

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ  
НА ПОВЕРХНОСТИ МОРСКОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

© 2010 г. А. В. Смольяков

Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.Н. Крылова

196158 Санкт-Петербург, Московское шоссе 44

E-mail: asmoliakov@inco.spb.ru

Поступила в редакцию 8.02.2010 г.

Построена теория, которая позволяет вычислять исходные параметры, необходимые для расчета гидродинамической (турбулентной) помехи работе морских геофизических антенн. Созданы алгоритмы для вычисления профиля и дефекта средней скорости, толщины вытеснения, потери импульса и сопротивления трения в турбулентном пограничном слое на цилиндре при его продольном обтекании. Результаты расчетов по разработанной теории сравниваются с опытными данными. При стремлении диаметра цилиндра к бесконечности все соотношения теории переходят в известные соотношения для пограничного слоя на плоской пластине. Разработанная теория представляет собой начальный этап создания метода расчета гидродинамической помехи работе морских геофизических антенн.

*Ключевые слова:* гидроакустические антенны, гидродинамическая помеха, шум обтекания, турбулентные источники шума, пограничный слой, турбулентные давления.

## ВВЕДЕНИЕ

При сейсмической разведке углеводородных месторождений на морском шельфе широко используются буксируемые судном гидроакустические антенны с приемными элементами, расположенными внутри цилиндрического шланга диаметром  $d \sim 50\text{--}100$  мм и длиной  $L \sim 1\text{--}3$  км. Такие антенны обычно называют геофизическими антеннами, а иногда сейсмокосами.

При буксировке антенны на ее поверхности образуется турбулентный пограничный слой (ТПС), пульсации давления которого возбуждают оболочку антенны и тем самым создают на приемных элементах гидродинамическую помеху турбулентного происхождения. В настоящее время отсутствуют надежные методы расчета гидродинамической помехи работе геофизических антенн. Это является следствием того, что отсутствуют методы расчета таких простейших одноточечных характеристик пограничного слоя как профиль средней скорости, толщина пограничного слоя, толщины вытеснения и потери импульса, сопротивление трения потока о поверхность цилиндрической антенны. Именно с определения перечисленных характеристик начинается расчет гидродинамической помехи на акустических антеннах, размещенных внутри корпуса корабля, или расчет турбулентного шума внутри фюзеляжей пассажирских авиалайнеров. В этих ситуациях мы имеем дело с обтеканием тел, имеющих относительно малые удлинения  $L/d \approx 8\text{--}15$ , которые ха-

рактерны для большинства плавающих и летающих инженерных конструкций. В этих случаях толщина пограничного слоя  $\delta$  существенно меньше радиуса поперечной кривизны  $a$  обтекаемого тела,  $\delta/a \ll 1$ . Для тел с относительно тонкими пограничными слоями ( $\delta/a \ll 1$ ) разработаны надежные полуэмпирические методы расчета всех необходимых одноточечных характеристик ТПС [1, 2]. Для таких тел созданы также методы расчета статистических характеристик (спектров и корреляций) гидродинамических и акустических флуктуаций ТПС [3–14]. В качестве исходной базы при расчете статистических характеристик используются упомянутые выше методы расчета одноточечных характеристик относительно тонкого ( $\delta/a \ll 1$ ) пограничного слоя, которые дополняются необходимыми уравнениями статистической теории турбулентности и акустики.

Относительное удлинение  $L/d$  геофизических антенн может достигать очень больших величин  $\sim 10000\text{--}60000$ , при этом толщина ТПС намного превышает радиус кривизны цилиндрической антенны,  $\delta/a \gg 1$ . Для таких условий в настоящее время нет корректной теории ТПС, и по этой причине нет необходимой исходной базы для построения статистической теории гидродинамических и акустических полей.

Основная цель настоящей работы состоит в построении полуэмпирической теории турбулентного пограничного слоя, образующегося на

поверхности цилиндра при его продольном обтекании, которая позволила бы определить все необходимые одноточечные характеристики такого ТПС. Таким образом, предлагаемая ниже теория является первым этапом построения метода расчета турбулентных флуктуаций давления на поверхности геофизических антенн и уровня гидродинамической помехи их работе.

При разработке теории преследовалась несколько более широкая цель: отыскание закономерностей турбулентного обтекания цилиндрических тел произвольного, а не только очень большого удлинения, которые характерны для геофизических антенн. Это означает, что в разрабатываемой теории закономерности обтекания цилиндров любого конечного удлинения должны естественным образом переходить в известные закономерности обтекания плоской пластины при стремлении радиуса цилиндра к бесконечности,  $a \rightarrow \infty$ ,  $\delta/a \rightarrow 0$ .

### ОПИСАНИЕ ТПС НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ ПО МЕТОДУ ФЕДЯЕВСКОГО

Существует несколько различных полуэмпирических методов описания ТПС на плоской пластине (плоского ТПС), которые приводят к практически одинаковым результатам. Эти методы подробно описаны в классических монографиях [1, 2], в которых, однако, не упомянут еще один метод, предложенный в свое время Федяевским [15]. Вместе с тем, некоторая модификация именно метода Федяевского оказалась наиболее простой и удобной для описания осесимметричного ТПС на цилиндре, что будет показано в разделах 3 и 4. Существо этого метода сводится к представлению распределения касательных напряжений  $\tau$  поперек плоского пограничного слоя на пластине в форме квадрата некоторого полинома

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i Y^i \right\}^2, \quad (1)$$

где  $\tau_w = \rho u_*^2$  — вязкие касательные напряжения на поверхности пластины ( $\rho$  — массовая плотность жидкости,  $u_*$  — динамическая скорость),  $a_i$  — безразмерные коэффициенты полинома и  $Y = y/\delta$  — расстояние от поверхности пластины, нормированное толщиной  $\delta$  пограничного слоя. Удерживая в полиноме три первых члена при  $i = 0, 1, 2$  и подчиняя его двум естественным граничным условиям  $\tau/\tau_w = 1$  и  $\partial(\tau/\tau_w)/\partial Y = 0$  при  $Y = 0$  (на стенке) и одному условию  $\tau/\tau_w = 0$  при  $Y = 1$  (на внешней границе ТПС), нетрудно найти, что

$$\tau = \tau_w(1 - Y^2)^2, \quad \text{или} \quad \tau = \rho u_*^2(1 - Y^2)^2. \quad (2)$$

При малых значениях  $Y \ll 1$  действует закон примерно постоянных напряжений

$$\tau \approx \rho u_*^2 = \tau_w. \quad (3)$$

Для плоского ТПС вполне удовлетворительной оказалась трехслойная модель, построенная с помощью полинома Федяевского (1). В соответствии с этой моделью пограничный слой на пластине состоит из трех областей:

(i) — области вязкого подслоя толщиной  $y_0 u_* / \nu = \alpha = 10.68$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость среды) с линейным профилем скорости

$$u/u_* = y u_* / \nu; \quad (4)$$

(ii) — области развитой турбулентности в диапазоне расстояний от стенки

$$\alpha \leq y u_* / \nu \leq (\delta u_* / \nu) Y_0, \quad (5)$$

где действует закон постоянных напряжений (3) и где профиль скорости имеет логарифмическую форму

$$u/u_* = \kappa^{-1} \ln(y u_* / \nu) + B; \quad (6)$$

(iii) — внешней части ТПС в диапазоне расстояний от стенки  $Y_0 \leq Y \leq 1.0$ , или, как ее часто называют, *области следа*, потому что турбулентность в этой области имеет много общего с турбулентностью в кильватерном следе за телом. В таких потоках весьма плодотворной является концепция постоянной вихревой (турбулентной) вязкости  $\varepsilon = u_* \delta / \gamma = \text{const}$  (здесь  $\gamma$  — безразмерный параметр), и в модели Федяевского он равен  $\gamma = 18.48$ . В формулах (5) и (6) обозначено  $Y_0 = 0.132$  — верхняя граница логарифмической области (6),  $\kappa \approx 0.41$  — эмпирическая константа Кармана,  $B = 4.9$ , и при выводе этих формул использовались известные соотношения Буссинеска и Прандтля

$$\tau = \varepsilon \rho (du/dy), \quad (7)$$

$$\tau = \rho l^2 (du/dy)^2, \quad (8)$$

где  $l = \kappa y$  — длина пути турбулентного смешения.

### ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ТПС НА ЦИЛИНДРЕ

Трехслойная модель ТПС на цилиндре в данной работе строится в значительной степени аналогично трехслойной модели ТПС на плоской пластине. По замыслу эта модель должна включать в себя плоский ТПС как частный случай при стремлении радиуса цилиндра к бесконечности.

Так как пограничный слой на продольно обтекаемом цилиндре обладает осевой симметрией, то вполне естественно описывать его параметры в цилиндрической системе координат, в которой распределение касательных напряжений  $\tau$  попе-

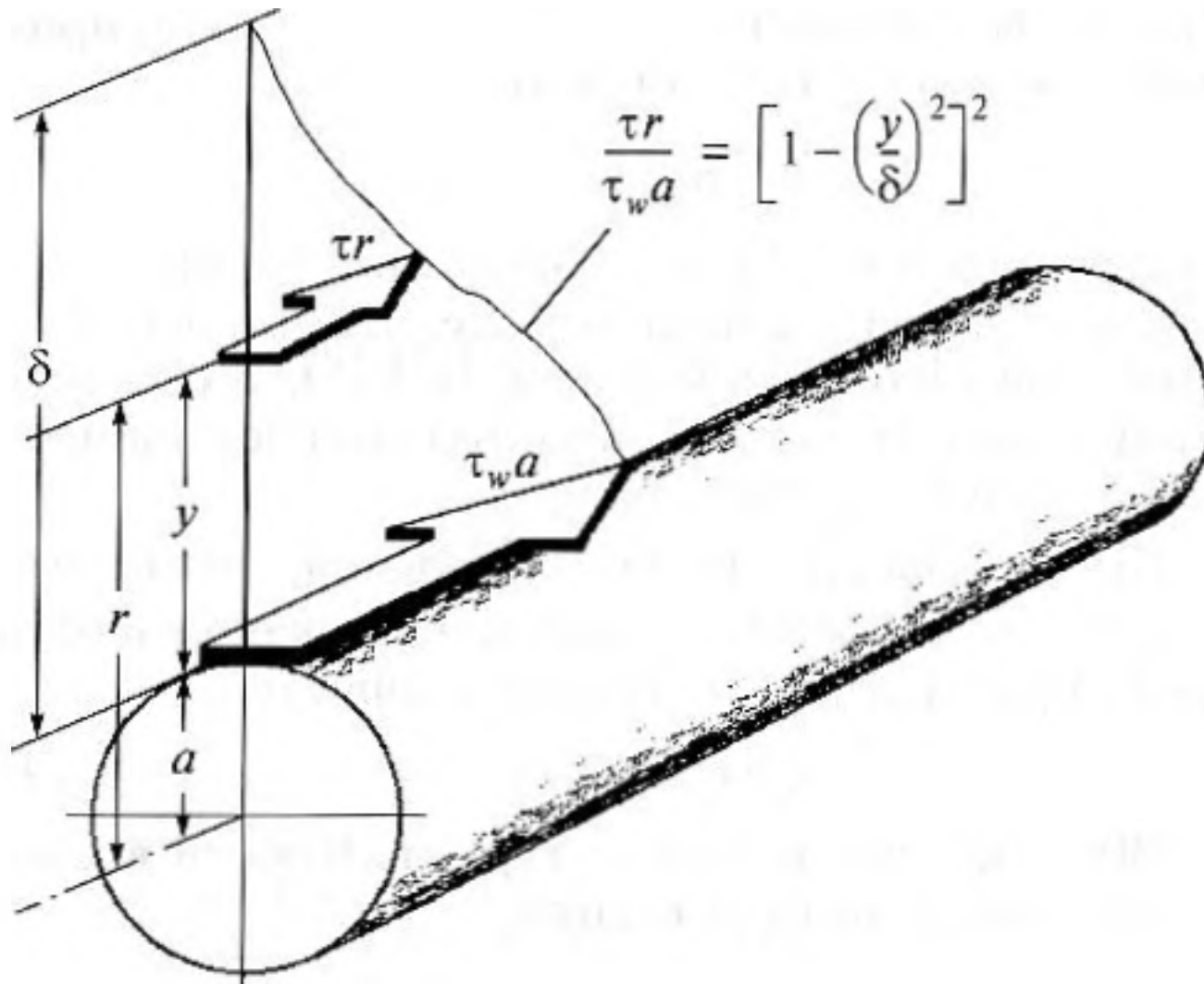


Рис. 1. Распределение моментов напряжений поперек пограничного слоя.

рек слоя заменяется распределением моментов касательных напряжений  $\tau r$ , где  $r = a + y$  — расстояние от центра цилиндра и  $a$  — радиус цилиндра.

Полагая, что моменты  $\tau r$  описываются трехчленным полиномом Федяевского, который удовлетворяет тем же самым граничным условиям, что и полином для касательных напряжений на пластине, получим (см. рис. 1):

$$\tau r / \tau_w a = (1 - Y^2)^2. \quad (9)$$

Эта более общая концепция о распределении моментов напряжения поперек ТПС на цилиндре используется вместо прежней концепции (2) о распределении самих напряжений в ТПС на пластине. Однако нетрудно видеть, что при  $a \rightarrow \infty$  уравнение (9) для цилиндра превращается в уравнение (2) для пластины. При малых значениях  $Y \ll 1$  на цилиндре действует закон примерно постоянных моментов напряжений  $\tau r \approx \tau_w a$  вместо закона (3) постоянства самих напряжений на пластине.

Напряжения Рейнольдса в турбулентном потоке обусловлены корреляцией продольной  $u'$  и поперечной  $v'$  компонент пульсаций скорости:  $\tau = -\rho \langle u' v' \rangle$ . С помощью формулы (9) нетрудно построить зависимость

$$-\frac{2 \langle u' v' \rangle}{U^2} = 2 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2 \frac{[1 - (y/\delta)]^2}{1 + (y/\delta)(\delta/a)}. \quad (10)$$

Здесь  $U$  — скорость натекающего на цилиндр потока и символ  $\langle \rangle$  означает статистическое осреднение. На рис. 2 показаны результаты измерений [16] этой зависимости для двух значений относительной толщины пограничного слоя  $\delta/a = 4.6$  и

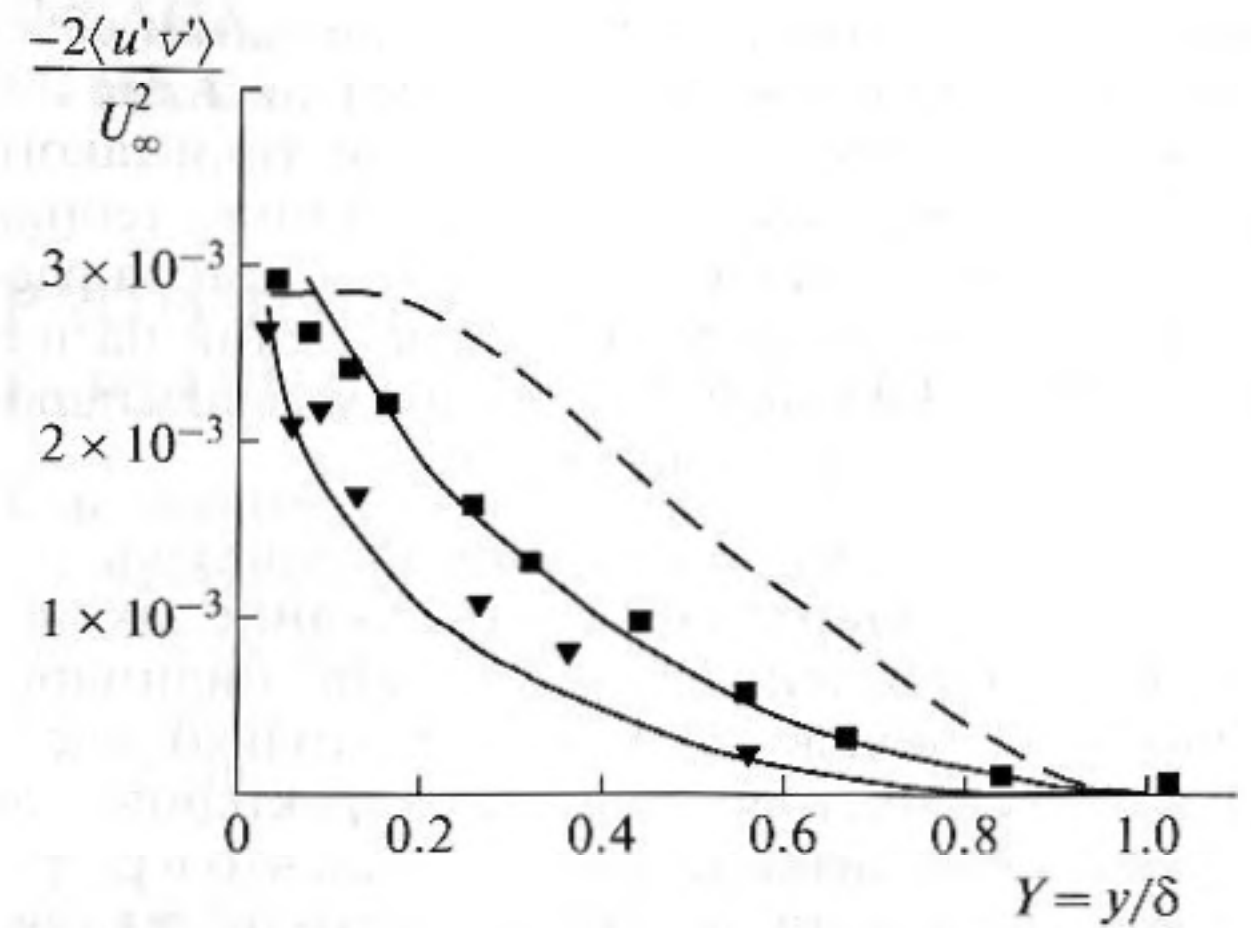


Рис. 2. Распределение рейнольдсовых напряжений в пограничном слое цилиндра и пластины.

■ —  $\delta/a = 4.6$ , ▼ —  $\delta/a = 8.5$ , — опытные данные [16]; — расчет.

$\delta/a = 8.5$ . Сплошными линиями показан расчет по формуле (10), полученной с использованием формулы (9) о распределении моментов напряжений на цилиндре. Видно, что расчет хорошо согласуется с опытными данными. Пунктирная линия соответствует расчету с использованием формулы (2) о распределении напряжений на плоской пластине,  $\delta/a = 0$ . Авторы работы [16] с удивлением отмечают кардинальное отличие измеренных ими напряжений в пограничном слое цилиндра от напряжений в пограничном слое на пластине. Характер распределения напряжений действительно очень разный, но ведь и рейнольдсовы напряжения подчинены разным закономерностям в плоском и осесимметричном пограничных слоях.

В вязком подслое, где, безусловно,  $Y \ll 1$ , из формулы (9) с учетом соотношений  $\tau_w = \rho u_*^2$  и  $r = a + y$  следует, что  $\tau = \rho u_*^2 / (1 + y/a)$ . Здесь напряжения Рейнольдса малы и поэтому можно считать, что в вязком подслое действуют только вязкие напряжения Ньютона  $\tau = \nu \rho (du/dy)$ . Из сопоставления двух последних формул следует соотношение  $du/dy = u_*^2 / [\nu(1 + y/a)]$ , интегрирование которого приводит к следующему выражению для профиля скорости в вязком подслое

$$u/u_* = (au_*/\nu) \ln(1 + y/a). \quad (11)$$

При неограниченном увеличении радиуса цилиндра,  $a \rightarrow \infty$ , с учетом известного приближения  $\ln(1 + y/a) \rightarrow y/a$  при  $y/a \rightarrow 0$  будем иметь профиль  $u/u_* = yu_*/\nu$ , в точности совпадающий с профилем (4) в вязком подслое на плоской пластине.

За пределами вязкого подслоя рейнольдсовы напряжения, как и в плоском ТПС, становятся больше вязких, и для этой области развитой турбулентности справедлива формула Прандтля (8). Однако теперь она нуждается в одном весьма принципиальном уточнении. Длина пути смещения теперь должна зависеть не только от расстояния  $y$  до обтекаемой поверхности, но также еще и от второго масштаба длины, которого не было в плоском ТПС, а именно — от радиуса цилиндра  $a$ . Вместо пути смещения для пластины  $l = \kappa y$  примем для цилиндра

$$l = S\kappa y, \text{ где } S = [\ln(1 + \delta/a)/(\delta/a)]^m. \quad (12)$$

Величина показателя степени в формуле (12) была впоследствии выбрана на основании сопоставления расчетов по данной теории с опытными данными и оказалась равной  $m = -0.005$ . Нетрудно видеть, что если  $a \rightarrow \infty$ , то  $S \rightarrow 1$ , и длина пути смещения приобретает прежнюю форму для плоской пластины  $l = \kappa y$ . Используя уравнение (9) в области постоянных моментов, где все еще  $Y \ll 1$  и где справедлива формула Прандтля, с учетом уточнения (12) получим

$$du/dy = u_*/(S\kappa y\sqrt{1 + y/a}). \quad (13)$$

Интеграл от (13) позволяет определить с точностью до постоянной интегрирования профиль средней скорости в области постоянных моментов. Постоянная интегрирования находится из условия равенства скоростей на границе между областью постоянных моментов напряжений и областью вязкого подслоя (11). После несложных преобразований окончательное выражение для профиля скорости в области постоянных моментов принимает вид

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{4y_+}{(1 + \sqrt{1 + y_+ Z_a})^2} + \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + \alpha f_z Z_a})^2}{4\alpha f_z} + \frac{\alpha}{f_z}. \quad (14)$$

Здесь, как и прежде,  $\kappa = 0.41$  — постоянная Кармана,  $\alpha = y_0 u_*/\nu = 10.68$  и используются обозначения:  $y_+ = y u_*/\nu$ ,  $Z_a = \nu/(a u_*)$  и  $f_z = 1 + 2.132 Z_a^{0.833}$ . Последняя формула следует из численного анализа зависимости толщины вязкого подслоя (11) от параметра  $Z_a$ . Если  $a \rightarrow \infty$ , то  $Z_a \rightarrow 0$ ,  $f_z \rightarrow 1$ ,  $S \rightarrow 1$  и (14) вырождается в (6). Таким образом, первый член профиля (14) является более сложным аналогом простого логарифмического члена  $\kappa^{-1} \ln(y u_*/\nu)$  в плоском ТПС, а два последних члена в (14) описывают функцию параметров  $Z_a$  и  $f_z$ , которая при  $a \rightarrow \infty$  превращается в кон-

станту  $B = 4.9$  для логарифмического профиля на пластине (6).

Для течения во внешней части (в области следа) ТПС на цилиндре сохраним концепцию постоянства по сечению ТПС вихревой вязкости  $\varepsilon = u_* \delta/\gamma = \text{const}$ , однако, безразмерный параметр  $\gamma$  не обязательно должен быть точно таким, как на пластине. Подстановка этого выражения в соотношение Буссинеска (7) и использование уравнения (9) позволяет найти градиент средней скорости в области следа  $du/dy = (\gamma u_*/\delta)(1 - Y^2)^2/[1 + (\delta/a)Y]$ . Профиль скорости в области следа определяется путем интегрирования этого выражения:

$$\frac{u}{u_*} = \gamma \int_{Y_0}^Y \frac{(1 - Y^2)^2}{1 + \frac{\delta}{a} Y} dY + \left(\frac{u}{u_*}\right)_{Y=Y_0}. \quad (15)$$

Здесь  $Y_0$  — пока неизвестное для нас расстояние (в долях  $\delta$ ) от стенки, где расположена граница между слоем постоянных моментов и областью следа ТПС. Величина  $(u/u_*)_{Y=Y_0}$  означает скорость (в долях  $u_*$ ) на верхней границе области постоянных моментов. Приравнявая на границе  $Y_0$  вихревую вязкость  $\varepsilon = u_* \delta/\gamma$  в области следа вихревой вязкости в области постоянных моментов  $\varepsilon = (S\kappa y)^2 (du/dy)$ , вычисленной с помощью уточненной нами формулы Прандтля (12), и используя выражение (13) для градиента скорости, получаем для безразмерного параметра  $\gamma$  выражение  $\gamma = \sqrt{1 + (\delta/a)Y_0}/(S\kappa Y_0)$ , которое при  $\delta/a \rightarrow 0$  переходит в константу  $\gamma = 1/(\kappa Y_0) = 18.48$  для плоского ТПС, у которого  $Y_0 = 0.132$ .

Подставляя в (15) значение  $(u/u_*)_{Y=Y_0}$  по формуле (14), получим профиль средней скорости при  $Y > Y_0$ , то есть во внешней части ТПС (в области следа):

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{4Y_0}{(1 + \sqrt{1 + (\delta/a)Y_0})^2} + \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{\nu} + B(Z_a) + \frac{\sqrt{1 + (\delta/a)Y_0}}{S\kappa Y_0} \int_{Y_0}^Y \frac{(1 - Y^2)^2}{1 + (\delta/a)Y} dY. \quad (16)$$

Здесь обозначено

$$B(Z_a) = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + \alpha f_z Z_a})^2}{4\alpha f_z} + \frac{\alpha}{f_z}. \quad (17)$$

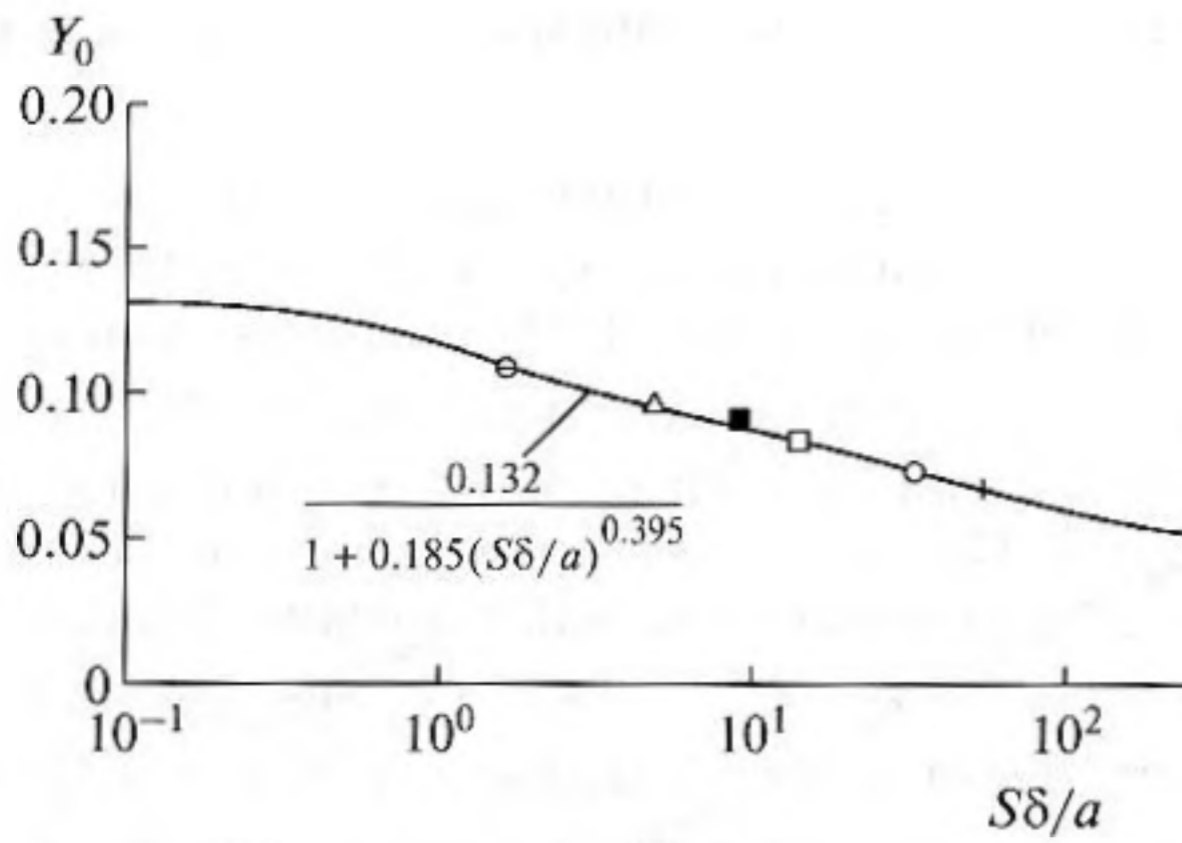


Рис. 3. Граница между областью постоянных моментов напряжений и областью следа по опытным данным [17].

○ —  $\delta/a = 1.76$ , △ — 4.7, ■ — 9.4, □ — 16, ○ — 27, + — 42.5.

Из (16) при  $Y = 1$  получаем значение скорости на верхней границе ТПС:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{4Y_0}{(1 + \sqrt{1 + Y_0(\delta/a)})^2} + \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{v} + B(Z_a) + \frac{\sqrt{1 + (\delta/a)Y_0}}{S\kappa Y_0} \int_{Y_0}^1 \frac{(1 - Y^2)^2}{1 + (\delta/a)Y} dY.$$

Введя обозначение

$$C(\delta/a) = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{4Y_0}{(1 + \sqrt{1 + (\delta/a)Y_0})^2} + \frac{\sqrt{1 + (\delta/a)Y_0}}{S\kappa Y_0} \int_{Y_0}^1 \frac{(1 - Y^2)^2}{1 + (\delta/a)Y} dY, \quad (18)$$

предыдущему уравнению можно придать форму

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{S\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{v} + B(Z_a) + C(\delta/a) \quad (19)$$

$$\text{или } \frac{\delta}{a} = Z_a \exp\{SZ - S\kappa[B(Z_a) + C(\delta/a)]\},$$

где обозначено  $Z = \kappa U/u_*$ .

Полученными формулами не представляется возможным воспользоваться до тех пор, пока не будет определена граница  $Y_0$  между областью постоянных моментов и областью следа ТПС на цилиндре. В плоском ТПС на пластине значение  $Y_0$  было получено путем измерений дефекта средней скорости  $(U - u)/u_*$ , который в области постоянных напряжений имеет форму  $(U - u)/u_* = -\kappa^{-1} \ln Y + 2.5$ . Эти измерения показали, что при  $Y \geq 0.132$  дефект  $(U - u)/u_*$  отклоняется от

функции  $\ln Y$ , и поэтому значение  $Y = Y_0 = 0.132$  считается границей между областью постоянных напряжений и областью следа ТПС на пластине.

Используя формулы (14) и (19), нетрудно показать, что дефект средней скорости ТПС на цилиндре в области постоянных моментов имеет форму

$$\frac{U - u}{u_*} = -\frac{1}{S\kappa} \ln \frac{4Y}{(1 + \sqrt{1 + (\delta/a)Y})^2} + C(\delta/a), \quad (20)$$

$$Y \leq Y_0.$$

При  $a \rightarrow \infty$  формула (20) переходит в только что упоминавшуюся формулу  $(U - u)/u_* = -\kappa^{-1} \ln Y + 2.5$  для плоской пластины.

Дефекты средней скорости ТПС на цилиндрах достаточно подробно измерялись в опытах [17] для нескольких значений  $\delta/a$ , и результаты измерений были графически представлены авторами в формате  $(U - u)/u_* = \phi(Y)$ . В данной работе эти результаты перестроены в соответствие с формулой (20) в функции от параметра  $(S\kappa)^{-1} \ln \left\{ 4Y / [1 + \sqrt{1 + (\delta/a)Y}]^2 \right\}$ , отклонения от которого функции  $(U - u)/u_*$  дает возможность определить величину  $Y_0$  для различных значений  $\delta/a$ . Аналитическая аппроксимация результатов обработки опытных данных [17] на основе формулы (20) имеет вид  $Y_0 = 0.132 / [1 + 0.185(S\delta/a)^{0.395}]$  (рис. 3), и эта зависимость наряду с полученными формулами (14)–(20) используется для вычисления профилей скорости  $u/u_*$  и дефекта скорости  $(U - u)/u_*$  с целью сравнения результатов расчета с экспериментальными данными.

Подробные измерения функций  $u/u_*$  и  $(U - u)/u_*$  на цилиндре выполнялись [18] в аэродинамической трубе. Моделью цилиндра служила стальная проволока диаметром 2 мм, расположенная параллельно натекающему потоку в закрытом рабочем участке аэротрубы. На рис. 4 и 5 показаны результаты этих измерений и результаты расчетов по настоящей теории. Видно, что теоретические и опытные данные хорошо согласуются друг с другом.

Следует отметить, что на рис. 4 и 5, так же как и на рис. 2, расчеты производились с использованием значений  $\delta/a$  и  $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ , полученных в опытах, с результатами которых сравниваются расчеты. Совпадение расчетных и экспериментальных результатов в данных ситуациях свидетельствует о правильности структуры расчетных формул на данном этапе построения теории. Однако законченная теория должна позволить получать все необходимые одноточечные характери-

стики пограничного слоя, в том числе относительную толщину пограничного слоя  $\delta/a$  и динамическую скорость  $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  для интересующих нас чисел Рейнольдса  $R_a = Ua/\nu$  и  $R_x = Ux/\nu$ , которые характеризуют радиус антенны  $a$ , скорость ее буксировки  $U$  и место расположения  $x$  приемников антенны. Для завершения теории необходимо проинтегрировать уравнения импульсов турбулентного пограничного слоя.

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Уравнение импульсов для осесимметричного ТПС имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}[ru_x(U - u_x)] + \frac{\partial}{\partial y}[ru_y(U - u_x)] = -(\varepsilon + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (21)$$

Здесь использована цилиндрическая система координат, в которой ось  $x$  совпадает с осью цилиндра и направлена вниз по потоку,  $r = a + y$  — расстояние от оси цилиндра по нормали к его поверхности (см. рис. 1),  $u_x, u_y$  — проекции средней скорости на соответствующие оси. По соображениям методологического характера обычно обе части уравнения (21) помножают на  $2\pi$ , после чего его интегрируют по координате  $r$  в пределах от поверхности цилиндра ( $r = a$ ) до внешней границы ТПС ( $r = a + \delta$ ):

$$U^2 \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^{a+\delta} 2\pi \frac{u_x}{U} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) r dr \right\} + 2\pi r u_y (U - u_x) \Big|_a^{a+\delta} = -2\pi(\varepsilon + \nu) r \frac{du_x}{dr} \Big|_a^{a+\delta} \quad (22)$$

Структура интеграла в левой части уравнения (22) аналогична структуре интеграла для толщины потери импульса в плоском ТПС, но имеет размерность не длины, а площади. Поэтому этот интеграл естественно назвать “площадью потери импульса”. Обозначив площадь потери импульса символом  $\Delta^{**}$ , запишем

$$\Delta^{**} = 2\pi \int_a^{a+\delta} \frac{u_x}{U} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) r dr. \quad (23)$$

Эта площадь занимает поверхность кольца, опоясывающего цилиндр, и имеющего внутренний и наружный радиусы, равные соответственно  $a$  и  $a + \delta^{**}$ , где  $\delta^{**}$  — толщина потери импульса. Сле-

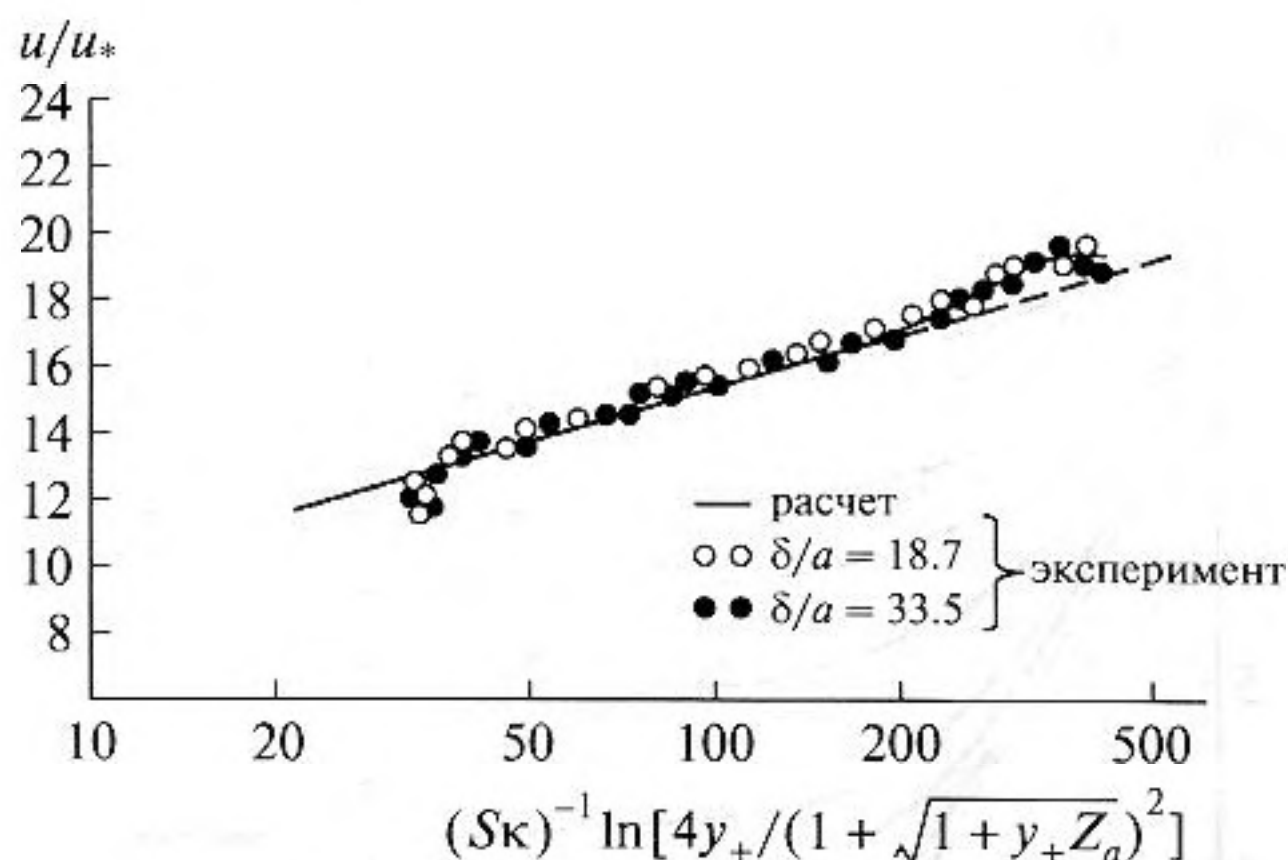


Рис. 4. Профиль средней скорости в области постоянных моментов. Эксперимент [18] и расчет.

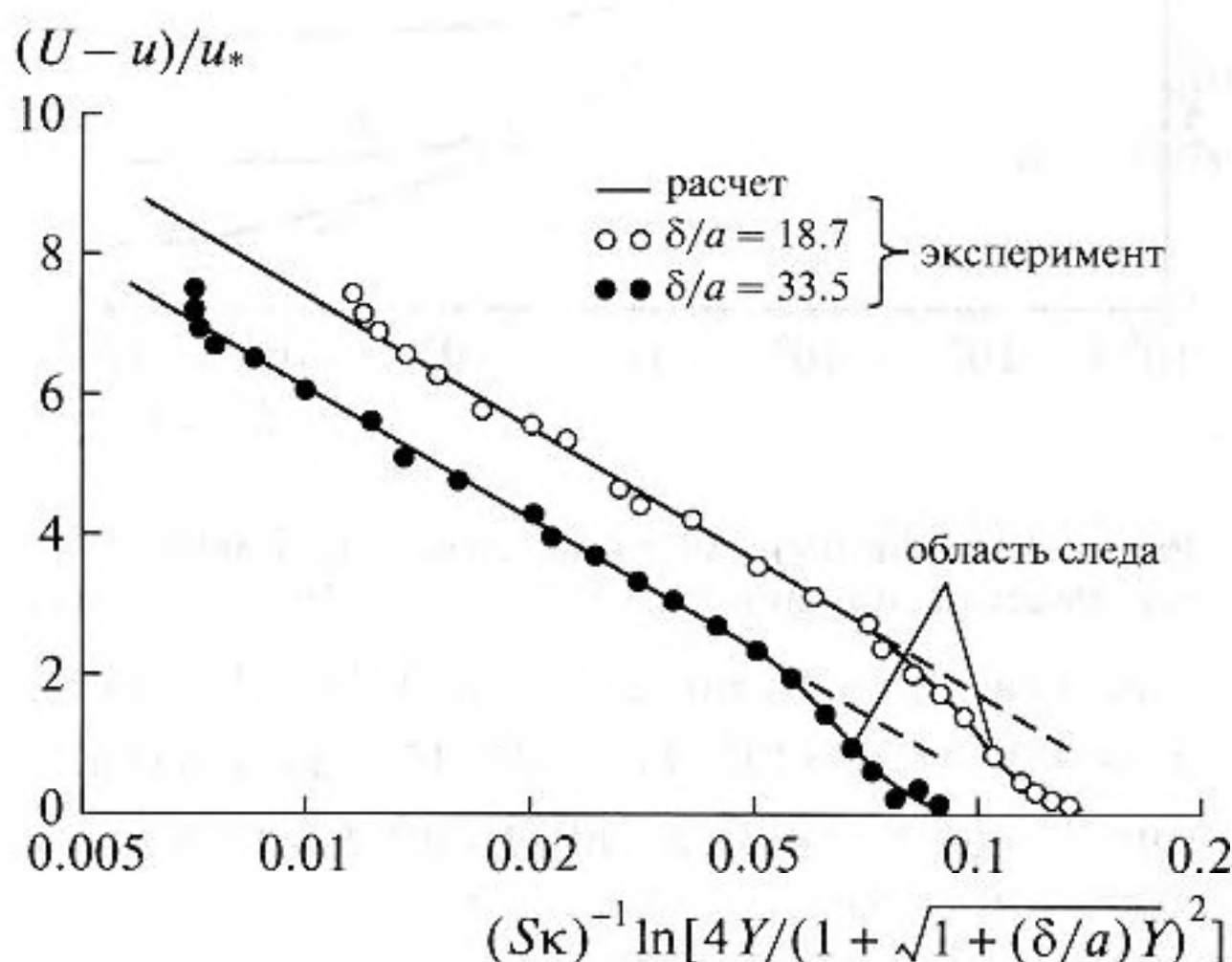


Рис. 5. Дефект средней скорости в области постоянных моментов. Эксперимент [18] и расчет.

довательно,  $\Delta^{**} = \pi[(a + \delta^{**})^2 - a^2] = \pi[(\delta^{**})^2 + 2a\delta^{**}]$  и

$$2 \int_a^{a+\delta} \frac{u_x}{U} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) r dr = (\delta^{**})^2 + 2a\delta^{**}. \quad (24)$$

Аналогично для осесимметричного ТПС вводится понятие “площади вытеснения”  $\Delta^*$ , распределенной по кольцу шириной, равной толщине вытеснения  $\delta^*$ , следовательно

$$2 \int_a^{a+\delta} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) r dr = (\delta^*)^2 + 2a\delta^*. \quad (25)$$

Возвращаясь к формуле (22), заметим, что второй член в левой части этой формулы равен нулю, потому что если  $r = a + \delta$ , то  $u_x = U$ , а если  $r = a$ , то  $u_y = 0$ . В правой части уравнения если  $r = a + \delta$ , то  $du_x/dr = 0$ , а если  $r = a$ , то вихревая вязкость

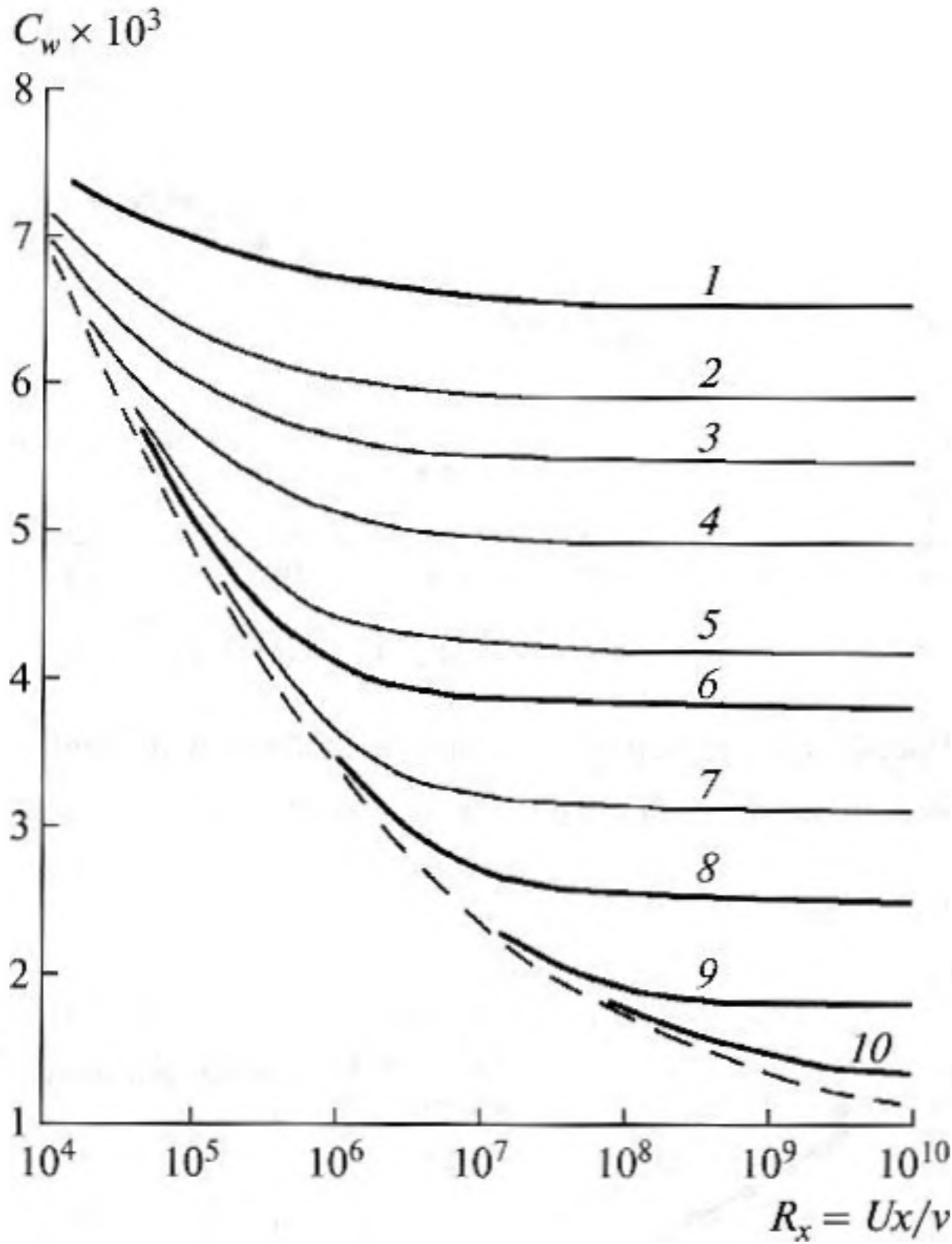


Рис. 6. Коэффициент местного трения на поверхности пластины и цилиндра.

Пластина — — —. Цилиндр: 1 —  $R_a = 10^3$ , 2 —  $1.5 \times 10^3$ , 3 —  $2 \times 10^3$ , 4 —  $3 \times 10^3$ , 5 —  $6.345 \times 10^3$  (как в опытах [19]), 6 —  $10^4$ , 7 —  $3 \times 10^4$ , 8 —  $10^5$ , 9 —  $10^6$ , 10 —  $10^7$ .

равна нулю ( $\varepsilon = 0$ ) и, следовательно, этот член равен  $2\pi a\nu (du_x/dr)_{r=a} = 2\pi a\tau_w/\rho = 2\pi a u_*^2$ . Теперь уравнение (22) с учетом уравнения (23) принимает вид  $d\Delta^{**}/dx = 2\pi a(u_*/U)^2$ . Воспользовавшись ранее введенным обозначением  $Z = \kappa U/u_*$ , запишем последнее уравнение в форме  $dx = a(Z/\kappa)^2 d\Delta^{**}$ , где безразмерная площадь потери импульса  $\overline{\Delta^{**}} = (\Delta^{**}/a^2)/2\pi$  равна

$$\overline{\Delta^{**}} = \int_0^{\delta/a} \frac{u_x}{U} \left(1 - \frac{u_x}{U}\right) \left(1 + \frac{y}{a}\right) d\left(\frac{y}{a}\right). \quad (26)$$

Помножая обе части уравнения  $dx = a(Z/\kappa)^2 d\overline{\Delta^{**}}$  на  $(U/\nu)$  и интегрируя это уравнение, а также принимая во внимание, что  $\overline{\Delta^{**}} = 0$  при  $x = 0$ , будем иметь

$$R_x = \frac{R_a}{\kappa^2} \int_0^{\overline{\Delta^{**}}} Z^2 dS, \quad (27)$$

где  $dS$  означает приращение безразмерной площади потери импульса (26). При выполнении интегрирования по формуле (27) в качестве начальных значений берутся заведомо малые величины  $(\delta/a)_0 < 0.1$ , при которых ТПС можно считать таким же, как на плоской пластине. При заданном значении  $R_a$  по формуле (19) определяется начальная величина  $Z_0$ , соответствующая величине  $(\delta/a)_0$ . По известной формуле Фолкнера для плоского ТПС находится начальное значение числа Рейнольдса  $(R_x)_0 = (0.0263/2)^7 (Z_0/\kappa)^{14}$ , а по формуле (26) — начальное значение  $(\overline{\Delta^{**}})_0$ . Так что интеграл (27) принимает форму

$$R_x = (R_x)_0 + \frac{R_a}{\kappa^2} \int_{\overline{\Delta^{**}}_0}^{\overline{\Delta^{**}}} Z^2 dS.$$

В процессе вычислений величина  $\delta/a$  постепенно увеличивается. Для очередного значения  $\delta/a$  по формуле (19) находится соответствующее значение  $Z = \kappa U/u_* = \kappa\sqrt{2/c_w}$  (здесь  $c_w = \tau_w/(\rho U^2/2)$  — коэффициент поверхностного трения). По формулам (24), (25) и (26) вычисляются площади и толщины вытеснения и потери импульса, затем этот процесс повторяется для другого значения  $\delta/a$ . Весь процесс интегрирования от минимальных значений  $R_x = (R_x)_0$  до максимальных (которые могут встретиться на практике) значений  $R_x \approx 10^{10} - 10^{11}$ , занимает около 10–15 секунд для каждого из заданных значений  $R_a$ .

На рис. 6 показана зависимость коэффициента трения  $c_w$  от числа Рейнольдса  $R_x = xU/\nu$  для различных чисел Рейнольдса  $R_a = aU/\nu$ . Пунктирная кривая на рис. 6 представляет собой результаты расчета по программе для плоского ТПС, которая совпадает с совокупностью известных опытных данных. Можно видеть, что результаты для осесимметричного ТПС отклоняются от результатов для плоского ТПС тем раньше, чем меньше число Рейнольдса  $R_a = aU/\nu$ , то есть, чем тоньше цилиндр. Напротив, для очень толстых цилиндров, например, для  $R_a = 10^7$ , отклонения от результатов для плоского ТПС практически отсутствуют. Там, где эти отклонения наблюдаются, коэффициент трения  $c_w$  для осесимметричного ТПС всегда больше, чем для плоского ТПС при одинаковых числах  $R_x = xU/\nu$ . Превышение коэффициента трения для осесимметричного ТПС тем значительнее, чем меньше число  $R_a = aU/\nu$ , то есть, чем тоньше цилиндр. При больших  $R_x$  наблюдается тенденция к насыщению величины коэффициента трения, когда его уменьшение с ростом  $R_x$  практически прекращается, что на-

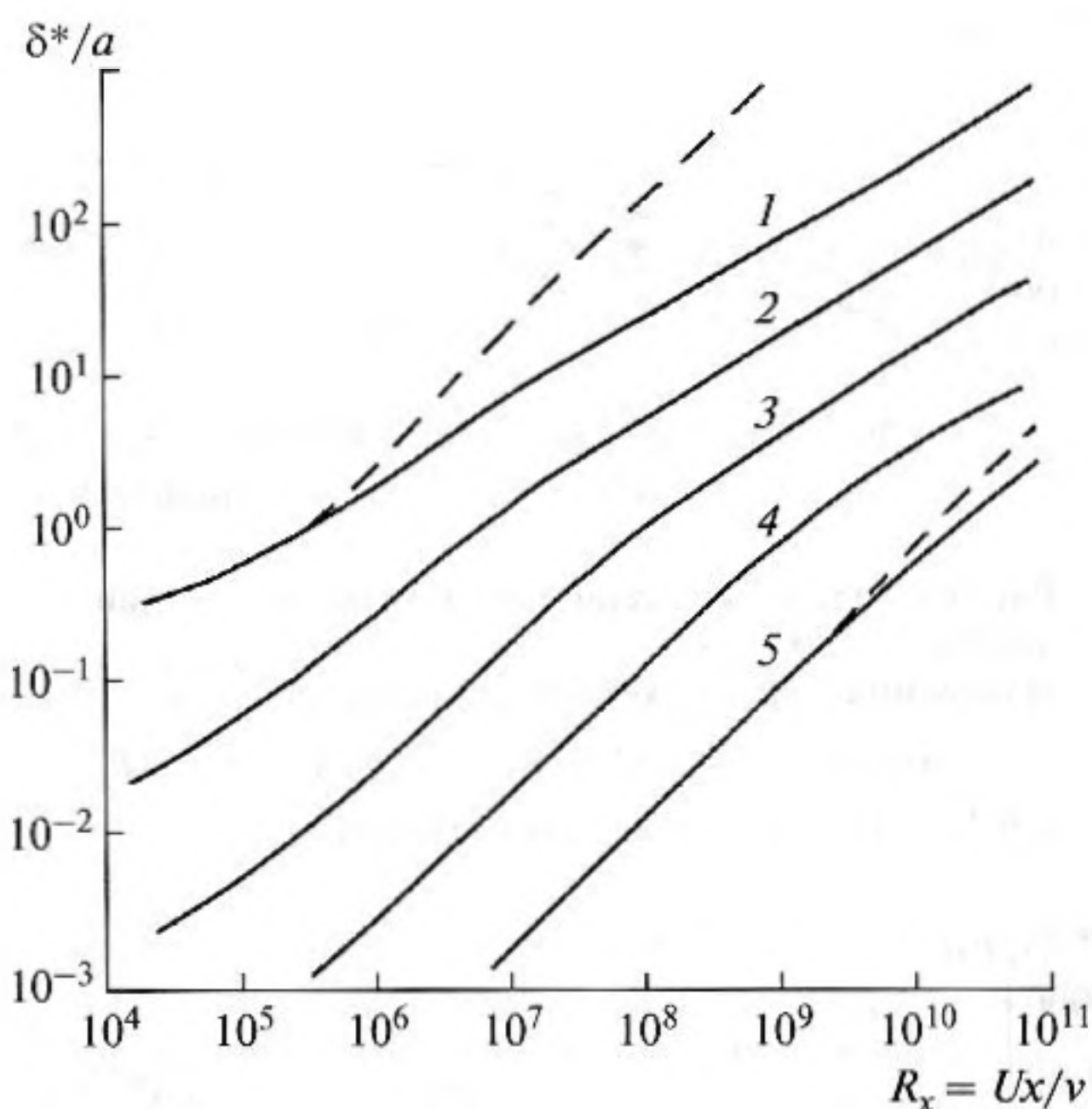
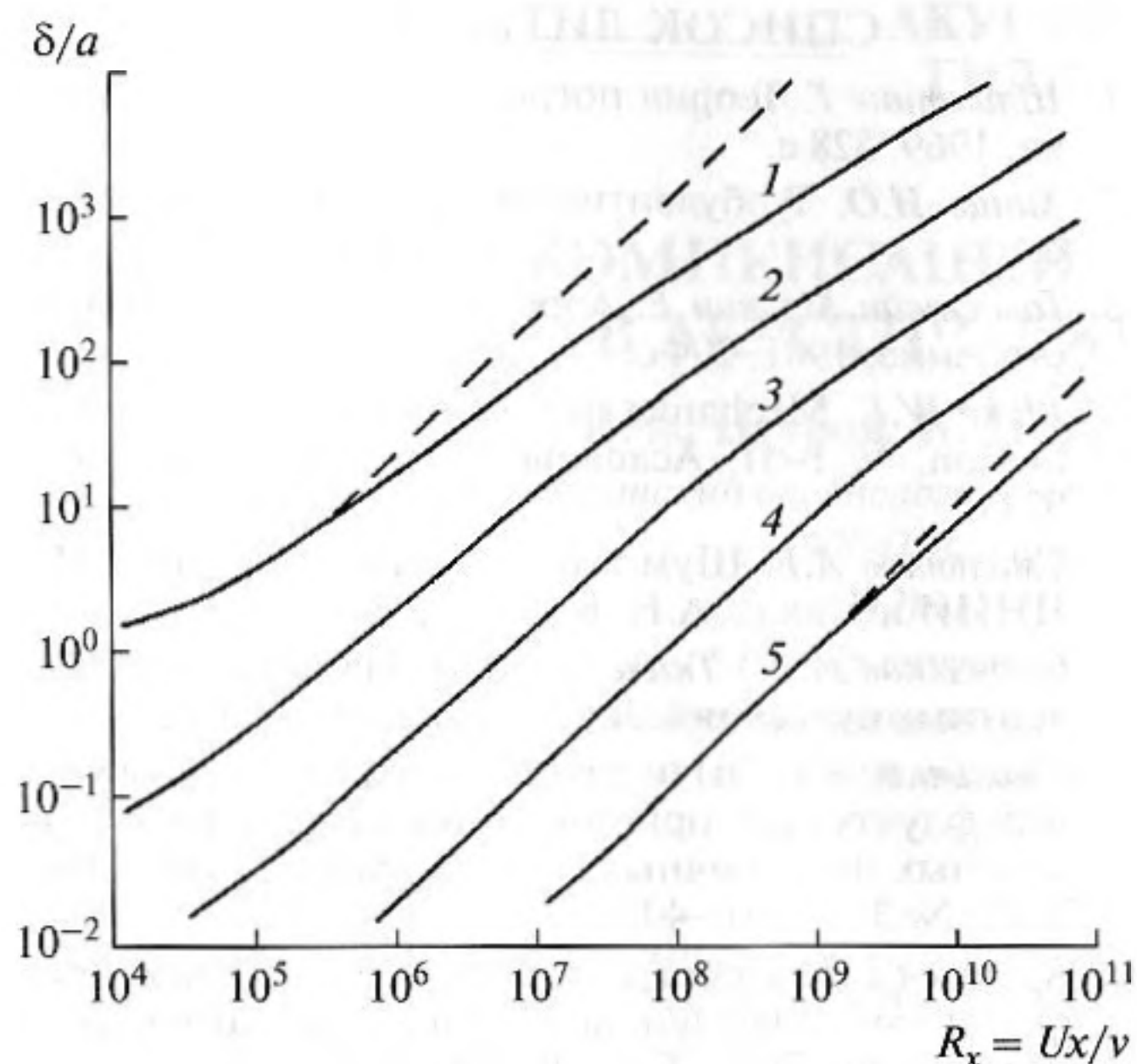


Рис. 7. Относительная толщина пограничного слоя на пластине и на цилиндре. Пластина — — —. Цилиндр: 1 —  $R_q = 10^3$ , 2 —  $10^4$ , 3 —  $10^5$ , 4 —  $10^6$ , 5 —  $10^7$ .

Рис. 8. Относительная толщина вытеснения на пластине и на цилиндре. (Обозначения как на рис. 7).

блюдалось в некоторых экспериментальных работах.

На рис. 7, 8 и 9 показаны зависимости относительной толщины пограничного слоя  $\delta/a$ , относительных толщин вытеснения  $\delta^*/a$  и потери импульса  $\delta^{**}/a$  от чисел Рейнольдса  $R_x$  и  $R_q$ . Анализ данных, представленных на этих рисунках, свидетельствует о том, что на цилиндре все характерные толщины пограничного слоя с увеличением числа Рейнольдса  $R_x$  растут медленнее, чем на пластине. Эта разница особенно велика при малых числах  $R_q$  (на тонких цилиндрах). Однако при больших числах  $R_q$  (на толстых цилиндрах) темп роста характерных толщин приближается к темпам роста толщин на пластине.

На рис. 10 сравниваются результаты вычислений по данной теории размерной толщины потери импульса  $\delta^{**}$  с результатами измерений [19] этой величины на конце цилиндрических макетов, имеющих различные длины в диапазоне  $L \approx (16-160)$  м. и одинаковый диаметр  $d = 2a = 0.89$  мм. Макеты буксировались со скоростью  $U = 2.1$  м/с и  $U = 14.4$  м/с в опытовом бассейне в воде ( $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с). Видно, что результаты вычислений хорошо согласуются с результатами измерений.

На рис. 11 показаны результаты измерений [19] толщины потери импульса  $\delta^{**}$ , нормированной комплексом  $(\nu/u_*)$ , в зависимости от числа

Рейнольдса  $R_{\delta^{**}} = U\delta^{**}/\nu$ , а также результаты расчетов по данной теории. Нетрудно показать, что отношение  $\delta^{**}/(\nu/u_*)$  равно  $(\sqrt{c_w/2})R_{\delta^{**}}$ . В том диапазоне чисел Рейнольдса, в котором производился эксперимент [19], величина  $\sqrt{c_w/2}$  изменяется в соответствии с данной теорией не более, чем на 0.6% (кривая 5 на рис. 6). Поэтому вы-

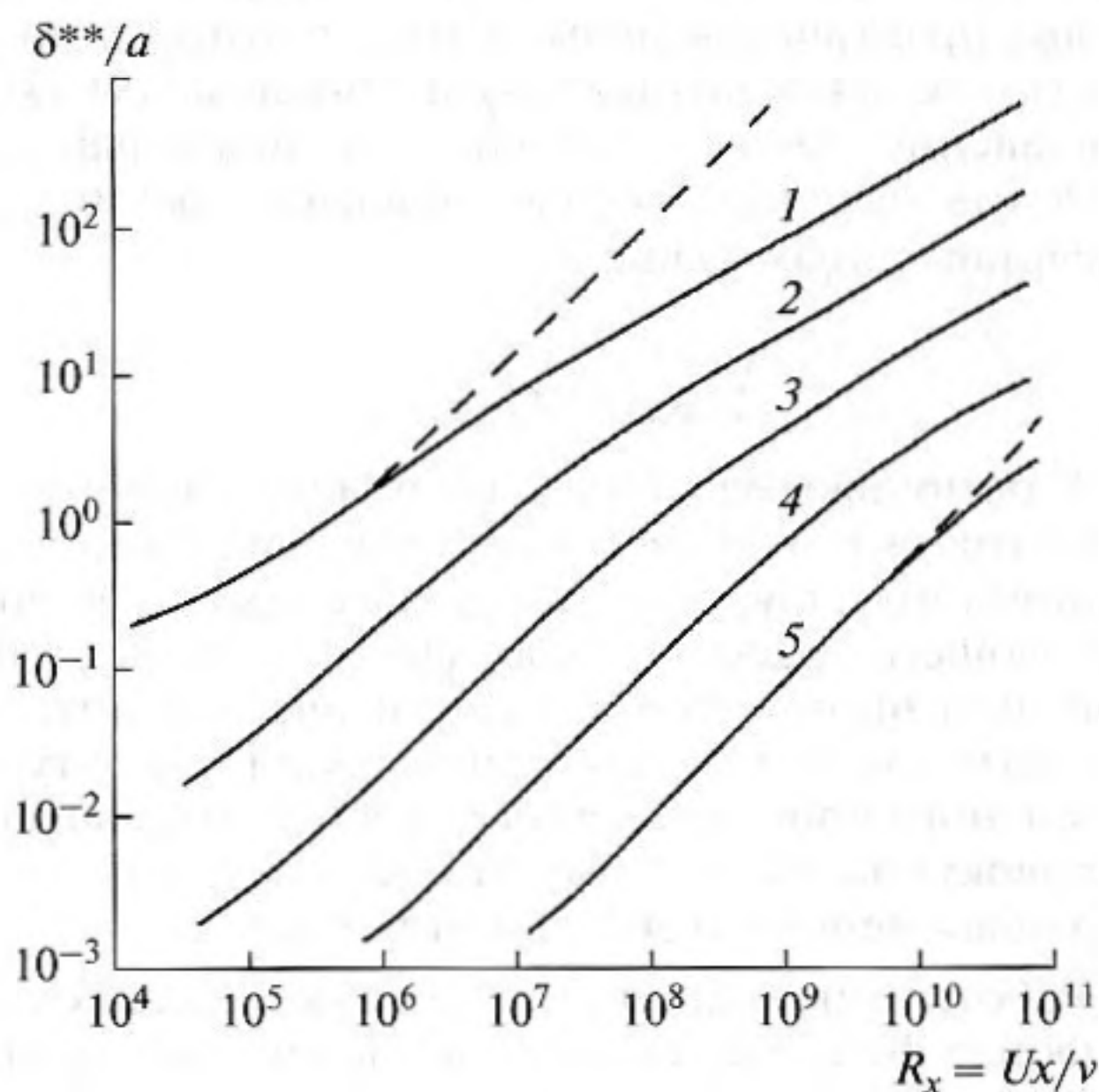


Рис. 9. Относительная толщина потери импульса на пластине и на цилиндре. (Обозначения как на рис. 7).

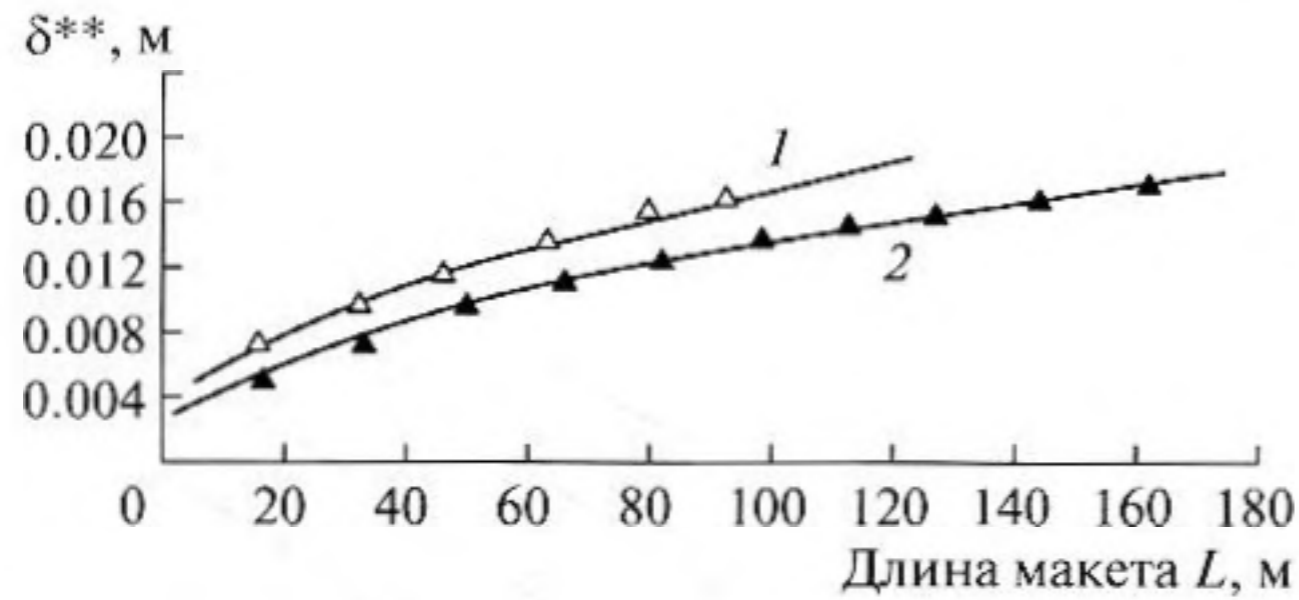


Рис. 10. Толщины потери импульса на конце цилиндрических макетов.

Измерения [19]: 1 – скорость буксировки макетов  $U = 2.1$  м/с ( $R_a = 9.25 \times 10^2$ ), 2 –  $U = 14.4$  м/с ( $R_a = 6.345 \times 10^3$ ). Расчет для этих условий —.

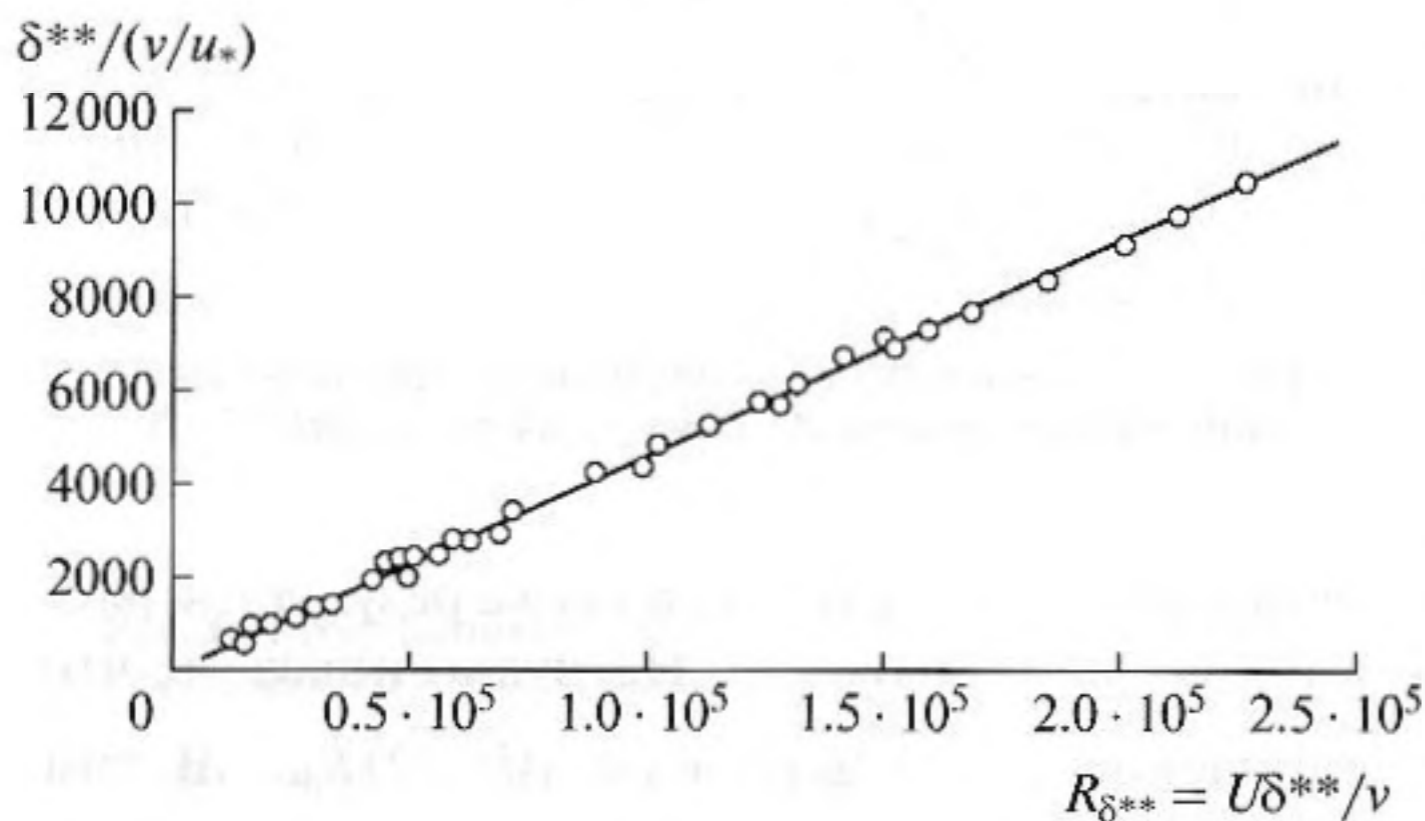


Рис. 11. Безразмерная толщина потери импульса. Измерения [19] ○. Расчет —.

численная функция  $\delta^{**}/(\nu/u_*) = (\sqrt{c_w/2})R_{\delta^{**}}$  имеет вид практически прямой линии, которая полностью совпадает с опытными данными [19]. Это совпадение также подтверждает правильность расчетов величины коэффициентов трения  $c_w$ , представленных на рис. 6.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью разработанной теории легко определяются все одноточечные характеристики пограничного слоя, которые необходимы для последующего расчета турбулентных пульсаций давления на поверхности геофизической антенны, создающих гидродинамическую помеху турбулентного происхождения ее работе. Имеющаяся совокупность опытных данных свидетельствует о правомерности созданной теории.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 09-08-00020-а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматлит 1963. 680 с.
3. Голдстейн Мэрвин Е. Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
4. Blake W.K. Mechanics of flow-induced sound and vibration, V. I–II. Academic Pres. New York, 1986. 974 с.
5. Смольяков А.В. Шум турбулентных потоков. СПб. ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 312 с.
6. Смольяков А.В., Ткаченко В.М. Измерение турбулентных пульсаций. Л.: Энергия, 1980. 264 с.
7. Смольяков А.В. Вычисление спектров псевдозвуковых флуктуаций пристеночных давлений в турбулентных пограничных слоях // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 401–407.
8. Кудашев Е.Б. Пространственная фильтрация пристеночных турбулентных пульсаций давления // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 715–723.
9. Кудашев Е.Б. Пространственная фильтрация пристеночных турбулентных пульсаций давления. Методы прямых измерений частотно-волновых спектров // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 1. С. 118–126.
10. Кудашев Е.Б. Экспериментальные исследования шумов обтекания на всплывающем устройстве // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 488–499.
11. Смольяков А.В. Шум турбулентного пограничного слоя на гладкой и шероховатой пластине при малых числах Маха // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 2. С. 264–272.
12. Ткаченко В.М., Смольяков А.В., Колышницын В.А., Маршов В.П. Турбулентные пульсации давления в пограничном слое протяженного цилиндра при его продольном обтекании // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 263–267.
13. Смольяков А.В. Новая модель взаимного и частотно-волнового спектров турбулентных пульсаций давления в пограничном слое // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 393–400.
14. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Турбулентные пристеночные пульсации давления. М.: Научный мир, 2007. 223 с.
15. Федяевский К.К. Турбулентный пограничный слой крыла // Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 316. С. 1–50.
16. Luepton R.M., Leechey P., Stellingner T. // J. Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3495–3505.
17. Willmarth W.W., Winkel R.E., Sharma L.K., Bogar T.J. Axially symmetric turbulent boundary layers on cylinders: mean velocity profiles and wall pressure fluctuations // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. P. 35–64.
18. Коваленко В.М., Шулемович В.М. Турбулентный пограничный слой на длинной тонкой нити // Изв. СО АН СССР. 1973. Вып. 1. № 3. С. 56–67.
19. Cipolla K.M., Keith W.L. High Reynolds number thick axisymmetric turbulent boundary layer measurements // J. Experiments in Fluids. 2003. V. 35. № 1. P. 477–485.