

НИЗКОЧАСТОТНАЯ РЕЗОНАНСНАЯ ДИСПЕРСИЯ ЗВУКА
В ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ

© 2009 г. В. С. Федотовский, Т. Н. Верещагина

Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского
249033 Обнинск, пл. Бондаренко 1. Тел.: (48439) 98741. Факс: (48439) 9807.

E-mails: fedotovskiy@ippe.ru, vtn@ippe.ru

Поступила в редакцию 18.06.08 г.

Представлена теория резонансной дисперсии звука нового типа в газожидкостных пузырьковых средах, основанная на использовании эффективной динамической плотности. Показано, что из-за связанных сфероидально-поступательных колебаний пузырьков динамическая плотность газожидкостной среды имеет резонансную зависимость от частоты, что в волновом процессе проявляется как низкочастотная резонансная дисперсия звука. Эта дисперсия существенно отличается от известной высокочастотной резонансной дисперсии, обусловленной резонансом объемных осцилляций пузырьков. Приведены результаты экспериментов, подтверждающие существование резонансной дисперсии звука на частоте, равной половине собственной частоты сфероидальных колебаний пузырьков.

PACS: 43.20.Hg, 43.20.Zk, 43.25.Yw

Фазовая скорость распространения звука в пузырьковой среде определяется ее динамической плотностью и динамической сжимаемостью. Известно, что при частоте акустической волны, близкой к собственной частоте объемных колебаний пузырьков существует резонансная дисперсия звука, обусловленная резонансной зависимостью сжимаемости пузырьковой среды от частоты колебаний давления. Теоретическому и экспериментальному изучению этого явления, а также процессов, связанных с нелинейностью и неустойчивостью радиальных осцилляций пузырьков, посвящено большое количество работ [1–7], обзор которых можно найти, например, в [2, 5].

С другой стороны, при распространении звука газовые пузырьки совершают также поступательные колебания относительно содержащей их жидкости. Эти колебания не создают макроскопических деформаций и, соответственно, упругих макронапряжений в среде, т.е. не определяют ее упругих свойств. От поступательных колебаний пузырьков относительно жидкости зависит инерционное свойство — эффективная динамическая плотность пузырьковой среды, понятие, широко используемое в задачах акустики дисперсных и пористых сред [8–11].

В простейшем случае, когда дисперсная среда образована идеальной жидкостью и без массовыми сферическими включениями (пузырьками) с объемной концентрацией ϕ , отношение колеба-

тельной скорости пузырьков V к скорости среды U равно

$$\frac{V}{U} = \frac{3}{1+2\phi},$$

а динамическая плотность при этом выражается формулой [12]

$$\rho^* = \rho \frac{1-\phi}{1+2\phi}, \quad (1)$$

из которой видно, что динамическая плотность пузырьковой среды меньше истинной плотности смеси в $1+2\phi$ раз.

Для пузырьковой среды, образованной вязкой жидкостью, колебательная подвижность сферических пузырьков уменьшается при уменьшении частоты колебаний среды. Пузырьки постепенно “вмораживаются” в жидкость, а динамическая плотность асимптотически приближается к истинной плотности смеси при нулевой частоте. Возникающие в колеблющейся пузырьковой среде диссипативные потери обуславливают силу объемного вязкого сопротивления, которая может быть выражена через трансляционную вязкость [12]

$$\eta^* = \frac{18\eta\phi}{a\delta(1+2\phi)^2}, \quad (2)$$

где η — вязкость жидкости; a — радиус пузырьков; $\delta = (2\eta/\rho\omega)^{1/2}$ — толщина пограничного слоя на поверхности пузырьков, как на твердых частицах

(из-за присутствия поверхностно-активных веществ в жидкости).

Если при поступательных колебаниях среды пузырьки не сохраняют сферическую форму, а совершают деформационные колебания, превращаясь в сплюснутые и вытянутые сфероиды, то их поступательное движение в жидкости, как движение тел с переменной присоединенной массой, будет зависеть от амплитуды сфероидальных колебаний. Поскольку пузырьки представляют собой осцилляторы-квадруполь, собственная частота которых определяется формулой Рэлея-Ламба $\omega_2^2 = 12\sigma/\rho a^3$ [2, 13], то при определенных условиях возникает резонанс их сфероидально-поступательных колебаний. Такая динамика пузырьков обуславливает резонансную зависимость динамической плотности пузырьковой среды, которая, в свою очередь, определяет резонансную дисперсию звука.

Ранее задача о сфероидальных колебаниях пузырьков обсуждалась в литературе [14–16], однако связь сфероидальных и поступательных колебаний пузырьков, а также их влияние на акустические свойства газожидкостных сред, не рассматривались. В настоящей работе впервые изучается влияние связанных резонансных сфероидально-поступательных колебаний пузырьков на динамическую плотность и трансляционную вязкость, и, соответственно, на резонансную дисперсию и затухание звука в пузырьковой среде.

Представим форму пузырька в виде:

$$r(\theta, t) = a + \varepsilon(t)Y_2(\cos\theta),$$

где $Y_2(\cos\theta) = (1/2)(3\cos^2\theta - 1)$ – сферическая функция второго порядка, $\varepsilon = c - a$ – разность между полярной полуосью сфероида c и равновесным радиусом пузырька a , характеризующая степень вытянутости и сплюснутости пузырька.

Коэффициент присоединенной массы жидкости $\gamma = m_1/(4/3)\pi\rho a^3$ для сфероидального пузырька с эквивалентным по объему радиусом a при малых отклонениях от сферичности $|\varepsilon| \ll a$ можно аппроксимировать зависимостью

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2a}\right),$$

где $\gamma_0 = (1 + 2\varphi)/2(1 - \varphi)$ – коэффициент присоединенной массы для сферических пузырьков. Коэффициент вязкого сопротивления для поступательных колебаний пузырьков определим по диссипативным потерям в тонком пограничном слое ($\delta \ll a$) на поверхности пузырьков $\xi_1 = 6\pi\eta \frac{a^2}{\delta(1 - \varphi)^2}$ [12].

Уравнение поступательного движения пузырька с изменяющейся присоединенной массой в колеблющейся среде имеет вид [21–22]

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2a}\right) \frac{dW}{dt} - \frac{3}{2a} W \frac{d\varepsilon}{dt} + 2h_1 W = \frac{1}{\gamma_0} \frac{dU}{dt}, \quad (3)$$

где $W = V - U$ – относительная скорость пузырьков, V, U – абсолютные колебательные скорости пузырьков и среды, $2h_1 = \xi_1/m_1$. Правая часть уравнения (3) характеризует выталкивающую силу, действующую на пузырьки в результате ускоренного движения среды.

Рассмотрим теперь сфероидальные колебания пузырьков, обусловленные их поступательными колебаниями. Давление на поверхности пузырька находится из уравнения Бернулли $P(a, \theta) = \frac{\rho}{2}(W^2 - u^2(a, \theta))$, где локальная скорость на поверхности пузырька в полярной системе координат (r, θ) определяется как $u(a, \theta) = \frac{3W \sin\theta}{2(1 - \varphi)}$, а соответствующее распределение давления выражается формулой $P(a, \theta) = \frac{\rho W^2}{2} \left[1 - \frac{9 \sin^2\theta}{4(1 - \varphi)^2}\right]$, которую мы представим в виде двух составляющих $P(a, \theta, t) = P_0(t) + P_2(t)Y_2(\cos\theta)$. Учитывая только составляющую $P_2(t)Y_2(\cos\theta)$, уравнение вынужденных сфероидальных колебаний пузырька, как упругой сферической оболочки, запишем в виде

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2h_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega_2^2 \varepsilon = -\frac{9W^2}{4a(1 - \varphi)^2}, \quad (4)$$

где $2h_2 = \xi_2/m_2$, $m_2 = \rho a/3$, $\xi_2 \approx \frac{25\eta}{6\delta}$ – поверхностная присоединенная масса и коэффициент вязкого сопротивления, соответствующие сфероидальным колебаниям пузырька.

Задав движение среды в виде $U(t) = U_0 \sin \omega t$, и принимая в нулевом приближении $W(t) = \frac{1}{\gamma_0} U_0 \sin \omega t$, что соответствует решению уравнения (3) для недеформируемых сферических пузырьков в идеальной жидкости, решение уравнения (4) отыскиваем в виде $\varepsilon(t) = \varepsilon^0 + \varepsilon' \cos 2\omega t + \varepsilon'' \sin 2\omega t$. В результате для постоянной составляющей сфероидальной деформации ε^0 , а также для дисперсионной и диссипативной амплитуд

сфероидальных колебаний пузырьков $\varepsilon', \varepsilon''$, получим

$$\varepsilon^0 = -\frac{f_0}{\omega_2^2}, \quad \varepsilon' = \frac{f_0(\omega_2^2 - 4\omega^2)}{\left[(\omega_2^2 - 4\omega^2)^2 + (4\omega h_2)^2 \right]}, \quad (5)$$

$$\varepsilon'' = \frac{4f_0\omega h_2}{\left[(\omega_2^2 - 4\omega^2)^2 + (4\omega h_2)^2 \right]},$$

где $f_0 = \frac{9}{2a} \left(\frac{U_0}{1+2\varphi} \right)^2$.

Далее, отыскивая решение уравнения (3) с учетом (5) в виде $W(t) = W_0' \sin \omega t + W_0'' \cos \omega t$, получим соотношения, определяющие кинематику поступательных колебаний пузырьков и эффективные динамические свойства пузырьковой среды

$$\frac{W_0'}{U_0} \approx \frac{1}{\gamma_0} \frac{1 - \frac{3}{4a}(2\varepsilon^0 + \varepsilon')}{1 - \frac{3\varepsilon^0}{a} + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2}, \quad \frac{W_0''}{U_0} \approx \frac{1}{\gamma_0} \frac{\frac{2h_1}{\omega} + \frac{3\varepsilon''}{4a}}{1 - \frac{3\varepsilon^0}{a} + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2}. \quad (6)$$

Используя эти соотношения, получим зависимости для эффективной динамической плотности ρ^* и трансляционной вязкости η^* пузырьковой среды, в которой пузырьки совершают сфероидально-поступательные колебания. Отметим, что использование эффективных динамических свойств позволяет уравнение динамики поступательных колебаний дисперсной среды под действием осциллирующего градиента давления записать в виде [12]

$$\rho^* \dot{U} + \eta^* U = -\nabla P.$$

Эффективная динамическая плотность соотнесена со скоростью геометрического центра единичного объема пузырьковой среды U . Поскольку импульс единичного объема может быть записан как произведение плотности смеси на скорость его центра масс, или как произведение динамической плотности на скорость его геометрического центра, т.е. $\rho_{mix} U_{mc} = \rho^* U$, то, зная соотношение скоростей U , V и U_{mc} , можно найти динамическую плотность ρ^* . Кроме того, скорость центра масс U_{mc} связана со скоростью геометрического центра U и с абсолютной скоростью пузырьков V соотношением

$$U_{mc}(1 - \varphi) = U - V\varphi,$$

вытекающим из определения статического момента масс системы жидкость-пузырьки. В случае вязкой жидкости должна быть взята дисперсионная, т.е. действительная часть скорости пузырь-

ков $V_0' = U_0 + W_0'$. Таким образом, записав равенство

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{U_0 - V_0'\varphi}{U_0} = 1 - \varphi - \frac{W_0'}{U_0}\varphi,$$

и подставив в него первую формулу (6), получим резонансную зависимость динамической плотности от параметров сфероидальных колебаний пузырьков [21]

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 - \varphi - \frac{\varphi}{\gamma_0} \left[\frac{1 - \frac{3}{4a}(2\varepsilon^0 + \varepsilon')}{1 - \frac{3\varepsilon^0}{a} + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2} \right]. \quad (7)$$

Если сфероидальной деформации пузырьков нет, то резонансная зависимость динамической плотности (7) исчезает, и остается только релаксационная зависимость

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 - \varphi - \frac{\varphi}{\gamma_0 \left[1 + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2 \right]}, \quad (8)$$

дающая в высокочастотном пределе формулу (1), а в низкочастотном пределе — формулу для истинной плотности смеси $\rho^* = \rho_{mix} = \rho(1 - \varphi)$. Для наглядности, резонансную зависимость (7) для идеальной среды без диссипации можно представить в виде следующей простой формулы

$$\frac{\rho^*}{\rho} \approx \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)_0 + \left(\frac{A}{a} \right)^2 \frac{(2\omega/\omega_2)^2 \varphi}{1 - (2\omega/\omega_2)^2}, \quad (9)$$

где первое слагаемое описывает динамическую плотность идеальной среды с недеформируемыми сферическими пузырьками $(\rho^*/\rho)_0 = (1 - \varphi)/(1 + 2\varphi)$, а второе слагаемое отражает резонансную зависимость динамической плотности на частоте, равной половине собственной частоты сфероидальных колебаний пузырьков ω_2 . Отметим здесь, что резонансный член в (9) квадратично зависит от амплитуды колебаний среды ($A = U_0/\omega$).

Трансляционная вязкость определяется мнимой частью относительной скорости пузырьков и выражается следующей формулой [21]

$$\eta^* = \rho\varphi\omega \frac{W_0''}{U_0} = \frac{\rho\varphi\omega}{\gamma_0} \frac{\frac{2h_1}{\omega} + \frac{3\varepsilon''}{4a}}{1 - \frac{3\varepsilon^0}{a} + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2}. \quad (10)$$

В случае недеформируемых сферических пузырьков резонансные члены в (10) исчезают, и

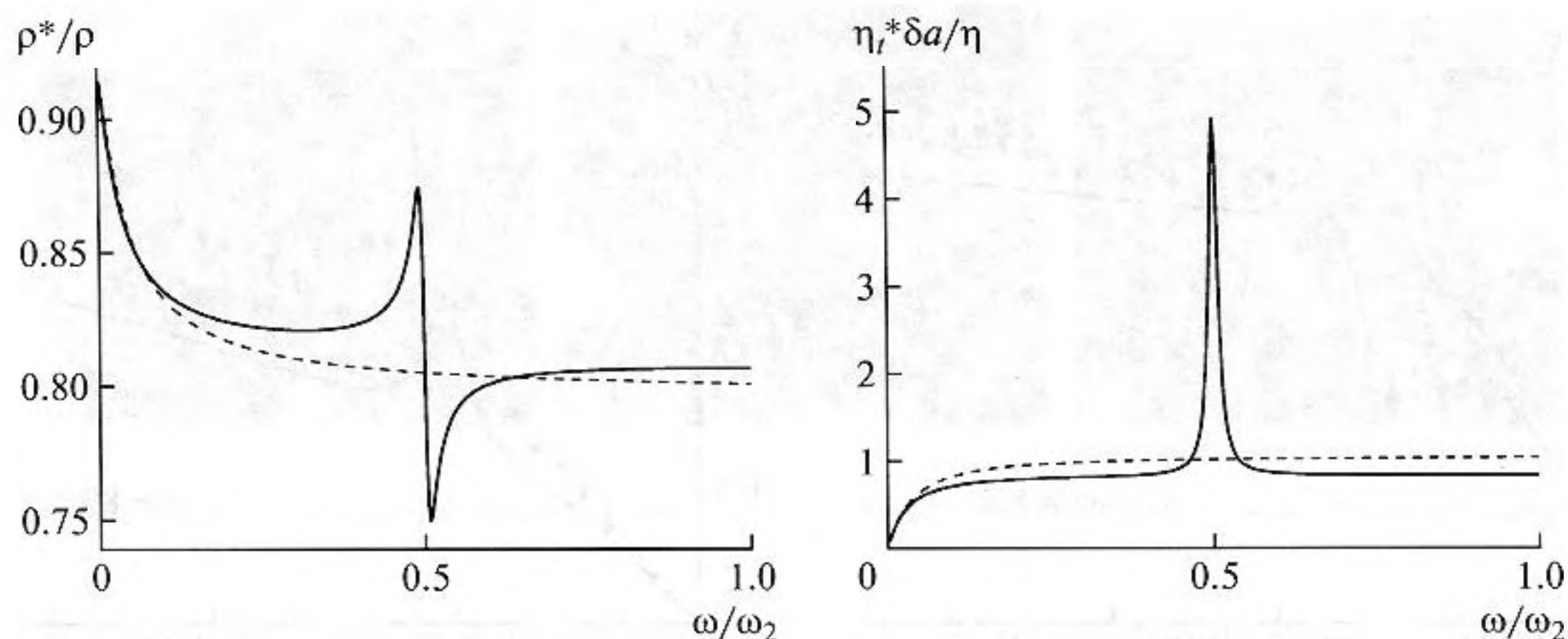


Рис. 1. Резонансные зависимости динамической плотности и трансляционной вязкости пузырьковой среды при сфероидально-поступательных колебаниях пузырьков (сплошные линии). Пунктирные линии – релаксационные зависимости для среды с недеформируемыми сферическими пузырьками ($\varphi = 0.08$; $2h_1/\omega = 0.1$).

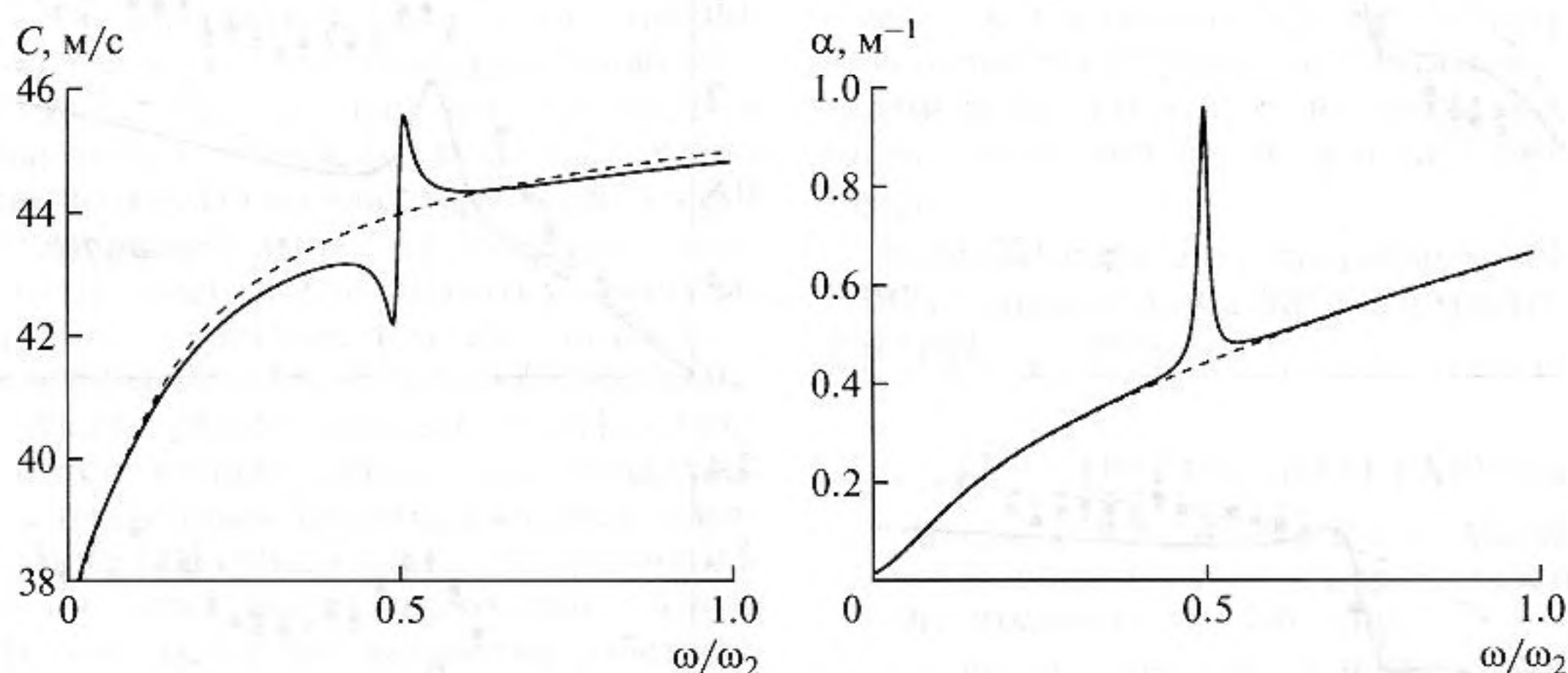


Рис. 2. Резонансная дисперсия и затухание звука в газожидкостной среде при сфероидальных колебаниях пузырьков (сплошные линии) на фоне релаксационной дисперсии в среде со сферическими пузырьками (пунктирные линии).

формула для трансляционной вязкости принимает вид

$$\eta_0^* = \frac{\rho\varphi\omega}{\gamma_0} \frac{2h_1}{1 + \left(\frac{2h_1}{\omega}\right)^2} \quad (11)$$

В случае малого затухания ($h_1 \ll \omega$) формула (11) принимает вид (2). Формулу (10) можно представить в форме, более наглядно иллюстрирующей резонансную зависимость трансляционной вязкости от частоты (кроме случая $\omega_2 = 2\omega$)

$$\eta^* \approx \eta_0^* \left\{ 1 + \left(\frac{A}{a}\right)^2 \frac{(2\omega/\omega_2)^4}{[1 - (2\omega/\omega_2)^2]^2} \right\}$$

На рис. 1. представлены резонансные зависимости динамической плотности (7) и трансляци-

онной вязкости (10) на фоне релаксационных зависимостей (8) и (11).

Фазовая скорость звука в газожидкостной пузырьковой среде при малом затухании определяется эффективной квазистатической сжимаемостью $\beta^* = \frac{1-\varphi}{\rho C^2} + \frac{\varphi}{\rho_1 C_1^2}$, где C, C_1 – скорость звука в жидкости и в газе, и динамической плотностью (7)

$$C^* = (\beta^* \rho^*)^{-1/2}$$

Коэффициент затухания звука в значительной мере определяется трансляционной вязкостью (10) и может быть вычислен по формуле

$$\alpha = \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{\beta^*}{\rho^*}} + \alpha_{h,s}(\omega),$$

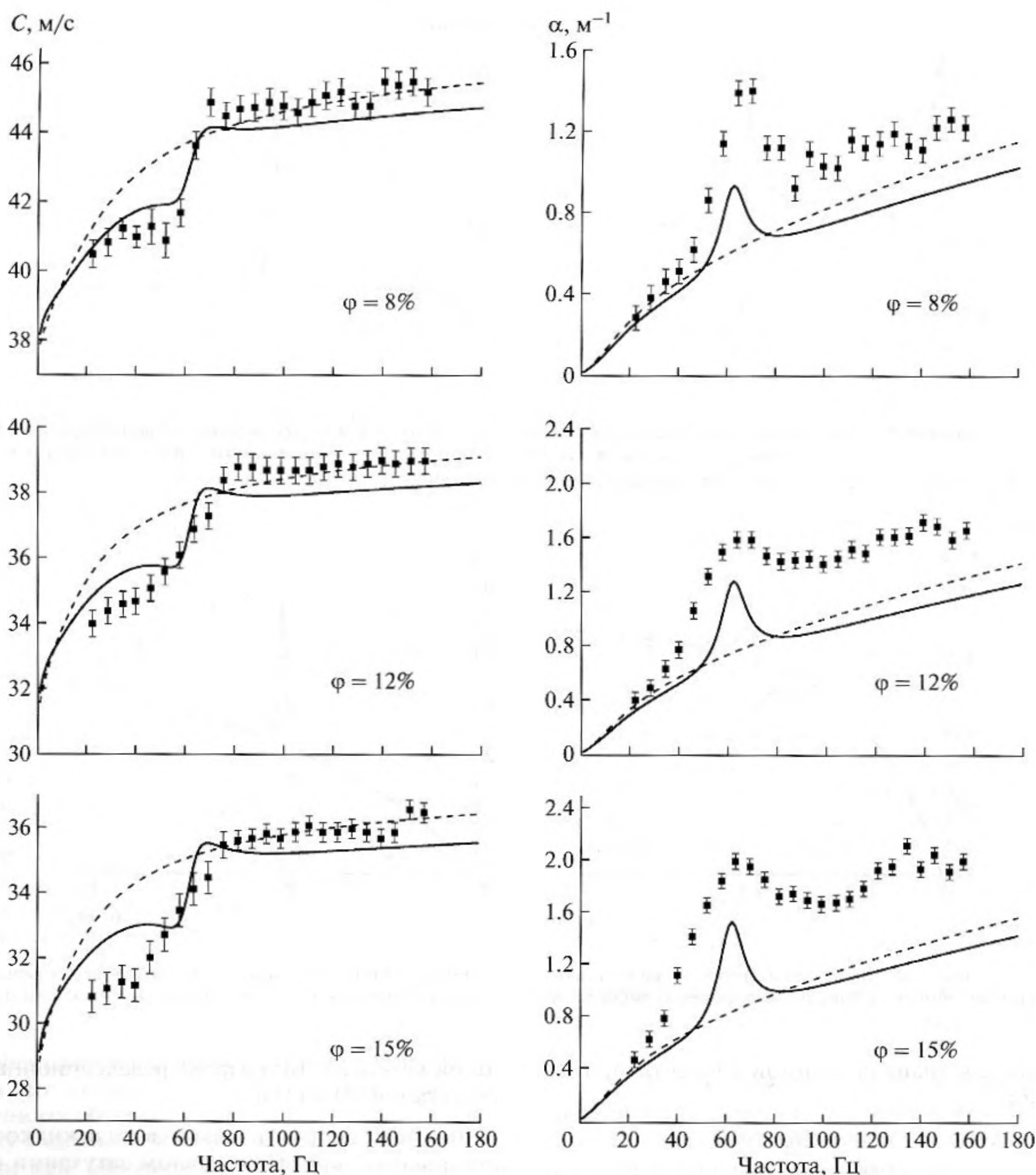


Рис. 3. Скорость и коэффициент затухания звука в пузырьковых средах (сплошные линии — теория, точки — экспериментальные данные).

где второе слагаемое $\alpha_{h,s}(\omega)$ учитывает тепловые потери и рассеяние звука на пузырьках [2, 17]. Полученные таким образом зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания звука от частоты, представлены на рис. 2.

Из представленной теории следует, что резонансные максимумы фазовой скорости и коэффициента затухания звука на половинной частоте сфероидальных колебаний пузырьков квадратично зависят от амплитуды волны и вырождаются

при малых интенсивностях. По-видимому, вследствие этого низкочастотная резонансная дисперсия звука в пузырьковой среде в известных экспериментальных исследованиях [18–20] не была обнаружена.

Для проверки представленной теории низкочастотной дисперсии звука авторами были проведены эксперименты на газожидкостной пузырьковой среде [21–23]. Опыты проводились в вертикальной стеклянной трубе диаметром 50 мм и

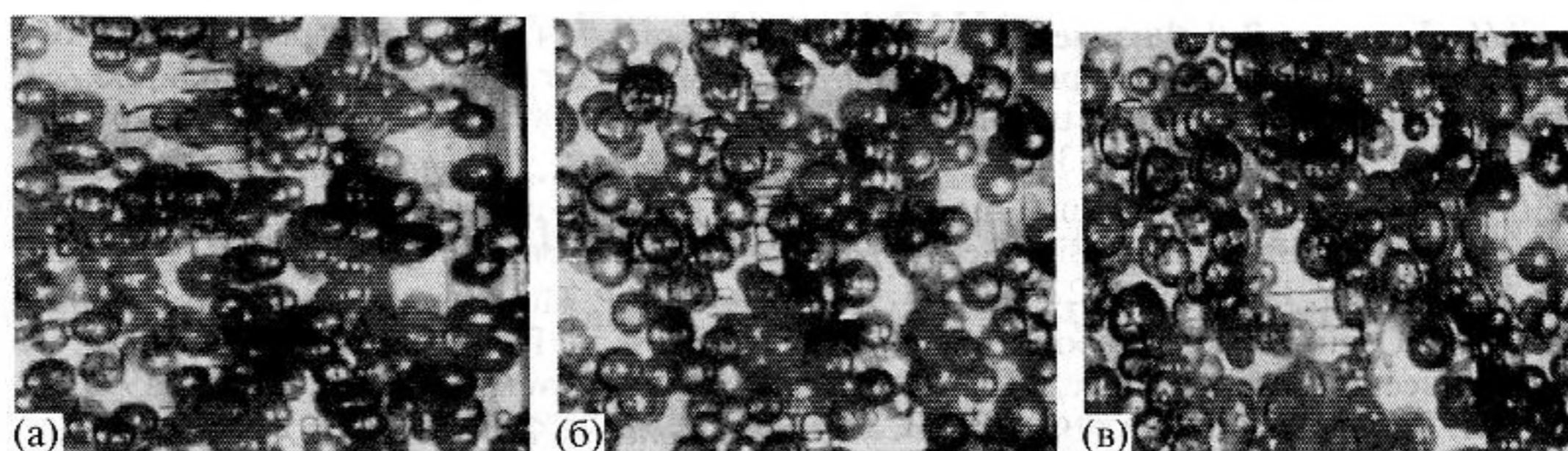


Рис. 4. Форма пузырьков в различных фазах звуковой волны в области низкочастотной резонансной дисперсии звука.

высотой 3 м. В водный спиртовой раствор через специальное устройство с множеством капилляров вводились пузырьки азота радиусом примерно 1 мм. Объемное газосодержание в смеси определялось объемным методом. Поршень с капиллярами, герметично связанный через резиновую мембрану с нижним основанием трубы, приводился в колебательное движение с помощью вибратора. При определенных частотах колебаний в столбе пузырьковой смеси создавалась стоячая акустическая волна. Из полученных экспериментально распределений амплитуд пульсаций давления по высоте смеси при различных уровнях заполнения трубы газожидкостной средой определялась скорость распространения и коэффициент затухания звука на различных частотах. Полученные экспериментальные данные для пузырьковой среды с различным газосодержанием представлены на рис. 3. Из рис. 3 видно, что резонансная дисперсия звука имеет место при частоте около 60 Гц, что составляет половину собственной частоты 120 Гц сфероидальных колебаний пузырьков радиусом 1 мм.

Для иллюстрации процесса резонансных сфероидальных колебаний пузырьков в стоячей акустической волне, играющего основную роль в механизме низкочастотной резонансной дисперсии звука, на рис. 4 приведены фотографии, полученные в разных фазах звуковой волны при частоте воздействия 60 Гц. Видно, что пузырьки изменяют свою форму от сплюснутых (а) до вытянутых (в) в вертикальном направлении эллипсоидов. В некоторый промежуточный момент (б) пузырьки становятся сферическими.

Таким образом, теория, основанная на концепции эффективных динамических свойств, предсказывает новый эффект низкочастотной резонансной дисперсии звука в газожидкостных пузырьковых средах, обусловленный связанными сфероидально-поступательными колебаниями пузырьков. Механизм дисперсии звука этого типа отличается от механизма известной резонансной дисперсии, обусловленной объемными осцилляциями пузырьков. Если высокочастотная дисперсия звука обусловлена резонансной сжимаемо-

стью среды со сферическими пузырьками, то эффект низкочастотной дисперсии обусловлен резонансной зависимостью эффективной динамической плотности среды, в которой пузырьки совершают сфероидально-поступательные колебания. Представленные экспериментальные данные по скорости и коэффициенту затухания звука в пузырьковых средах согласуются с теоретическими результатами, и подтверждают существование низкочастотной резонансной дисперсии звука.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-02-96720) и гранта президента РФ НШ-315.2008.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
2. Leighton T.J. The acoustic Bubble. London: Academic Press Limited. 1994. 613 p.
3. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Распространение стационарных звуковых волн в пузырьковых средах // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 690–698.
4. Зозуля О.М., Рыбак С.А. Стационарные нелинейные волны в среде с резонансной дисперсией. Случай малой диссипации // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 794–799.
5. Динамика пузырьков и аэрозолей. Казань: КГУ, 2003. 308 с.
6. Максимов А.О. Симметрия уравнения Релея и анализ нелинейных пульсаций газовых пузырьков в жидкости // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 805–812.
7. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Влияние распределения пузырьков по размерам на распространение звука в средах с резонансной дисперсией // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 6. С. 730–736.
8. Gaunaurd G.C., Uberal H. Resonance theory of bubbly liquids // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. № 2. P. 362–373.
9. Чабан И.А. Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 1. С. 102–109.

10. *Викторова Р.Н., Тюткин В.В.* Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
11. *Williams K.L.* An effective density fluid model for acoustic propagation in sediment from Biot theory // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. № 5. P. 2276–2281.
12. *Федотовский В.С.* О динамике гетерогенных сред при виброакустических воздействиях // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань. 2002. Т. 16. С. 75–91.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
14. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Эллипсоидальные колебания газового пузырька при периодическом изменении давления окружающей жидкости // МЖГ. 2005. № 5. С. 45–52.
15. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю.* Затухание начального искажения сферической формы пузырька // Сб. Динамика газовых пузырьков и аэрозолей. Казань: КГУ. 2003. С. 66–94.
16. *Asaki T.J., Marston P.L.* The effects of a soluble surfactant on quadrupole shape oscillation of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. № 6. P. 3372–3377.
17. *Crum L.A.* The polytropic exponent of gas contained within air bubbles pulsating in liquid // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 1. P. 116–120.
18. *Huang F., Takahashi M., Guo L.* Pressure wave propagation in air-water bubbly and slug flow // Progress in nuclear Energy. 2005. V. 47. P. 648–655.
19. *Hall P.* The Propagation of pressure Waves and Critical Flow in Two-Phase Mixtures: Ph.D. Thesis, Heriot-Watt University. Edinburg, U.K. 1971.
20. *Lahey R.T.Jr., Drew D.A.* The analysis of two-phase flow and heat transfer using a multidimensional, for field, two-fluid model // Nuclear Engineering and Design. 2001. V. 204. P. 29–31.
21. *Верещагина Т.Н., Федотовский В.С.* Низкочастотная резонансная дисперсия звука в пузырьковых средах // Сб. трудов XIX сессии РАО. Н. Новгород, 2007. Т. 1. С. 63–68.
22. *Fedotovskiy V.S., Verestchagina T.N., Derbenev A.V.* Experimental Research of Resonance Sound Dispersion in Bubbly Media // Fluxes and structures in fluids-2005. Selected papers // IPM RAS. Moscow. 2006. P. 112–118.
23. *Федотовский В.С., Верещагина Т.Н.* Низкочастотная резонансная дисперсия звука в пузырьковых средах. Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 14. № 3. С. 445–448.