

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.29; 534.138

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ РАССЕЙАНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛЯ НА ВКЛЮЧЕНИИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

© 2010 г. Б. П. Шарфарец

Институт аналитического приборостроения РАН

190103 Санкт-Петербург, Рижский просп. 26

E-mail: sharb@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.09 г.

Рассчитано радиационное давление в идеальной жидкости на включения сложной формы в первичном поле произвольной конфигурации. Решение ищется в рамках задачи рассеяния в линейном приближении. Приводятся выражения для компонент радиационного давления в произвольном первичном поле, в которых фигурирует результирующая амплитуда рассеяния. Полученные выражения упрощаются для ряда частных случаев. Полученные результаты весьма полезны для включений с непростыми амплитудами рассеяния, а приведенные выражения значительно расширяют диапазон полей и рассеивателей, для которых возможен расчет радиационного давления. Приводится пример расчета.

Вопросам акустического расслоения различных частиц в ультразвуковом поле по-прежнему уделяется большое внимание. Актуальным в этом кругу проблем является расчет радиационного давления на сложные конгломераты частиц, связанных между собой вследствие, например процессов агглютинации. В ставших уже классическими работах [1–3] приводятся выражения для радиационного давления в случае твердой [1] и жидкой [2] сферической частицы в поле бегущей и стоячей плоской волны. В работе [3] даны выражения для радиационного давления на малой сферической частице, описываемой только монополюсным и дипольным моментами, находящейся в произвольном падающем поле. Ранее в работе [4] рассматривались выражения для сил радиационного давления на сложные конгломераты частиц с произвольной амплитудой рассеяния в поле плоской бегущей и стоячей волн, распространяющихся вдоль оси OZ . В этом случае силы оказались зависимыми только от зональных гармоник в разложении амплитуды рассеяния препятствия по сферическим функциям. В работах [5, 6] уже было рассмотрено сложное внешнее поле, однако при расчетах рассматривались случаи, не выходящие за рамки влияния на радиационные силы только зональных гармоник в разложении результирующей амплитуды рассеяния включения. Вследствие этого не возникала необходимость рассмотрения общих выражений, связывающих силы радиационного давления со всеми коэффициентами в разложении амплитуды рассеяния включения по сферическим функциям. Поэтому специально для этого случая в работе [4] был введен эквивалентный точечный мульти-

польный источник, создающий поле, угловое распределение которого в волновой зоне совпадало с суммой только зональных гармоник в разложении по сферическим функциям результирующей амплитуды рассеяния реального включения. В работе [7] было получено выражение для мультипольного источника, создающего поле, угловое распределение которого в волновой зоне совпадает с амплитудой рассеяния реального включения, т.е. включает все гармоники в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям. На основе результатов работ [4, 7] в настоящей работе получены выражения для составляющих силы радиационного давления для общего случая, когда нельзя обойтись только зональными коэффициентами в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям.

Вначале проанализируем, при каких условиях необходимо учитывать все гармоники в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям. Для этого воспроизведем выражения для радиационного давления в идеальной жидкости, представленные через амплитуду рассеяния включения [4].

Сила радиационного давления \bar{F} в случае произвольного падающего поля в квадратичном приближении может быть представлена в виде суммы двух отличных от нуля слагаемых: перекрестного слагаемого с входящими в него первичным и рассеянным полями, а также слагаемого, квадратичного по рассеянному полю. Рассмотрим вклад обоих слагаемых. Перекрестное слагаемое (индекс is) определяется выражением

$$\begin{aligned} \overline{F}_i^{(is)} &= -\frac{\rho}{4} \int_V (v_{inc,i}(\mathbf{x})(\Delta + k^2)\psi_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.}) dV = \\ &= -\frac{1}{4\rho\omega^2} \int_V \left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} (\Delta + k^2) p_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.} \right) dV, \end{aligned} \tag{1}$$

а слагаемое, квадратичное по рассеянному полю (индекс ss), выражением

$$\begin{aligned} \overline{F}_i^{(ss)} &= -\frac{1}{2} \rho \int_S |v_s|^2 \cos\theta_i dS = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \varphi)|^2 \cos\theta_i \sin\theta d\varphi d\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

$i = \overline{1,3}$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z) = (R, \theta, \varphi)$; v_i, ψ — компоненты колебательной скорости и ее потенциал; нижние индексы inc и s говорят о принадлежности величины соответственно к падающей или рассеянной волне; $\cos\theta_i$ — направляющий косинус радиус-вектора точки на сфере относительно i -й оси координат $\cos\theta_1 = \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta_2 = \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta_3 = \cos\theta$ ($i = 1$ — координата $x, i = 2$ — координата $y, i = 3$ — координата z); $f(\theta, \varphi)$ — результирующая амплитуда рассеяния на включении; ρ, c — плотность и скорость звука в жидкости; θ и φ — углы в сферической системе координат.

Рассмотрим, как и в [7], разложение

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l^0 P_l(\cos\theta) + \\ &+ \sum_{m=1}^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta)], \end{aligned} \tag{3}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} A_l^m \\ B_l^m \end{matrix} \right\} &= \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_l^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \sin\theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра.

Поле давления $p_s(\mathbf{x})$, рассеянное на включении, имеет асимптотику

$$p_s(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R} + O\left(\frac{1}{kR^2}\right).$$

Вне рассеивателя совершенно идентичное поле может быть создано системой мультиполей, сосредоточенных в одной точке внутри рассеивате-

ля. Получим выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta, \varphi)}$, создающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta, \varphi)$ из (3). Для этого кратко приведем рассуждения из [7].

Если в исходном равенстве

$$(\Delta + k^2) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

дифференцировать с помощью оператора $D^{|\alpha|} = (D_x^{\alpha_1}, D_y^{\alpha_2}, D_z^{\alpha_3})$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_i$ — натуральные числа; $D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}, D_z = \frac{\partial}{\partial z}$) слева только экспоненту, а справа полностью, то видно, что мультиполь

$$-4\pi \frac{1}{(ik)^{|\alpha|}} \delta^{(\alpha_1)}(x) \delta^{(\alpha_2)}(y) \delta^{(\alpha_3)}(z)$$

создает поле с амплитудой рассеяния

$$f^{|\alpha|}(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi)^{\alpha_1} (\sin\theta \sin\varphi)^{\alpha_2} \cos^{\alpha_3} \theta.$$

Искомое выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta, \varphi)}$, создающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta, \varphi)$ из (3), можно получить определенным воздействием на дельта-функцию $-\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ операторами D_x, D_y, D_z . Если воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{ik} (D_x + iD_y) \right]^m e^{ikR} &= \sin^m \theta e^{im\varphi} e^{ikR} = \\ &= \sin^m \theta (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) e^{ikR} \end{aligned}$$

и

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos\theta)^m} P_l(\cos\theta)$$

то, как показано в [7], источник

$$\begin{aligned} \delta_{f(\theta, \varphi)} &= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_l^0 P_l \left(\frac{1}{ik} D_z \right) + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^l \left(\frac{1}{ik} \right)^m \left(A_l^m \operatorname{Re} \left[(D_x + iD_y)^m \right] + \right. \\ &+ \left. B_l^m \operatorname{Im} \left[(D_x + iD_y)^m \right] \right) \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \Big|_{u=\frac{1}{ik} D_z} \left. \right\} \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{aligned} \tag{5}$$

будет удовлетворять уравнению

$$(\Delta + k^2) p_s(\mathbf{x}) = \delta_{f(\theta, \varphi)},$$

где решение $p_s(\mathbf{x})$ и будет иметь искомую асимптотику с амплитудой рассеяния $f(\theta, \varphi)$ из (3).

Обратимся к анализу перекрестного слагаемого радиационного давления (1). Учитывая очевидное равенство

$$\int_V \Psi(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^3 D_{x_i}^{(n_i)} \delta(\mathbf{x}) dV = (-1)^n \frac{\partial^n \Psi(\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^3 (\partial x_i)^{n_i}} \Big|_{\mathbf{x}=0}, \quad n = \sum_{i=1}^3 n_i,$$

и подставляя (5) в (1), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^{(is)} &= \frac{-1}{4\rho\omega^2} \int_V \left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} (\delta_{f(\theta, \varphi)}(\mathbf{x}))^* + \text{к.с.} \right) dV = \\ &= \frac{\pi}{\rho\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (A_l^0)^* P_l \left(-1 \frac{i}{k} D_z \right) + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^l (-1)^m \left(\frac{i}{k} \right)^m \left((A_l^m)^* \operatorname{Re} \left[(D_x + iD_y)^m \right] + \right. \\ &\left. \left. + (B_l^m)^* \operatorname{Im} \left[(D_x + iD_y)^m \right] \right) \times \right. \\ &\left. \times \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \Big|_{u=-1 \frac{i}{k} D_z} \left\{ \frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \right\} \right. \\ &\left. i = 1, 2, 3. \right. \end{aligned} \quad (6)$$

Стоящий слева в (6) дифференциальный оператор воздействует на функцию $\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{i\rho\omega} v_{inc_{x_i}}(\mathbf{x})$, после чего получившаяся функция рассматривается в точке $\mathbf{x} = 0$. Здесь $v_{inc_{x_i}}(\mathbf{x})$ — составляющая вектора колебательной скорости.

Проведем анализ выражения (6) для перекрестного слагаемого $\bar{\mathbf{F}}^{(is)}$ силы радиационного давления $\bar{\mathbf{F}}$ для некоторых частных случаев.

1. Все компоненты вектора колебательной скорости в падающей волне отличны от нуля в точке $\mathbf{x} = 0$ и являются функциями (бесконечно или конечно дифференцируемыми) только переменной z в окрестности этой точки

$$v_{inc_x} = v_{inc_x}(z), \quad v_{inc_y} = v_{inc_y}(z), \quad v_{inc_z} = v_{inc_z}(z).$$

Тогда, как видно из (6), для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления справедливы следующие выражения

$$\bar{F}_i^{(is)} = \frac{\pi}{\rho\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l^0)^* P_l \left(-1 \frac{i}{k} D_z \right) \frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \quad (7)$$

Следовательно, в этом случае компоненты силы радиационного давления определяются только зональными гармониками в разложении (3).

В еще более частном случае, когда только одна из компонент вектора колебательной скорости в падающей волне $v_{inc_{x_i}}$ отлична от нуля в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ и зависит только от z (как, например, для плоской стоячей или бегущей волны), то отличной от нуля будет лишь соответствующая составляющая силы радиационного давления $\bar{F}_{x_i}^{(is)}$ из (7).

2. Все компоненты вектора колебательной скорости в падающей волне отличны от нуля в точке $\mathbf{x} = 0$ и являются функциями (бесконечно или конечно дифференцируемыми) только переменных x и y в окрестности этой точки.

$$\begin{aligned} v_{inc_x} &= v_{inc_x}(x, y), \quad v_{inc_y} = v_{inc_y}(x, y), \\ v_{inc_z} &= v_{inc_z}(x, y). \end{aligned}$$

Тогда, как видно из (6), для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления справедливы выражения

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^{(is)} &= \frac{\pi}{\rho\omega^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (-1)^m \left(\frac{i}{k} \right)^m c_l^m \times \\ &\times \left((A_l^m)^* \operatorname{Re} \left[(D_x + iD_y)^m \right] + \right. \\ &\left. + (B_l^m)^* \operatorname{Im} \left[(D_x + iD_y)^m \right] \right) \frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) по сравнению с общим выражением (6) исчезает дифференцирование по z , а константы c_l^m появляются вместо оператора дифференцирования $\frac{d^m}{du^m} P_l(u) \Big|_{u=-1 \frac{i}{k} D_z}$ вследствие того, что последний содержит эти константы как коэффициенты при нулевой степени $u = -1 \frac{i}{k} D_z$ при изменении m (т.е. c_l^m суть коэффициенты при нулевой степени u в разложении полинома $\frac{d^m}{du^m} P_l(u)$ по степеням u ; все остальные степени в разложении $\frac{d^m}{du^m} P_l(u)$ по степеням u аннулируются вследствие независимости

колебательной скорости от z). Константы легко подсчитываются и равны для четного l :

$$c_l^m = \begin{cases} (-1)^{\frac{l-m}{2}} \frac{(l+m)!}{2^l \left(\frac{l-m}{2}\right)! \left(\frac{l+m}{2}\right)!}, & m - \text{четное} \\ 0, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

и

$$c_l^m = \begin{cases} 0, & m - \text{четное} \\ (-1)^{\frac{l-m}{2}} \frac{(l+m)!}{2^l \left(\frac{l-m}{2}\right)! \left(\frac{l+m}{2}\right)!}, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

для нечетного l ; $l = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, l$.

В еще более частном случае, когда одна из компонент вектора колебательной скорости в падающей волне v_{inc_x} отлична от нуля в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ и зависит только от x или только от y (как, например, для плоской стоячей или бегущей волны), то отличной от нуля будет лишь соответствующая составляющая силы радиационного давления $\overline{F}_{x_i}^{(is)}$ из (8).

Так, например, в случае

$$v_{\text{inc}_x} = v_{\text{inc}_x}(x), \quad v_{\text{inc}_y} = 0, \quad v_{\text{inc}_z} = 0$$

выражение (8) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{F}_x^{(is)} &= \frac{\pi}{\rho\omega^2} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (-1)^m \left(\frac{i}{k}\right)^m c_l^m (A_l^m)^* (D_x)^m \frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \quad (8a) \\ \overline{F}_y^{(is)} &= \overline{F}_z^{(is)} = 0. \end{aligned}$$

3. Амплитуда рассеяния (3) зависит только от угла падения θ , и, следовательно, выполняется условие

$$A_l^m = B_l^m = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, l. \quad (9)$$

В этом случае основное выражение (6) упрощается, сводясь к выражению типа (7)

$$\overline{F}_i^{(is)} = \frac{\pi}{\rho\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l^0)^* P_l \left(-1 \frac{i}{k} D_z\right) \frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \quad (7a)$$

При этом функции $\frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ могут иметь произвольную зависимость от декартовых координат. Дальнейшие частные случаи при выполнении условия (9) анализируются так же, как в рассмотренном выше случае 1.

Выше были рассмотрены некоторые частные случаи общего выражения (6) для силы радиационного давления. В каждом конкретном частном случае достаточно просто получить упрощение, если оно возможно, апеллируя к общему выражению (6). Однако ситуация, когда радиационное давление определяется только зональными коэффициентами в разложении (3), исчерпывается, по-видимому, только случаями, описываемыми выражениями (7) и (7a), рассмотренными в п.п. 1 и 3.

Перейдем к слагаемому, квадратичному по рассеянному полю. Анализ выражений (2) и (4) показывает, что составляющие $\overline{F}_i^{(ss)}$ равны

$$\overline{F}_1^{(ss)} = cA_1^1, \quad \overline{F}_2^{(ss)} = cB_1^1, \quad \overline{F}_3^{(ss)} = cA_1^0, \quad c = -\frac{4\pi}{6} \frac{1}{\rho c^2}. \quad (10)$$

Здесь A , B — соответствующие коэффициенты разложения вида (3), (4) для функции $|f(\theta, \varphi)|^2$ — квадрата модуля амплитуды рассеяния. Поэтому компоненты силы радиационного давления могут быть равны нулю только при равенстве нулю соответствующих коэффициентов разложения квадрата модуля амплитуды рассеяния в ряд по сферическим функциям вида (3). А это означает отсутствие какого-либо диполя в мультипольном разложении квадрата модуля амплитуды рассеяния $|f(\theta, \varphi)|^2$. Анализ выражения (3) для функции $f(\theta, \varphi)$ и функции $|f(\theta, \varphi)|^2$ показывает, что между коэффициентами A , B в разложении (3) для $f(\theta, \varphi)$ и A , B в разложении (3) для $|f(\theta, \varphi)|^2$ существует связь, подобная той, которая получена в работе [8] для случая независимой от угла азимута амплитуды рассеяния $f(\theta, \varphi) = f(\theta)$ (выражение (8) работы [8]). Так же как и в [8], искомые коэффициенты A_1^0 , A_1^1 и B_1^1 равны сумме реальных частей произведений соседних по номерам коэффициентов A_l^m и B_l^m , один из которых комплексно сопряжен. При этом в рядах для A_1^0 и A_1^1 нет смешанных произведений A и B . В ряду же для B_1^1 такие произведения есть. Однако ввиду достаточно большой громоздкости этих соотношений, здесь они не приводятся. Впрочем, достаточно просто величины A_1^0 , A_1^1 и B_1^1 могут быть вычислены напрямую из (2). Очевидно также, что эти величины (впрочем, как и все остальные коэффициенты A , и B) являются действительными числами в силу действительности функции $|f(\theta, \varphi)|^2$.

Таким образом, в условиях произвольного падающего поля и амплитуды рассеяния на включении, зависящей от углов падения θ и азимута φ необходимо пользоваться общими выражениями

(6) и (10) соответственно для вычисления компонент векторов силы радиационного давления $\bar{\mathbf{F}}^{(is)}$ для перекрестного слагаемого и $\bar{\mathbf{F}}^{(ss)}$ для квадратичного слагаемого общей силы $\bar{\mathbf{F}}$.

Рассмотрим пример. Пусть падающее поле представляет собой бегущую плоскую волну общего положения, единичный волновой вектор которой имеет составляющие $\hat{\mathbf{k}} = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$:

$$p_{inc}(x, y, z) = P_0 \exp \left[e^{ik(x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + z \cos \theta_0)} \right].$$

Тогда результирующая амплитуда рассеяния $f(\theta, \varphi)$ равна

$$f(\theta, \varphi) = P_0 f_0(\theta, \varphi),$$

где $f_0(\theta, \varphi)$ — амплитуда рассеяния на включении при падении плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы.

Положим, что в амплитуде рассеяния $f_0(\theta, \varphi)$ отличны от нуля только коэффициенты A_0^0, A_1^0, A_1^1 и B_1^1 . Это отвечает одному монополю и трем диполям с осями, сориентированными соответственно вдоль оси z с силой A_1^0 , вдоль оси x с силой A_1^1 и вдоль оси y с силой B_1^1 . Тогда из (3) имеем для амплитуды рассеяния $f(\theta, \varphi)$

$$f(\theta, \varphi) = P_0 \left(A_0^0 + A_1^0 \cos \theta + A_1^1 \sin \theta \cos \varphi + B_1^1 \sin \theta \sin \varphi \right). \quad (11)$$

Вычислим силы $\bar{\mathbf{F}}^{(is)}$ и $\bar{\mathbf{F}}^{(ss)}$, действующие на рассеиватель с амплитудой рассеяния (11). Очевидно, что имеет место общая ситуация и необходимо пользоваться выражением (6), а также (10). Выражение (6) приводится в этом случае к виду

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^{(is)} = & \frac{\pi P_0}{\rho \omega^2} \left((A_0^0)^* + (A_1^0)^* \left(-1 \frac{i}{k} D_z \right) + \right. \\ & \left. + (-1) \left(\frac{i}{k} \right) \left((A_1^1)^* D_x + (B_1^1)^* D_y \right) \right) \frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{x=0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (12)$$

Непосредственные вычисления по формуле (12) дают для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления величины

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^{(is)} = & \bar{E} \frac{4\pi}{k} \cos \theta_{0i} \operatorname{Im} \left(A_0^0 + A_1^0 \cos \theta_{03} + \right. \\ & \left. + A_1^1 \cos \theta_{01} + B_1^1 \cos \theta_{02} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\bar{E} = \frac{P_0^2}{2\rho c^2}$ — средняя плотность энергии в падающей волне; θ_{0i} — углы между волновым

вектором падающей плоской волны и осями координат, $\cos \theta_{01} = \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $\cos \theta_{02} = \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $\cos \theta_{03} = \cos \theta_0$.

Вычислим компоненты квадратичной составляющей силы радиационного давления. Найдем из (11) коэффициенты A_1^0, A_1^1 и B_1^1 в разложении (3) для $|f(\theta, \varphi)|^2$. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} A_1^0 &= |P_0|^2 2 \operatorname{Re} \left(A_1^0 (A_0^0)^* \right), \\ A_1^1 &= |P_0|^2 2 \operatorname{Re} \left(A_1^1 (A_0^0)^* \right), \\ B_1^1 &= |P_0|^2 2 \operatorname{Re} \left(B_1^1 (A_0^0)^* \right). \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки (14) в (10) получаем

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^{(ss)} &= -\frac{2}{3} \bar{E} 4\pi \operatorname{Re} \left(A_1^1 (A_0^0)^* \right), \\ \bar{F}_2^{(ss)} &= -\frac{2}{3} \bar{E} 4\pi \operatorname{Re} \left(B_1^1 (A_0^0)^* \right), \\ \bar{F}_3^{(ss)} &= -\frac{2}{3} \bar{E} 4\pi \operatorname{Re} \left(A_1^0 (A_0^0)^* \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Окончательно, используя (13) и (15), вычисляем суммарные компоненты силы радиационного давления \bar{F}_i

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(is)} + \bar{F}_i^{(ss)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отметим, что выражения (14) и (16) полностью согласуются с результатами работ [4–6] в случае, когда $\theta_0 = 0$ (падающая плоская волна распространяется вдоль оси z), а $A_1^1 = B_1^1 = 0$.

Аналогично может быть решена задача для более общей амплитуды рассеяния и для более сложного падающего поля. В реальности нужно пользоваться вместо ряда (3) конечными суммами, ограничиваясь достаточным конечным числом членов ряда с точки зрения погрешности представления амплитуды рассеяния.

Таким образом, в работе решена задача вычисления радиационного давления в идеальной жидкости на включения сложной формы в первичном поле произвольной конфигурации. Приведены выражения (6) и (10) для компонент радиационного давления в произвольном первичном поле, в которых фигурирует результирующая амплитуда рассеяния. Получены упрощенные выражения (7)–(9), (7а) и (8а) для ряда частных случаев. Приведенные выражения значительно расширяют диапазон полей и рассеивателей, для

которых возможен расчет радиационного давления. Приведен пример расчета для монополюно-дипольного рассеивателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. King L.V. On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. 1934. A 147. P. 212–240.
2. Yosioka K., Kawasima Y. Acoustic radiation pressure on compressible sphere // Acustica 1955. V. 5. P. 167–173.
3. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
4. Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // Доклады РАН. Физика 2008. Т. 419. № 3. С. 324–327.
5. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421. № 2. С. 186–189.
6. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н. Радиационное давление на включение с заданной амплитудой рассеяния в произвольном внешнем поле // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 2. С. 147–152.
7. Шарфарец Б.П. О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включениях в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 166–171.
8. Князьков Н.Н., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П. Радиационное давление на сферу в смешанном поле бегущей и стоячей плоских волн // Доклады РАН. Физика 2009. Т. 424. № 3. С. 751–754.