсации ее компонент, генерируемых упругим и неупругим гистерезисами (они имеют разные фазы), и благодаря свободному параметру – концентрации η , определяется “менее зависимой” комбинацией коэффициентов a_1, b_1 или c_1, d_1 (т.е. параметров нелинейности упругого или неупругого гистерезисов), в результате чего, отмеченные выше количественные противоречия (по ко-

эффициентам $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ и $\sqrt{c_3^2 + d_3^2}$) снимаются. Так, при относительной концентрации $\eta \cong 0.38$ и при следующих значениях параметров упругого и неупругого гистерезисов: $\gamma_1 + \gamma_3 = 8.9 \times 10^3$, $\gamma_2 + \gamma_4 = 3.3 \times 10^3$, $a_3 = 2.4 \times 10^2$, $b_3 = 1.3 \times 10^2$, $\beta = 4.2 \times 10^3$, $\beta_1 + \beta_2 = 3.1 \times 10^3$, $c_3 = -2.8 \times 10^2$, $d_3 = 0$, получаем, что эффективный параметр нелинейности

$\sqrt{[\eta a_3 + (1 - \eta)c_3]^2 + [\eta b_3 + (1 - \eta)d_3]^2}$, ответственный за генерацию третьей гармоники, и вычисленный по нелинейным сдвигу резонансной частоты (и потерям), равен 60 (как и должно быть!), при этом все другие эффективные коэффициенты, ответственные за сдвиг резонансной частоты, потери и амплитуду второй гармоники остаются без изменения: $\eta a_1 + (1 - \eta)c_1 = 9 \times 10^2$, $\eta b_1 + (1 - \eta)d_1 = 2.7 \times 10^2$, $\sqrt{[\eta a_2 + (1 - \eta)c_2]^2 + [\eta b_2 + (1 - \eta)d_2]^2} = 30$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования НЧ эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник в резонаторе из карельского гранита показали, что:

1. В НЧ диапазоне (по крайней мере, до 17 кГц) акустическая нелинейность гранита является гистерезисной и частотно-независимой, при этом при малых амплитудах деформации ($\epsilon_m < \epsilon^* = 2 \times 10^{-6}$) проявляется упругий кубический гистерезис, а

при больших ($\epsilon^* < \epsilon_m < 3 \times 10^{-5}$) имеет место суперпозиция квадратичных упругого и неупругого гистерезисов.

2. Эффективные параметры кубической (при $\epsilon_m < \epsilon^* \cong 2 \times 10^{-6}$) и квадратичной (при $\epsilon^* < \epsilon_m < 3 \times 10^{-5}$) упругой нелинейности гранита на несколько порядков (квадратичный в 10^2 раз) превышают аналогичные параметры однородных материалов, например, стекла и стали [8, 9], и составляют соответственно $\Gamma_3 = 6 \times 10^9$ и $\Gamma_2 = 4.8 \times 10^2$.

3. Сильная гистерезисная нелинейность горных пород, подобных карельскому граниту, создает возможность использования различных нелинейных сейсмоакустических эффектов для диагностики массива горных пород в толще Земли и контроля его напряженного состояния.

В заключение отметим, что, кроме НЧ гистерезисной, многие поликристаллические горные породы обладают сильной высокочастотной (ВЧ) диссипативной (или неупругой) нелинейностью, что также можно использовать для их акустической диагностики. О результатах исследований ВЧ нелинейных эффектов, связанных с проявлением диссипативной нелинейности в том же резонаторе из карельского гранита, будет сообщено в следующей статье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-97039-р_поволжье_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1988. V. 50. № 1. P. 65–73.
2. *Назаров В.Е.* Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // *ФММ*. 1991. № 3. С. 172–178.
3. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород // *Физика Земли*. 1993. № 1. С. 13–18.
4. *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class materials // *Physics Today*. 1999. № 4. P. 30–36.
5. *Ostrovsky L.A., Johnson P.A.* Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // *La Rivista del Nuovo Cimento*. 2001. V. 24. Ser. 4. № 7. P. 1–46.

6. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука. 1987. с.
8. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.
9. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520 с.
10. Руденко О.В. Актуальные проблемы, связанные с нелинейной акустикой. Нелинейные волны – 2006 / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. 576 с.
11. Руденко О.В. Какие проблемы, связанные с нелинейной акустикой, представляются сегодня наиболее важными и интересными. / Ежегодник 2007. Акустика неоднородных сред Сб. Трудов семинара научной школы проф. С.А. Рыбака. С. 14–28.
12. Granato A., Lucke K. Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
13. Ниблетт Д., Уилкс Дж. Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями // УФН. 1963. Т. 80. № 1. С. 125–187.
14. Ультразвуковые методы исследования дислокаций // Сб. статей. Пер. с англ. и нем. под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ. 1963. с.
15. Физическая акустика. Под ред. У. Мезона. Т. 4, Часть А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир. 1969. с.
16. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. с.
17. Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. № 4. P. 952–963.
18. Лебедев А.Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.
19. Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А. Нелинейные волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть I. // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 405–415.
20. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наукова Думка. 1970. с.
21. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., Радостин А.В. Экспериментальное исследование нелинейных акустических эффектов в известняке // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 2. С. 254–263.