

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 584.28

ПОГЛОЩЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН ЛИНЕЙНЫМИ СТРУКТУРАМИ

© 2010 г. В. В. Арабаджи

Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46
E-mail: v.arab@hydro.appl.sci-nnov.ru
Поступила в редакцию 15.02.10 г.

Аналитически и численно исследуется эффект резонансного поглощения длинных волн малогабаритными осцилляторами. Эффект заключается в том, что сечение поглощения осциллятора (монополя, диполя и т.д.) определяется длиной поглощаемой волны и не зависит от волновых размеров осциллятора при их стремлении к нулю. Найдено выражение для оптимальных амплитуд возбуждения группы осцилляторов произвольных волновых размеров в краевой задаче общего вида в терминах обобщенных скоростей и обобщенных сил. На примерах линейных структур (составленных из монополей, эквидистантно расположенных на оси) исследуются возможности получить наибольшее сечение поглощения звука такими структурами при сохранении ими малых волновых размеров. Рассмотрены примеры линейных структур, обеспечивающих неограниченный логарифмический, линейный и квадратичный рост сечения суммарного поглощения с ростом числа составляющих их монополей при сколь угодно малых волновых размерах поглощающей структуры. Рассмотрены также особенности кооперативной и индивидуальной стратегии поглощающих осцилляторов. Полученные результаты могут быть сформулированы для волн различной физической природы.

ВВЕДЕНИЕ

Поглощение, наряду с компенсацией, представляет один из основных физических механизмов пассивного и активного гашения волн (в частности – звуковых [1–9]). Благодаря специфическому соотношению зависимости приемных, излучательных и рассеивательных характеристик антенн при стремлении их волновых размеров к нулю их максимальное сечение поглощения не зависит от волновых размеров и определяется длиной волны и коэффициентом направленного действия антенны [10–13].

В книге С. Щелкунова и Г. Фрииса [14] впервые была сформулирована идея построения мультипольной электромагнитной антенны, которая обеспечивает неограниченный рост сечения поглощения (вместе с неограниченным сужением диаграммы направленности) при неограниченном увеличении порядка мультипольности. Такие сверхнаправленные антенны (с мощными реактивными полями) использовались еще в 60-х годах прошлого века, но тогда применение их было ограничено уровнем технологий (недостаточная точность синтеза геометрии антенны, диссипация в волноведущих средах, низкое отношение сигнал-шум электронных компонентов антенных устройств). В настоящее время технологические возможности создания сверхнаправленных антенн значительно повысились. Например, акустические суперлинзы из метаматериалов [15] сканируют исследуемые объекты своим ближним (реактивным) полем, в котором присутству-

ют высокие пространственные частоты, что и обуславливает сверхразрешение таких линз.

Цель данной работы – исследовать возможности поглощения максимальной мощности падающей звуковой волны системой монополей с минимальными общими волновыми размерами и минимальным числом элементов. Мультипольный излучатель звуковых и многих других волн (электромагнитных волн, волн на воде и т.д.), описываемых линейным волновым уравнением, является классическим объектом и хорошо изучен. Сравнительно недавно были рассмотрены характеристики подобных излучателей и в режиме активного и резонансного поглощения [3, 9, 10], когда взаимодействуют приемные, излучательные, рассеивательные и поглощательные характеристики антенн. Источник же одностороннего излучения (см. ниже) на основе мультиполей не рассматривался вообще, хотя и имеет ряд принципиальных отличий от мультиполя в задачах излучения и поглощения.

МУЛЬТИПОЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК

Основным структурообразующим элементом мультипольного источника (МИ) является пульсирующая сфера радиуса a с фиксированным центром (или монополь). Звуковое поле такой сферы описывается следующими выражениями

$$\begin{aligned} p &= i(\omega\rho V_0 a^2) r^{-1} \exp(-ikr), \\ v &= (V_0 a^2) r^{-2} \exp(-ikr) + i(V_0 a^2 k) r^{-1} \exp(-ikr), \end{aligned} \quad (1)$$

где p — звуковое давление, а v — радиальная скорость на расстоянии r от центра сферы, V_0 — комплексная амплитуда скорости пульсации поверхности сферы, ω — угловая частота, k — волновое число. Пренебрегая ближним полем скорости, получим

$$v = i(V_0 a^2 k) r^{-1} \exp(-ikr). \quad (2)$$

Поле давления и колебательной скорости в падающей волне определим как

$$\begin{aligned} p_E &= \rho c V_E \exp(+ikr \cos \vartheta) \\ \text{и } v_E &= V_E \cos \vartheta \exp(+ikr \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (3)$$

а сечение поглощения монополя (с порядком мультипольности $N = 1$) или структуры (с порядком мультипольности $N \geq 1$) выражением

$$\sigma_{M,N} = W_{M,N}/S_E, \quad (4)$$

где $W_{M,N}$ — мощность, поглощаемая структурой, $S_E = \rho c |V_E|^2 / 2$ — плотность потока мощности в падающей волне, V_E — комплексная амплитуда колебательной скорости в падающей волне, ϑ — угол между направлением распространения падающей волны и осью “ x ”. Акустический монополь, как известно, имеет максимальное (резонансное) сечение поглощения $\sigma_0 = \lambda^2 / 4\pi$.

Структура линейного МИ представляет цепочку $n = N_M = 2^N$ монополей (пульсирующих сфер с радиусом a) длиной

$$L_{M,N} = 2(2^N - 1)h, \quad (5)$$

эквидистантно расположенных на оси “ x ” с периодом $h \gg a$: (при $N = 1$) 2 монополя с амплитудами $(-1, +1)V_0$ в точках $x = -h, +h$, (при $N = 2$) 4 монополя с амплитудами $(+1, -1, -1, +1)V_0$ в точках $x = -3h, -h, +h, +3h$, (при $N = 3$) 8 монополей с амплитудами $(-1, +1, +1, -1, +1, -1, -1, +1)V_0$ в точках $x = -7h, -5h, -3h, -h, +h, +3h, +5h, +7h$ и т.д. В конечноразностном представлении структура линейного мультиполя N -го порядка соответствует N -й пространственной производной поля по оси “ x ”. При $kh \ll 1$ поля давления $p_{M,N}$ и скорости $v_{M,N}$ мультиполя связаны с соответствующими полями $p(r)$ и $v(r)$ монополя выражениями:

$$\begin{aligned} p_{M,N} &= i^N 2^{(3N/2)+(N^2/2)} (kh)^N (\cos \vartheta)^N p(r), \\ v_{M,N} &= i^N 2^{(3N/2)+(N^2/2)} (kh)^N (\cos \vartheta)^N v(r), \end{aligned} \quad (6)$$

где r — расстояние от точки наблюдения до точки $x = 0$ на оси мультиполя, при

$$ka \ll L_M k \ll 1. \quad (7)$$

Рассматривая поток мощности через сферу, окружающую МИ, получим, что максимум сечения

$$\sigma_{M,N} = (2N + 1)(\lambda^2 / 4\pi) \quad (8)$$

поглощения МИ достигается при комплексной амплитуде $V_0 = V_{M,N}$ с модулем

$$|V_{M,N}| = (2N + 1)(ka)^{-2} (kh)^{-N} 2^{-\left(1 + \frac{3N}{2} + \frac{1}{2}N^2\right)} |V_E| \quad (9)$$

и аргументом

$$\arg(V_{M,N}) = \arg(V_E) - N(\pi/2). \quad (10)$$

МУЛЬТИПОЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК ОДНОСТОРОННЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ (МИОИ)

Теперь сформируем из двух мультиполей порядка N структуру мультипольного источника одностороннего излучения (МИОИ) длиной

$$L_{H,N} = 2L_{M,N} + 2h, \quad (11)$$

представляющую собой также эквидистантно расположенные на оси “ x ” пульсирующие сферы общим числом $n = N_H = 2^{N+1}$. Комплексные амплитуды V_0 левого мультиполя МИОИ преобразуются в $V_0 \exp(ikL_{H,N}/2)$, а амплитуды V_0 правого мультиполя МИОИ преобразуются в $-V_0 \exp(-ikL_{H,N}/2)$. Таким образом, поле давления $p_{H,N}(\mathbf{r})$ МИОИ в точке \mathbf{r} связано с полем $p_{M,N}(\mathbf{r})$ монополя соотношением

$$\begin{aligned} p_{H,N}(\mathbf{r}) &= +p_{M,N}[\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(L_{H,N}/2)] \exp(+ikL_{H,N}/2) - \\ &- p_{M,N}[\mathbf{r} + \mathbf{x}_0(L_{H,N}/2)] \exp(-ikL_{H,N}/2), \end{aligned} \quad (12)$$

где \mathbf{x}_0 — орт оси “ x ”. А при

$$ka \ll L_H k \ll 1 \quad (13)$$

поля давления и скорости $p_{H,N}$, $v_{H,N}$ МИОИ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{H,N}(r, \vartheta) &\approx (2i) \sin[(k\bar{L}_{H,N}/2)(1 + \cos \vartheta)] p_{M,N}(r, \vartheta) \\ \text{и } v_{H,N}(r, \vartheta) &\approx \\ &\approx (2i) \sin[(k\bar{L}_{H,N}/2)(1 + \cos \vartheta)] v_{M,N}(r, \vartheta), \end{aligned} \quad (14)$$

где ϑ — угол наблюдения относительно оси “ x ”.

При $N = 0$ МИОИ имеет один максимум при $\vartheta = 0$ и один нуль при $\vartheta = \pi$, а при любых $N \geq 1$ нули излучения расположены в направлениях $\vartheta = \pi$ и $\vartheta = \pm\pi/2$. Максимумы поля МИОИ при $N \geq 1$ находятся на направлениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pm\vartheta_B = \pm \arccos[N/(N+1)]$ (рис. 1). Отношение модуля амплитуды поля заднего лепестка диаграммы направленности МИОИ к модулю амплитуды поля главного лепестка нетрудно оценить как $-2^{-1} N^N (N+1)^{-(N+1)}$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) (не зависит от L_H , a , k при выполнении (13)). Задние лепестки

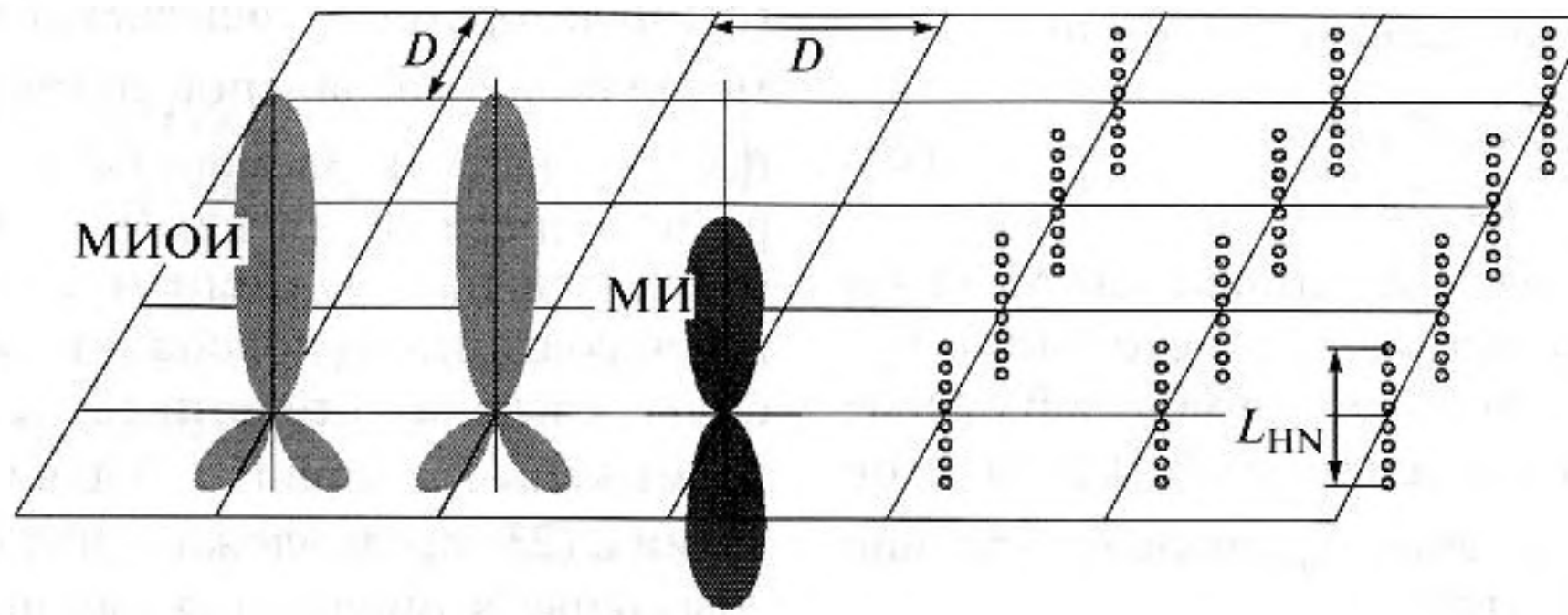


Рис. 1. Решетка невзаимодействующих МИ (или МИОИ) и их диаграммы излучения (рассеяния).

диаграммы направленности излучения МИОИ с ростом N плавно уменьшаются по модулю пропорционально α и отклоняются назад ($\vartheta_1 < \vartheta_2$ при $0 < N_1 < N_2$). При этом как главный лепесток, так и задние лепестки сужаются. Мощность $W_{FH,N}$, излучаемая МИОИ в переднее полупространство, связана с мощностью $W_{BH,N}$, излучаемой в тыльное полупространство; они удовлетворяют соотношению

$$W_{FH,N}/W_{BH,N} = 8N^2 + 16N + 7. \quad (15)$$

Рассматривая поток мощности через сферу, окружающую МИОИ, получим, что максимум сечения поглощения МИОИ

$$\sigma_{H,N} = (2N + 1)(2N + 3)(N + 1)^{-1}(\lambda^2/4\pi) \quad (16)$$

достигается при комплексной амплитуде $V_0 = V_{H,N}$ с модулем

$$|V_{H,N}| = (2N + 1)(2N + 3)(N + 1)^{-1} \times (ka)^{-2}(kh)^{-(N+1)} 2^{-\left(3 + \frac{5}{2}N + \frac{1}{2}N^2\right)} |V_E| \quad (17)$$

и аргументом

$$\arg(V_{H,N}) = \arg(V_E) - (-1)^N(\pi/2). \quad (18)$$

Нетрудно проверить, что на границе области, занимаемой сечением поглощения (в максимуме угловой диаграммы излучения или рассеяния), поле оптимально поглощающего излучателя (например, МИ и МИОИ) превосходит по модулю поле падающей волны, но остается с ним одинаковым по порядку величины. При рассмотрении МИОИ можно заметить, что поглощение происходит только при рассеянии (излучении) МИОИ попутно падающей волне. В случае МИ встречный (по отношению к падающей волне) лепесток диаграммы излучения соответствует только рассеянию (рассеяние назад), а попутный лепесток соответствует рассеянию вперед и поглощению. Отметим также, что при больших волновых раз-

мерах приемной антенны для увеличения ее сечения поглощения обычно развивают (наращивают) антенну в плоскости фронта падающей волны. Но в случае приемника малых волновых размеров для увеличения сечения поглощения нужно развивать его структуру по ходу падающей волны. Из (16) следует, что с ростом порядка мультипольности N сечение поглощения МИОИ также растет пропорционально N . При этом, в отличие от МИ, рассеяние назад у МИОИ практически отсутствует. Такой МИОИ действует как акустически “черное” тело [5] конечных размеров $\sim \sqrt{N\lambda}$, несмотря на малый собственный волновой размер $kL_H \ll 1$.

МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ

Рассмотренные выше МИ и МИОИ обеспечивали рост сечения поглощения пропорционально порядку мультипольности $\sigma_A \sim N$ или, другими словами, логарифму числа n элементов, т.е. $\sigma_A \sim \ln(n)$. Теперь рассмотрим несколько (например, $\bar{n} > 1$) МИ или МИОИ, центры которых расположены на одной плоскости на расстоянии D друг от друга (рис. 1), а оси источников перпендикулярны ей. Таким образом, МИ и МИОИ направлены по отношению друг к другу нулями своих диаграмм направленности излучения, т.е. не взаимодействуют друг с другом. Число элементов (монополь) в такой решетке равно $n = \bar{n}\bar{\bar{n}}$, где $\bar{\bar{n}} = 2^N$ — число элементов, например, в МИ, а N — его порядок мультипольности. При этом общее сечение поглощения равно сумме сечений поглощения отдельных МИ (и МИОИ), т.е.

$$\sigma_A = (n/\bar{n})\sigma_{M,N} \text{ (или } \sigma_A = (n/\bar{n})\sigma_{H,N}). \quad (19)$$

Нужно лишь определить критерий малости взаимодействия МИОИ и МИ с конечными длинами

$L_{M,N}$, $L_{H,N}$ и на конечных расстояниях D друг от друга. Рассмотрим импедансную матрицу

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} Z_{A,A} & Z_{A,B} \\ Z_{B,A} & Z_{B,B} \end{bmatrix} \quad (20)$$

системы, состоящей из двух одинаковых МИ (A и B). Малость взаимодействия двух источников будем характеризовать отношением модулей недиагонального $|Z_{A,B}|$ и диагонального $|Z_{A,A}|$ элементов матрицы $\hat{\mathbf{Z}}$. Тогда получим следующее условие независимости элементов:

$$\begin{aligned} |Z_{A,B}|/|Z_{A,A}| &\approx 2^{N^2} (2^N - 1)^{-2N} \times \\ &\times (kD)^{-N} (kL_{M,N})^{3N} (a/D) \ll 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где предполагается также выполнение неравенства

$$a \ll h < L_{M,N} \ll D \ll \lambda. \quad (22)$$

Условия, аналогичные (21, 22), можно получить и для двух МИОИ. Таким образом, при размещении МИ (или МИОИ), как показано на рис. 1, можно получить линейный рост сечения решетки в виде (19) или $\sigma_A \sim n$. Уменьшение параметров $(kD)^{-N}$, $(kL_{M,N})^{3N}$, (a/D) обеспечивает линейный рост ($\sim n$) суммарного сечения поглощения решетки МИ (МИОИ) при сохранении ее малых волновых размеров.

СТРУКТУРА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Выше мы рассматривали мультипольные излучатели, характеризующиеся, несмотря на довольно сложную структуру, всего лишь одной степенью свободы — комплексной амплитудой V колебательной скорости пульсаций монополей. Оптимальную колебательную скорость [9]

$$V = V_{\text{opt}} = (1/2)E / \text{Re}(Z_{\text{ex}}) \quad (23)$$

такого осциллятора, обеспечивающую максимальную поглощаемую мощность

$$W_{\text{abs}} = (1/8)|E|^2 / \text{Re}(Z_{\text{ex}}) \quad (24)$$

(и рассеиваемую мощность той же величины), можно создать либо активными средствами, либо выполнив два импедансных (резонансных) условия

$$\text{Re}(Z_{\text{ex}}) = \text{Re}(Z_{\text{in}}), \text{Im}(Z_{\text{ex}}) = -\text{Im}(Z_{\text{in}}), \quad (25)$$

где Z_{ex} — импеданс поглощающей микроструктуры в волноведущей среде, Z_{in} — импеданс внутренней нагрузки структуры, E — комплексная амплитуда проекции силы действия падающей волны на колебательную степень свободы заторможенной структуры (т.е., при $V = 0$).

Динамическая система с n степенями свободы (осцилляторами) описывается на частоте ω симметричной импедансной матрицей $\hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}(\omega) = [Z_{\text{ex}}]_{s,t}$ ($[\hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]_{s,t} = [\hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]_{t,s}$). Элемент $[\hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]_{s,t} = F_s/V_t$ такой матрицы определяется как отношение силы, действующей на s -ю степень свободы со стороны поля, созданного колебаниями ℓ -й степени свободы, когда все степени свободы, кроме ℓ -й заторможены (т.е. при $V_s = 0$ для всех $s \neq \ell$). По аналогии с (23) предположим, что вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{opt}}$ оптимальных комплексных амплитуд колебательных скоростей пульсаций монополей, обеспечивающий максимум суммарной поглощаемой мощности, имеет вид [9]

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{opt}} = 2^{-1} [\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]^{-1} \mathbf{E}, \quad (26)$$

где $[\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]^{-1}$ — матрица, обратная по отношению к матрице $\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}} = [\text{Re} Z_{i,j}]$. Покажем, что вектор \mathbf{V}_{opt} действительно оптимальный. Суммарная поглощаемая всеми элементами структуры мощность имеет вид

$$W(\mathbf{E}, \mathbf{V}) = 2^{-1} \text{Re} \{ (\mathbf{V}^*)^T (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}} \mathbf{V}) \}, \quad (27)$$

где $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ — вектор комплексных амплитуд проекций сил действия падающей волны на заторможенные (т.е., при $\mathbf{V} = 0$) колебательные степени свободы структуры, $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ — вектор комплексных амплитуд колебательных скоростей (пульсаций) степеней свободы структуры. Задав “оптимальный” вектор скоростей $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{opt}}$, посмотрим, как изменится поглощаемая мощность. Для приращения поглощаемой мощности W , порожденного произвольным вектором ξ возмущения скоростей, получим выражение

$$\begin{aligned} W(\mathbf{E}; \mathbf{V}_{\text{opt}} + \xi) - W(\mathbf{E}; \mathbf{V}_{\text{opt}}) &= \\ &= -2^{-2} \text{Re} \{ (\xi^*)^T [\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]^{-1} \xi \} \leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Величина $\text{Re} \{ (\xi^*)^T [\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]^{-1} \xi \} \leq 0$ имеет постоянный знак и соответствует излучению, порожденному вектором скоростей ξ в отсутствие падающих волн, откуда следует, что вектор (26) действительно оптимальный и обеспечивает режим максимальной суммарной поглощаемой мощности (МСПМ). Оптимальный вектор амплитуд колебательных скоростей (26) элементов структуры, обеспечивающий максимальную суммарную поглощаемую мощность

$$W_{\text{max}} = 2^{-3} \text{Re} \{ (\mathbf{E}^*)^T [\text{Re} \hat{\mathbf{Z}}_{\text{ex}}]^{-1} \mathbf{E} \} \quad (29)$$

(и суммарную рассеиваемую мощность той же величины), можно создать либо активными сред-

ствами, либо выполнив два импедансных (резонансных) условия

$$\begin{aligned} \text{Im} \hat{Z}_{\text{in}}(\omega) &= -\text{Im} \hat{Z}_{\text{ex}}(\omega), \\ \text{Re} \hat{Z}_{\text{in}}(\omega) &= +\text{Re} \hat{Z}_{\text{ex}}(\omega). \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, для цепочки пульсирующих сфер (монополей) определим элементы $Z_{s,\ell}$ импедансной матрицы \hat{Z} следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{s,s} &= 4\pi a^2 \rho c (k^2 a^2 + ika), \\ Z_{s,\ell} (s \neq \ell) &= 2\pi a^4 \rho c k r_{s,\ell}^{-1} [\sin(kr_{s,\ell}) + i \cos(kr_{s,\ell})], \end{aligned} \quad (31)$$

где $r_{s,\ell} = 2h|s - \ell|$, ($s, \ell = 1, 2, 3, \dots, n$). Вектор $\mathbf{E} = \{E_n\}$ силы действия падающей волны на заторможенные монополи поглощающей структуры состоит из элементов $E_s = 4\pi a^2 \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s)]$. В таблице представлены результаты *вычислений* на основе (26, 27, 29, 31) суммарного относительного сечения $\sigma_{\otimes}/\sigma_0$ поглощения энергии плоской волны, падающей вдоль оси линейной структуры из $n = 1 - 8$ элементов (σ_{\otimes} – сечение поглощения структуры в режиме МСПМ, σ_0 – сечение поглощения одиночного монополя (рис. 2). Полученная зависимость очень близка к $\sigma_{\otimes}/\sigma_0 = n^2$ (это наводит на мысль о возможности аналитического обоснования) и показывает, что в режиме МСПМ (26, 30) все связи монополей со звуковым полем и друг с другом через звуковое поле (т.е. n^2 элементов матрицы \hat{Z}_{ex}) дают одинаковый вклад в общее сечение поглощения.

На рис. 3а,б представлено сечение поглощения структуры в режиме МСПМ как функции угла падения $0 \leq \vartheta < 2\pi$ поглощаемой волны при $kh = 0.2$. В диаграмме МСПМ 2 больших лепестка (передний и задний) и $2(n - 2)$ малых боковых лепестков. Заметим, что угловая диаграмма режима МСПМ не имеет нулей (в отличие от диаграммы рассеяния, см. рис. 5), так как она не может быть меньше сечения поглощения одного монополя, по определению. Из рис. 3а,б, а также из рассмотрения (см. выше) мультипольных источников следует, что рост сечения поглощения структуры всегда сопровождается сужением ее диаграммы направленности излучения (рассеяния) и поглощения. Этот факт сформулирован в классической теории антенн [14] в виде соотношения

$$\sigma_A \approx \lambda^2 / \Omega, \quad (32)$$

Результаты численного моделирования поглощения энергии плоской волны, падающей вдоль (т.е. $\vartheta = 0$) оси структуры из $n = 1-8$ монополей

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_{\otimes}/\sigma_0$	1	3.957	8.888	15.793	24.671	35.521	48.345	63.163

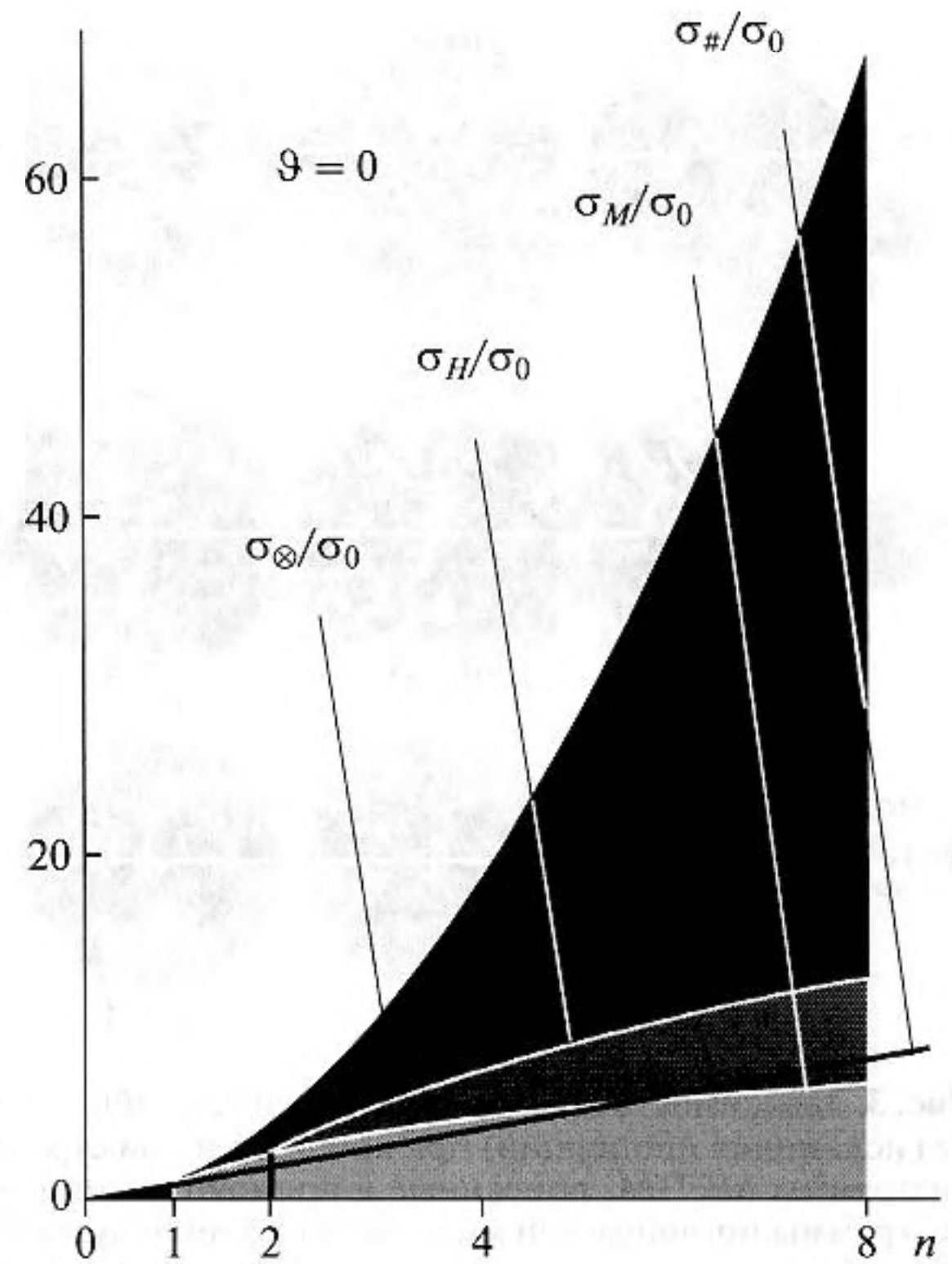


Рис. 2. Сечение поглощения волны, падающей вдоль оси структуры ($\vartheta = 0$) из n монополей: для удаленных друг от друга монополей ($\sigma_{\#}/\sigma_0$), МИ ($\sigma_{M,N}/\sigma_0$) для $n = 2^N$, МИОИ ($\sigma_{H,N}/\sigma_0$) для $n = 2^N$, в режиме МСПМ ($\sigma_{\otimes}/\sigma_0$).

где σ_A – эффективная площадь (апертура) приемной антенны или сечение поглощения, Ω – телесный угол, занимаемый главным лепестком антенны. Отметим также, что формулы (23–30) могут быть применены к любым колебательным системам, включая, например, электрические цепи. Однако зависимость $\sigma_{\otimes}/\sigma_0 = n^2$ является специфическим свойством волновой (в частности – акустической) системы. На рис. 4 представлены характеристики структуры в режиме МСПМ при нормальном ($\vartheta = \pi/2$) падении на нее поглощаемой волны. На рис. 4а представлены осцилляции сечения поглощения при растяжении структуры (увеличении параметра kh), а на рис. 4б – зависимость минимальных и максимальных величин сечения поглощения от количества n элементов структуры при $kh = 0.2$. Рис. 4в представляет ка-

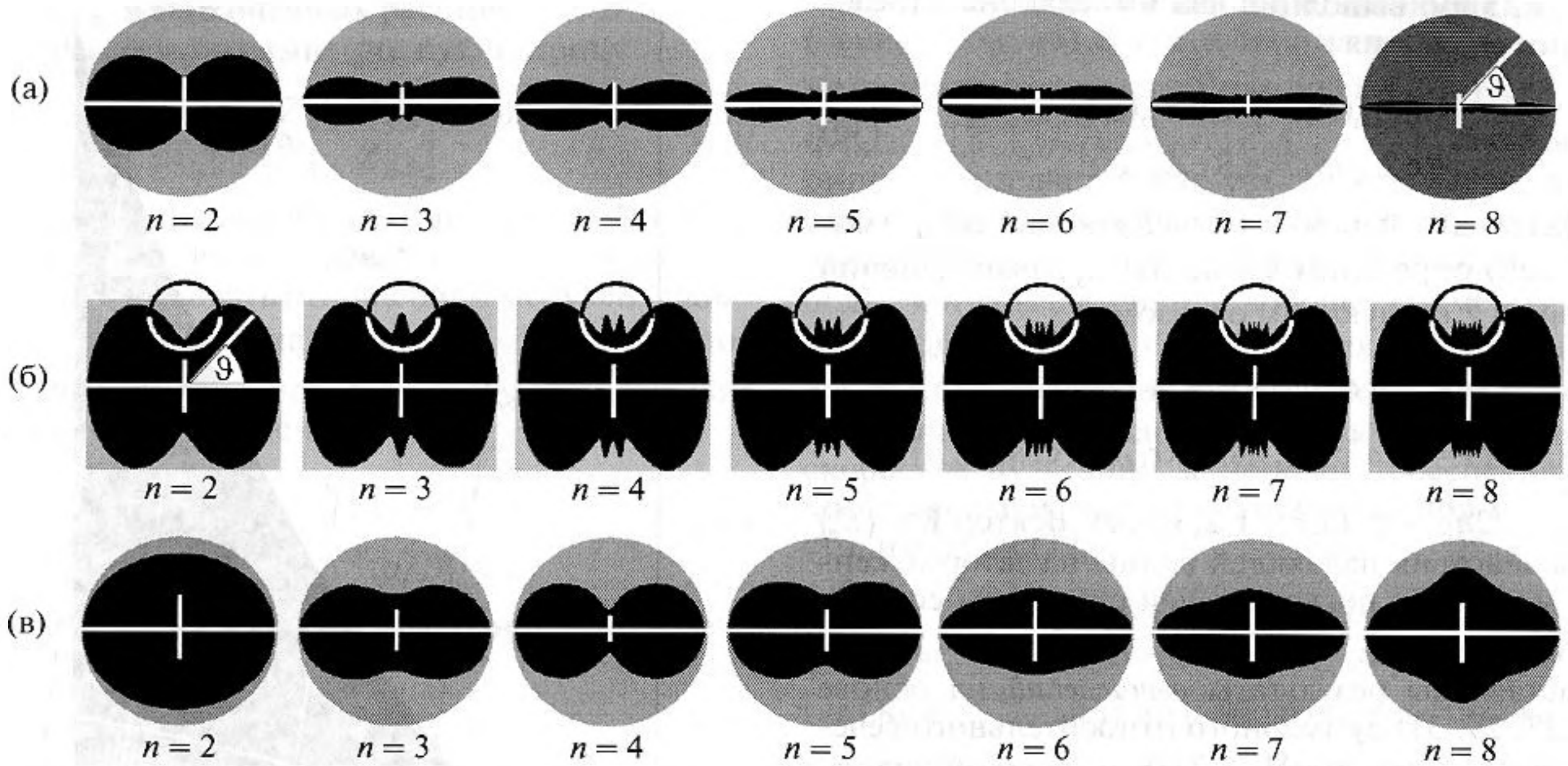


Рис. 3. Зависимость сечения поглощения линейной структуры с n степенями свободы (численное моделирование): (а) без искажения пропорций) при кооперативной стратегии МСПМ (нормированные на максимум при $\vartheta = 0$), (б) те же диаграммы МСПМ, вписанные в прямоугольник с искажением пропорций для выявления боковых лепестков, (в) диаграммы поглощаемой мощности при индивидуальной стратегии осцилляторов.

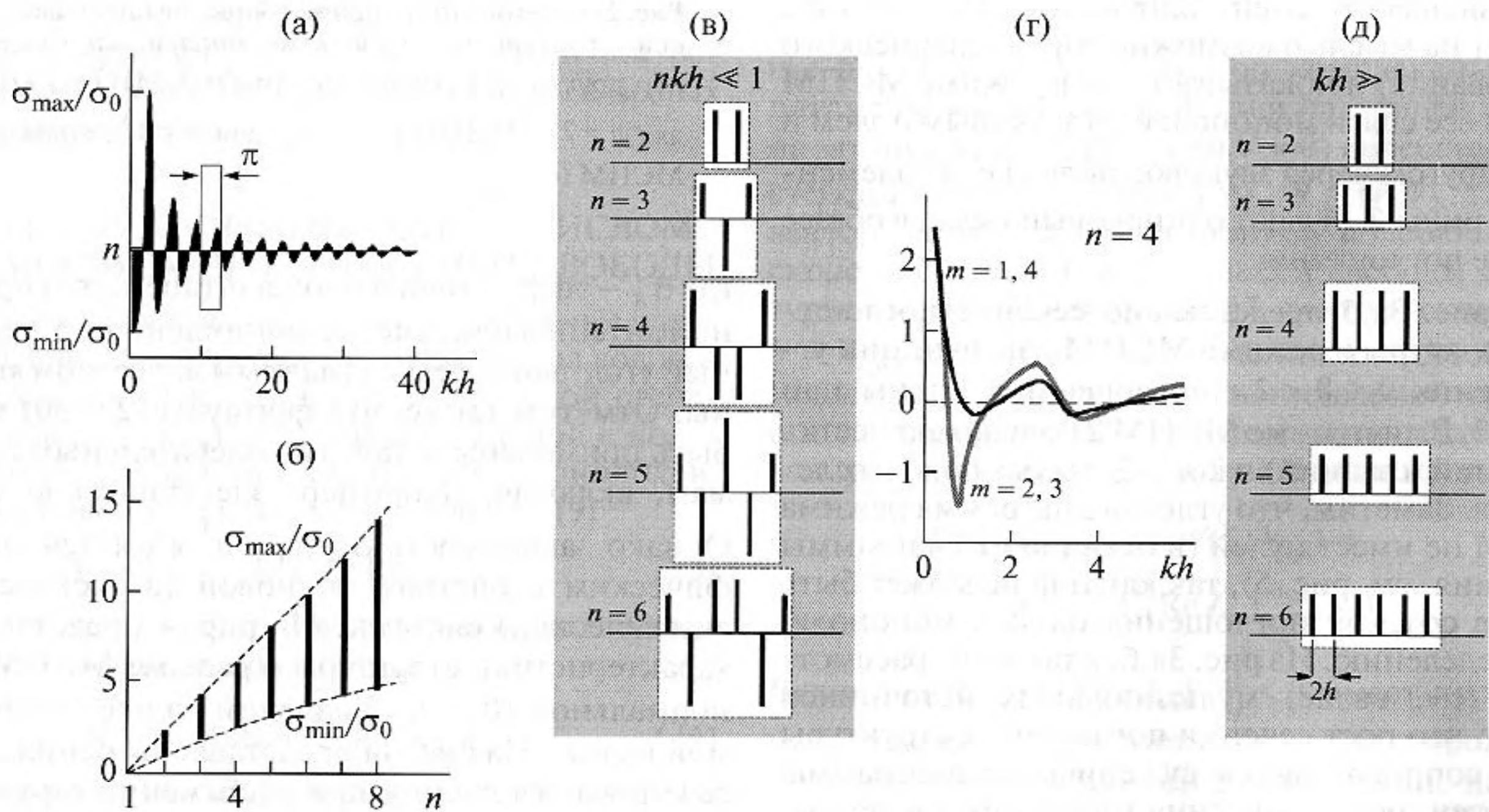


Рис. 4. Характеристики поглощения волны, падающей нормально ($\vartheta = \pi/2$) на линейную поглощающую структуру из n монополей при кооперативной стратегии (т.е. в режиме МСПМ, при численном моделировании): (а) отношение σ/σ_0 как функция волнового размера kh (где σ_0 – максимальное сечение поглощения одиночного монополя); (б) максимальная σ_{\max}/σ_0 и минимальная σ_{\min}/σ_0 величины осцилляций (см. рис. 4,б) сечения поглощения как функция числа n монополей при $kh = 0.2$ (по горизонтали – число элементов в структуре); (в) качественное распределение амплитуд V_m ($m = 1, 2, \dots, n$) монополей при малых волновых размерах $nkh \ll 1$ и числах $n = 2 - 6$ элементов в структуре (по горизонтали – порядковый номер элемента в структуре); (г) пример эволюции амплитуд скоростей в структуре из четырех монополей ($n = 4$) при увеличении волновой длины межэлементного интервала $2kh$ (точнее говоря, эволюция величины $\ln(|V_m|/|V_0|)$ при $m = 1, 2, 3, 4$, где V_0 – оптимальная амплитуда колебательной скорости одиночного монополя); (д) распределение амплитуд V_m монополей качественное при больших величинах $2kh \gg 1$ и числах монополей $n = 1 - 6$ (по горизонтали – порядковый номер элемента в структуре).

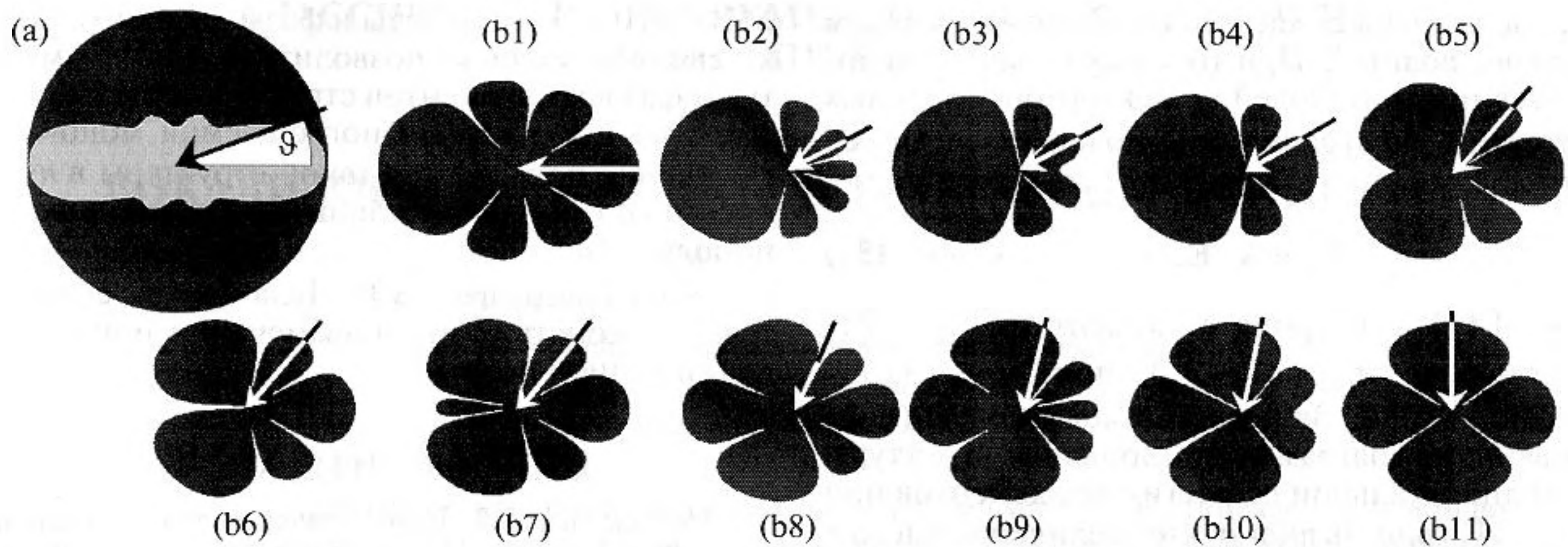


Рис. 5. Зависимость (а) мощности, поглощаемой в режиме (26, 30) четырьмя монополями, от угла ϑ падения поглощаемой волны; угловые диаграммы (b1–b11) мощности рассеиваемой четырьмя монополями в режиме МСПМ (26, 30) при изменении угла падения (стрелки) поглощаемой волны от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi/2$. Все угловые зависимости получены численно и представлены в логарифмическом масштабе.

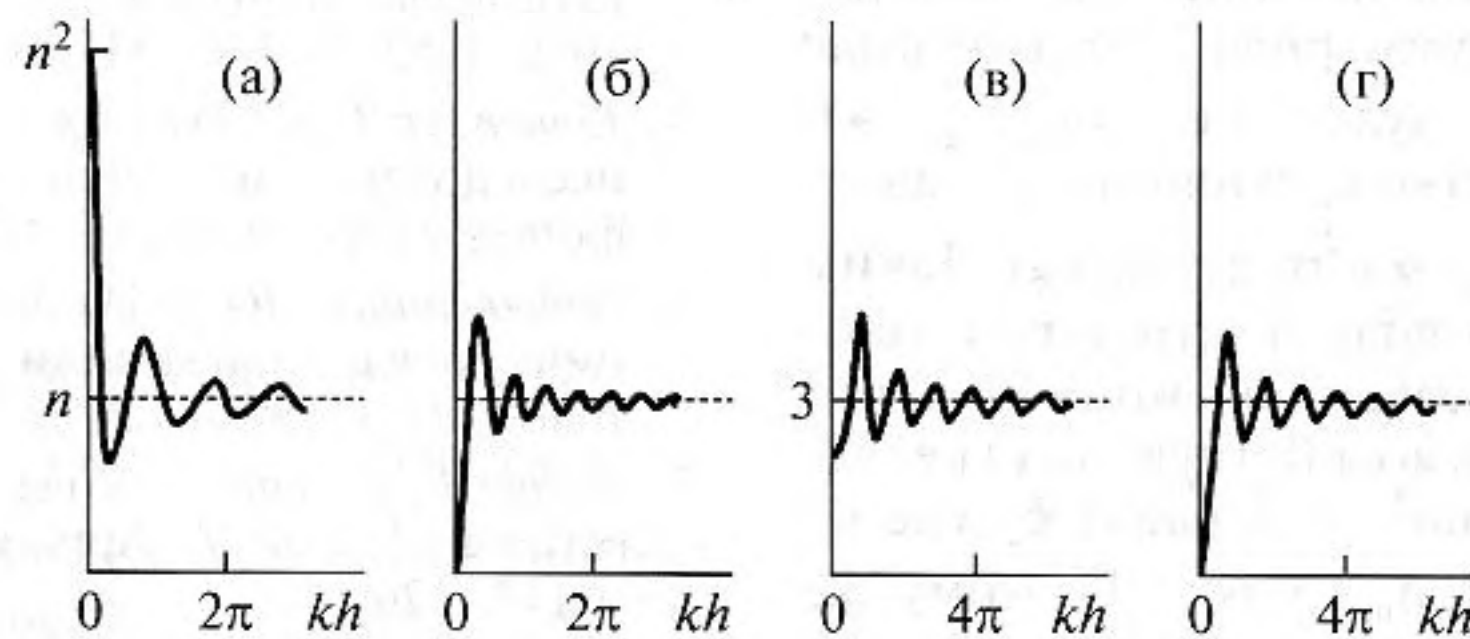


Рис. 6. Пример зависимости суммарного сечения поглощения от волнового размера kh межэлементного интервала при осевом (а, б) и нормальном (в, г) падении волны на линейную систему трех монополей ($n = 3$) в случаях коллективной (режим МСПМ) (а, в) и индивидуальной б, г) стратегий элементов (численное моделирование).

чественную картину распределения амплитуд V_m ($m = 1, 2, \dots, n$) элементов структуры при малых волновых размерах $kh n \ll 1$ и числа монополей $n = 2 - 6$. Для случая $n = 2$ из-за симметрии задачи амплитуды V_m остаются одинаковыми при любых kh , а при $kh \rightarrow 0$ два монополя сливаются в один. При $n > 2$ распределение V_m становится знакопеременным, и при $kh \rightarrow 0$ три (и более) монополя уже никогда не сольются в один. Рис. 4г представляет эволюцию распределения величины $\ln(|V_m|/|V_0|)$ для $m = 1, 2, 3, 4$ (V_0 – оптимальная амплитуда (23) колебательной скорости одиночного монополя) при неограниченном увеличении $kh \rightarrow \infty$. Из рис. 4д видно, что при $kh \rightarrow \infty$ монополи становятся независимыми, и их амплитуды сходятся к (23).

Рис. 5 представляет характеристики рассеяния структуры из четырех монополей в режиме МСПМ. Рассеянным является поле, излучаемое структурой, возбужденной согласно (26) для максимального поглощения заданной волны с углом

падения $0 \leq \vartheta < 2\pi$, но в отсутствие падающих волн. При этом каждой точке на угловой диаграмме поглощения в режиме МСПМ (рис. 5а) соответствует свой вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{opt}}$ комплексных амплитуд пульсационных скоростей монополей и, соответственно, своя диаграмма рассеяния (рис. 5b1–5b11).

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ И КООПЕРАТИВНАЯ СТРАТЕГИИ ПОГЛОЩЕНИЯ

Описанный выше резонанс в системе с произвольным числом n элементов можно назвать коллективным, а стратегию элементов структуры при поглощении мощности падающей волны – кооперативной, когда каждый элемент стремится к максимуму суммарной поглощаемой мощности, а не к максимуму собственного поглощения. При индивидуальной стратегии каждый элемент (монополь) “настраивает” свою скорость пульсаций для максимального поглощения по формуле (26), предполагая, что наружное акустическое поле (за

исключением собственного поля) является полем падающей волны \mathbf{E} . При этом не учитываются поля соседних монополей, а вектор оптимальных скоростей \mathbf{V}_{\oplus} пульсаций монополей определяется формулой

$$\mathbf{V}_{\oplus} = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{E}, \quad (33)$$

где $\hat{\mathbf{A}} = [A_{s,\ell}]$ – матрица с элементами $A_{s,\ell} = Z_{s,\ell}$ при $s \neq \ell$ и $A_{s,s} = 2\text{Re}(Z_{ex})$ при $s = \ell$ ($s, \ell = 1, 2, 3, \dots, n$). Рис. 3в представляет угловую (нормированную) диаграмму поглощения структуры при индивидуальной стратегии ее элементов при $n = 2 - 8$. Из рис. 3в видно, что увеличение числа n элементов структуры при индивидуальной стратегии не приводит к обострению диаграммы поглощения (см. (23)) и, соответственно, не приводит к росту максимального сечения поглощения. Рис. 6 иллюстрирует этот факт для $n = 3$: при сближении ($kh \rightarrow 0$) элементов, подчиненных индивидуальной стратегии, суммарная поглощаемая мощность стремится к нулю, т.е. $(\sigma_{\text{ind}})_{\text{max}} \rightarrow 0$ (рис. 6б), в отличие от кооперативного управления (26), когда $(\sigma_{\text{coop}})_{\text{max}} \rightarrow n^2 \sigma_0$ (рис. 6а). Таким образом, при индивидуальной стратегии наибольшая суммарная поглощаемая мощность получается лишь для невзаимодействующих (т.е. далеко разнесенных) монополей и равна сумме их сечений поглощения $(\sigma_{\text{ind}})_{\text{max}} = n\sigma_0$. К этому же пределу при $kh \rightarrow \infty$ стремится, естественно, и суммарная поглощаемая мощность, обеспечиваемая кооперативной стратегией (т.е. в режиме МПСМ).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были рассмотрены поглощательные характеристики структуры малых волновых размеров в виде цепочки акустических монополей, эквидистантно расположенных на оси, при различных типах организации этой структуры. Если данная структура представляет собой мультипольный излучатель (МИ), то его сечение поглощения пропорционально порядку мультипольности или, другими словами, растет неограниченно пропорционально логарифму $\sim \ln(n)$ числа n монополей в структуре. То же относится и к мультипольному источнику однонаправленного излучения (МИОИ) на базе двух фазированных мультиполей. Если несколько МИ (МИОИ), составляющих решетку, “смотрят” друг на друга нулями своих диаграмм направленности, то их сечения поглощения складываются, и тогда общее сечение поглощения пропорционально числу МИ (МИОИ) в решетке или числу $\sim n$ элементов. В

МИ (МИОИ) амплитуды и фазы элементов жестко связаны. Если же позволить вариации амплитуд и фаз всех элементов структуры с целью максимизации суммарной поглощаемой мощности, то сечение поглощения такой структуры в n^2 раз превышает сечение поглощения одиночного монополя.

Автор благодарен В.И. Таланову за содержательные конструктивные замечания при обсуждении данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малюжинец Г.Д. Простейшая модель поглощающей и прозрачной решетки с обратной связью // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 14. С. 7–22.
2. Лапин А.Д. Поглощение звука монопольно-дипольными резонаторами в многомодовом волноводе // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 3. С. 428–430.
3. Канев Н.Г., Миронов М.А. Дипольный резонансный глушитель на выходе узкой трубы // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 335–339.
4. Коротаев Е.В., Тютекин В.В. Экспериментальное исследование активной гасящей системы плоской формы // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 84–88.
5. Бобровницкий Ю.И. Импедансная теория поглощения звука: наилучший поглотитель и черное тело // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 742–752.
6. Krüger J., Leistner P. Noise reduction with actively absorbing silencers // Appl. Acoust. 1997. V. 51. № 2. P. 113–120.
7. Mangiante G.A. Active sound absorption // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61. № 5. P. 1516–1523.
8. Mangiante G., Vian J. Application du principe de Huygens aux absorbers acoustiques actifs. 2. Approximation du principe de Huygens // Acoustica. 1977. V. 32. № 3. P. 175–182.
9. Arabadzhi V.V. Local emitters in the regime of maximum absorption // Journal of Low Frequency Noise and Vibration and Active Control. 1999. V. 18. № 3. P. 129–147.
10. Пауль Х., Фишер Р. Поглощение света диполем // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 375–381.
11. Хансен Р.С. Соотношения между антеннами как рассеивателями и как излучателями // ТИИЭР. 1989. Т. 77. № 5. С. 30–34.
12. Taylor Thomas T. A Discussion of the Maximum Directivity of Antenna // Proc. I.R.E. P. 1135.
13. Stevenson A.S. Relations between the transmitting and receiving properties of Antennas // Quarterly of Applied Mathematics. 1948. V. 5. № 4, January.
14. Щелкунов С., Фриис Г. Антенны (теория и практика) пер. с англ. под ред. Л.Д. Бахраха. М.: “Советское Радио”. 1955. С. 195–199.
15. Ю.В. Гуляев, А.Н. Лагарьков, С.А. Никитов. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения // Вестник РАН. 2008. Т. 78. № 5. С. 438–457.