

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26, 51-73

ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ РЕШЕТКОЙ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ИМПЕДАНСНЫХ ЭКРАНОВ

© 2025 г. Н. Г. Канев^{a,b,*}, А. Р. Долгер^b

^aАкустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

^bМосковский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 31.08.2025 г.

После доработки 23.09.2025 г.

Принята к публикации 06.11.2025 г.

Рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны на дифракционной решетке, составленной из полубесконечных тонких экранов, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга. Показано, что при некоторых значениях импеданса поверхности экранов решетка полностью отражает падающую под любым углом волну. Полученный результат представляется полезным для разработки звукоизолирующих продуваемых конструкций.

Ключевые слова: дифракция, дифракционная решетка, импеданс, полубесконечный экран

DOI: 10.7868/S3034500625060015

В ряде практических задач по борьбе с шумом требуются препятствия, обладающие, с одной стороны, хорошими звукоизолирующими свойствами, а с другой стороны, они должны обеспечивать прохождение воздуха или другой среды, т.е. быть вентилируемыми. Техническая реализация таких требований осуществляется использованием шумозащитных экранов, составленных из ламелей — одинаковых пластин, образующих регулярную структуру. Экспериментальные исследования экранов ламельного типа показывают, что значительная эффективность снижения шума достигается за счет диссипативных свойств поверхности ламелей [1–3]. В этом случае с физической точки зрения ламельный экран эквивалентен пластинчатому глушителю, широко используемому для уменьшения передачи шума в каналах большого сечения [4]. Акустические свойства такого экрана должны быть оптимизированы так, чтобы достичь наибольшего затухания звука при его распространении между ламелями.

Представляет интерес рассмотреть иной подход к выбору акустических свойств ламелей. Представим бесконечную периодическую решетку ламелей, достаточно длинных, чтобы пространство между двумя соседними ламелями можно было рассматривать как волновод. Пусть на решетку с одной стороны падает звуковая волна. Если импеданс ламелей таков, что в волно-

воде не существуют однородные моды, то звук в нем будет экспоненциально затухать. А если при этом ламели не обладают диссипативными свойствами, то звуковая энергия не будет проникать в структуру и, по закону сохранения энергии, будет полностью отражаться от нее. В настоящей работе этот физически ясный эффект исследован теоретически.

Задача о дифракции волн различной природы на периодических структурах тонких экранов исследована достаточно подробно в классических книгах и статьях [5–9], где рассмотрены экраны с идеальными поверхностями. Интересно, что подобная постановка задачи актуальна для расчета волнорезов [9, 10] и распространения звука в структурах с трещинами [11–13]. Однако, внимание исследователей к влиянию граничных условий на поверхности экранов сегодня невелико.

Рассмотрим решетку полубесконечных тонких экранов с периодом L (рис. 1), расположенную в упругой среде с плотностью ρ и скоростью звука c . Экрану с номером n соответствуют координаты $x_n = (n + 1/2)L$, $z > 0$. Обе поверхности каждого экрана описываются безразмерным импедансом Z . Волноводу, образованному экранами, начинающимися в точках x_n и x_{n-1} , присвоим номер n .

Пусть на решетку под углом θ падает плоская гармоническая звуковая волна $Ae^{i\xi_0 x + ik_0 z}$ с частотой ω , где A — амплитуда звукового давления, ξ_0

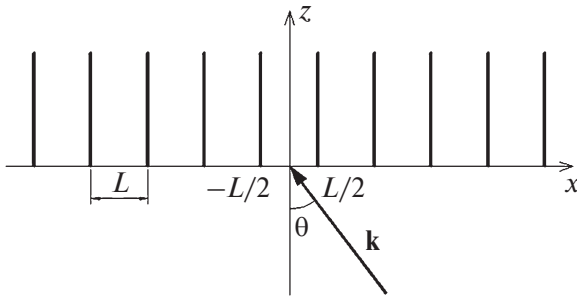


Рис. 1. Постановка задачи о дифракции плоской звуковой волны на решетке полубесконечных экранов.

и κ_0 – проекции волнового вектора \mathbf{k} на оси x и z соответственно. В силу теоремы Флоке поле в полупространстве $z < 0$ может быть представлено в виде брэгговских спектров

$$P = Ae^{i\xi_0 x + i\kappa_0 z} + \sum_m A_m e^{i\xi_m x - i\kappa_m z}, \quad (1)$$

где m – целое число, $\xi_m = k \sin \theta + 2\pi m/L$, $\xi_m^2 + \kappa_m^2 = k^2$, $k = \omega/c$, A_m – неизвестные амплитуды рассеянных плоских волн.

Звуковое поле в n -м волноводе может быть представлено в виде набора собственных функций [14]:

$$p_n = e^{i\xi_0 L n} \sum_m a_m \varphi_m(\xi_m x) e^{i\tau_m z}, \quad (2)$$

где $\varphi_m(x) = \text{ch}(x)$ при $m = 0, 2, 4, \dots$ и $\varphi_m(x) = \text{sh}(x)$ при $m = 1, 3, 5, \dots$, ζ_m – корни характеристического уравнения $\zeta \text{th}(\zeta L/2) = ik/Z$ при $m = 0, 2, 4, \dots$ и $\zeta \text{cth}(\zeta L/2) = ik/Z$ при $m = 1, 3, 5, \dots$, $\tau_m = \sqrt{k^2 + \zeta_m^2}$, Z – импеданс поверхности экранов.

На отрезке $z = 0$, $-L/2 < x < L/2$ выполняются граничные условия $P = p_0$ и $\partial P/\partial z = \partial p_0/\partial z$, которые дают следующие уравнения

$$Ae^{i\xi_0 x} + \sum_m A_m e^{i\xi_m x} = \sum_m a_m \varphi_m(\zeta_m x), \quad (3)$$

$$A\kappa_0 e^{i\xi_0 x} - \sum_m A_m \kappa_m e^{i\xi_m x} = \sum_m a_m \tau_m \varphi_m(\zeta_m x). \quad (4)$$

На краях экранов выполняется условие Мейкснера, накладываемое на сращиваемые ряды (1) и (2). Искомое решение должно удовлетворять условию [15, 16]

$$P = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad p_n = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad (5)$$

$$r \rightarrow 0,$$

где r – расстояние до кромки, ε – положительное число.

Умножая уравнения (3) и (4) на $e^{-i\xi_n x}$ и интегрируя их по x , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A\delta_n + A_n = \frac{1}{2} \sum_m a_m f_m(\xi_n), \\ A\kappa_0 \delta_n - A_n \kappa_n = \frac{1}{2} \sum_m a_m \tau_m f_m(\xi_n), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$f_m(\xi_n) = \frac{\text{sh} \frac{i\xi_n + \zeta_m}{2} L}{(i\xi_n + \zeta_m)L} \mp \frac{\text{sh} \frac{i\xi_n - \zeta_m}{2} L}{(i\xi_n - \zeta_m)L},$$

где верхний знак берется для $m = 1, 3, 5, \dots$, а нижний для $m = 0, 2, 4, \dots$.

Исключая переменные A_n из (6), находим систему уравнений для амплитуд мод в волноводе

$$\sum_m a_m (\tau_m + \kappa_n) f_m(\xi_n) = 4A\kappa_0 \delta_n, \quad (7)$$

где $\delta_0 = 1$ и $\delta_{n \neq 0} = 0$.

Согласно методу редукции решения бесконечных систем линейных уравнений [17] можно ограничить количество неизвестных в (6) и найти решение численно. Исследование (6) проведем для случая решетки, период которой менее половины длины звуковой волны. В этом случае только нулевой спектр в (1) является однородным, а коэффициент отражения равен

$$V = \frac{1}{2A} \sum_m a_m f_m(\xi_n) - 1. \quad (8)$$

Приведем решение задачи для нескольких случаев. В первую очередь сравним коэффициент отражения для экранов с некоторыми характерными импедансами. Во-первых, рассмотрим абсолютно жесткие экраны, их импеданс равен $Z = \infty$. Во-вторых, проанализируем экраны с импедансом $Z = 1$, соответствующим абсолютно поглощающей поверхности при нормальном падении. В-третьих, рассмотрим оптимальный импеданс $Z = kL(0.148 + 0.118i)$, при котором коэффициент затухания звука в канале наибольший [14, 18]. На рис. 2 представлена зависимость абсолютного значения коэффициента отражения (8) от угла падения плоской волны для периода решетки $kL = 1$.

Решетка жестких экранов не отражает волну, нормально падающую на решетку, но с увеличением угла падения коэффициент отражения увеличивается, достигая 1 при скользком падении. Импедансные экраны эффективнее отражают звук, но при нормальном падении коэффициент отражения минимален. Отметим, что при любом импедансе коэффициент отражения скользкой волны равен $V \approx -1$, что для общей границы с произвольным импедансом показано в [19], а для решетки поглощающих экранов исследовано в [16].

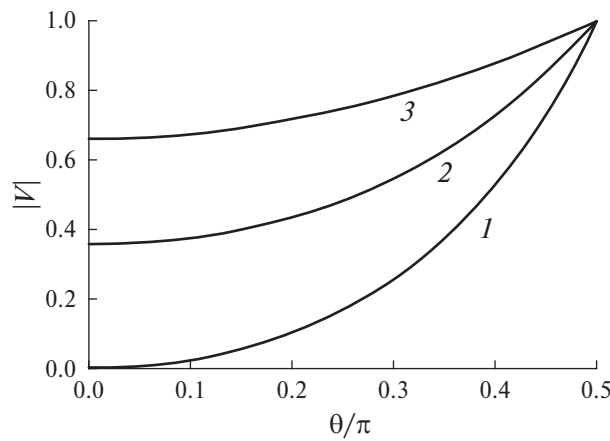


Рис. 2. Коэффициент отражения от решетки экранов с периодом $kL = 1$ и импедансом $Z = \infty$ (1), $Z = 1$ (2), $Z = 0.148 + 0.118i$ (3).

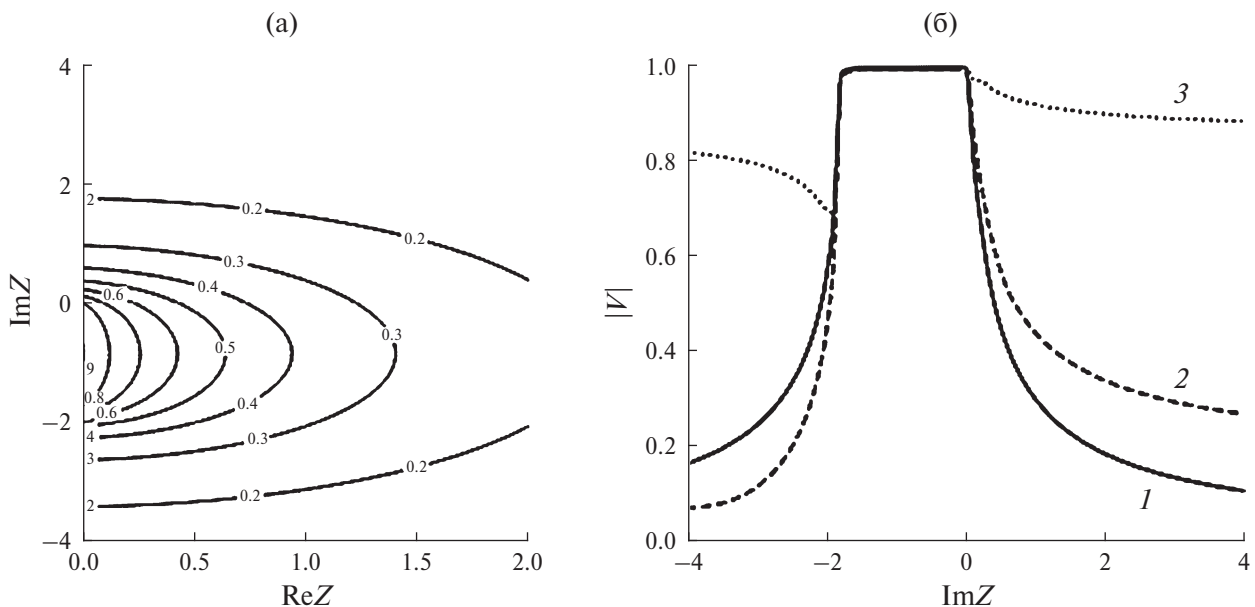


Рис. 3. Коэффициент отражения $|V|$ от решетки экранов с периодом $kL = 1$: (а) – линии равных значений в зависимости от импеданса Z при нормальном падении волны; (б) – для мнимого импеданса ($\text{Re} Z = 0$) при углах падения $\theta = 0$ (1), $\theta = \pi/4$ (2), $\theta = \pi/2.1$ (3).

Далее рассчитаем коэффициент отражения для экрана с произвольным импедансом. На рис. 3а приведена зависимость $|V|$ от Z для решетки с периодом $kL = 1$ при нормальном падении, которая показывает, что наибольшее отражение достигается при мнимом значении импеданса. Модуль коэффициента отражения приближается к 1 при отрицательных значениях $\text{Im} Z$, т.е. для максимального отражения импеданс поверхности экранов должен быть массового типа [19]. Расчет для мнимого импеданса, т.е. для $\text{Re} Z = 0$, для трех углов падения представлен на рис. 3б. При любом угле падения полное отражение волны от решетки происходит при импедансе $-1.8 < \text{Im} Z < 0$.

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента отражения от решетки экранов с реактивным импедансом для трех периодов решетки $kL = 0.5, 1, 2$ и двух углов падения волны $\theta = 0, \pi/4$. С увеличением периода решетки диапазон зна-

чений $\text{Im} Z$, при которых решетка отражает звук, сужается, при этом он не зависит от угла падения волны.

В цели настоящей работы не входит поиск аналитического решения системы уравнений (3) и (4), поэтому проверку выполнения условия на кромке экрана (5) проведем на основе результатов проведенных расчетов. Из решения характеристического уравнения известно [18], известно, что $\zeta_m L = i\lambda m$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому $|\varphi_m| \leq 1$ в (2). Очевидно, что условие (5) выполняется, если корни a_m уменьшаются быстрее, чем m^{-1} . Рассмотрим экран с периодом $kL = 1$ и импедансом $Z = -i$ и асимптотику решений системы (7). На рис. 5 точками представлены корни системы из первых 1000 уравнений системы (7) для трех углов падения волны, линиями – асимптотические зависимости. При нормальном падении $a_m \sim m^{-2}$, а при наклонном и скользящем

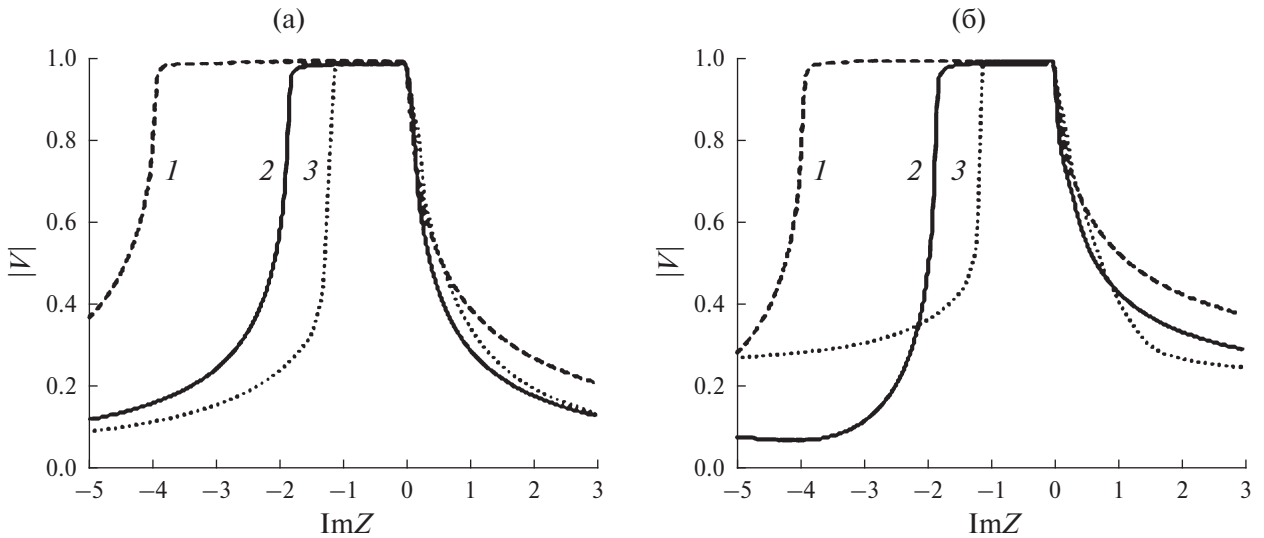


Рис. 4. Коэффициент отражения $|V|$ от решетки реактивных экранов ($\text{Re } Z = 0$) с периодом $kL = 0.5$ (1), $kL = 1$ (2) и $kL = 2$ (3): (а) – при нормальном падении волны; (б) – при угле падения $\theta = \pi/4$.

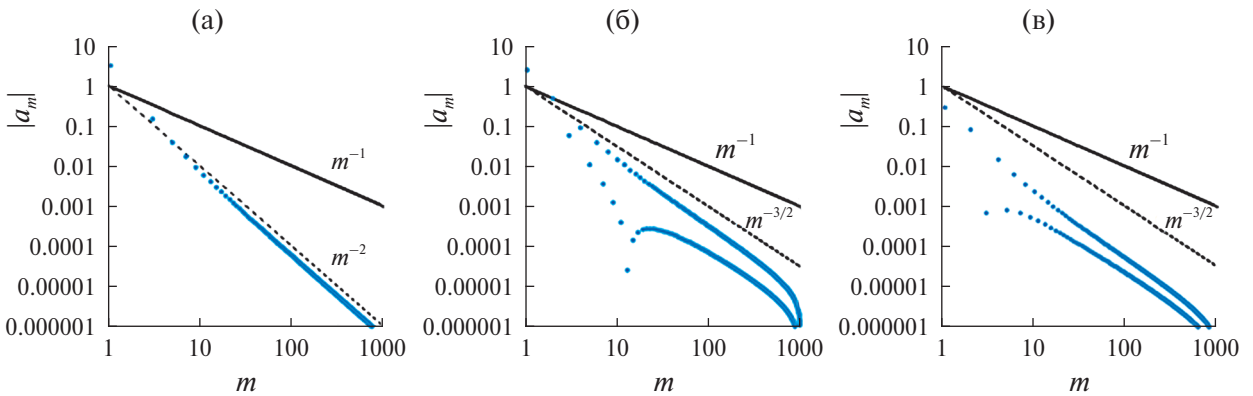


Рис. 5. Решение системы (7) для первых 1000 уравнений при углах (а) – $\theta = 0$, (б) – $\theta = \pi/4$, (в) – $\theta = \pi/2.1$.

падении $a_m \sim m^{-3/2}$. Следовательно, условие на кромке (5) выполняется.

Расчеты показали, что существует диапазон значений импеданса экранов

$$\text{Re } Z = 0, \quad -Y < \text{Im } Z < 0, \quad (9)$$

при которых решетка является отражающей. При этих значениях импеданса во всех волноводах не существуют однородные моды, т.е. волноводы оказываются запертыми, что имеет место при волноводной изоляции [20, 21]. Реализация такого импеданса может быть осуществлена, например, с помощью плоской решетки резонаторов Гельмгольца, импеданс которой на частотах выше резонансной имеет массовый характер [19].

Найдем значение Y , определяющее диапазон импедансов, при которых решетка оказывается запертой для падающей волны. Для этого достаточно вычислить корни характеристического уравнения волновода с импедансными стенками для нулевой моды. На рис. 6 представлена зависимость нижнего граничного значения импедан-

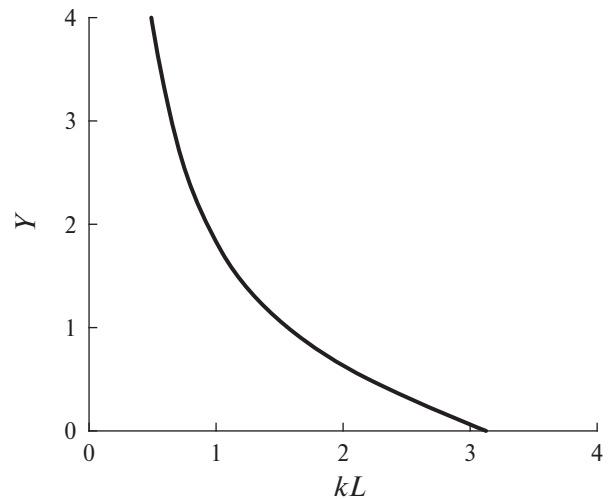


Рис. 6. Граничное значение импеданса Y в зависимости от периода решетки.

са Y от периода решетки. С увеличением периода решетки диапазон интересующих нас значений импеданса сужается, при этом он не зависит

от угла падения волны. Если расстояние между экранами превышает половину звуковой волны, то при любом значении импеданса Z коэффициент отражения $|V|$ меньше 1.

Итак, в настоящей работе найдены акустические свойства экранов, составляющих бесконечную периодическую дифракционную решетку, при которых решетка полностью отражает падающую на нее звуковую волну. Показано, что полное отражение возможно только в том случае, когда период решетки не превышает половины длины звуковой волны. Для решения практических вопросов по расчету снижения шума экранами ламельного типа необходимо результаты настоящей работы применить для решетки, составленной из экранов конечной длины и толщины.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 25-79-31027, <https://rscf.ru/project/25-79-31027/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lyons R. Sound insulation of acoustic louvre and open screens // *Build. Acoust.* 1994. V. 1. No 2. P. 105–124.
2. Viveiros E.B., Gibbs B.M., Gerges S.N.Y. Measurement of sound insulation of acoustic louvres by an impulse method // *Appl. Acoust.* 2002. V. 63. No 12. P. 1301–1313.
3. Strazdas E., Januševičius T. Development of louvered noise barrier with changeable sound insulation from waste tire rubber and investigation of acoustic properties // *Sustainability.* 2024. V. 16. No 6. P. 2567.
4. Борьба с шумом на производстве: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 400 с.
5. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М. Сов. Радио, 1966. 431 с.
6. Нефедов Е.И. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. М.: Наука, 1972. 204 с.
7. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
8. Achenbach J.D., Li Z.L. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // *Wave Motion.* 1986. V. 8. P. 225–234.
9. Porter R., Evans D.V. Wave scattering by periodic arrays of breakwaters // *Wave Motion.* 1996. V. 23. P. 95–120.
10. Abul-Azm A.G., Williams A.N. Oblique wave diffraction by segmented offshore breakwaters // *Ocean Eng.* 1997. V. 24. P. 63–82.
11. Ремизов М.Ю. Пространственная задача о прохождении упругой волны через два параллельных двоякопериодических массива трещин // *ПММ.* 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 72–83.
12. Erbas B., Abrahams I.D. Scattering of sound waves by an infinite grating composed of rigid plates // *Wave Motion.* 2007. V. 44. P. 282–303.
13. Naqvi S.B., Aytton L.J. Acoustic scattering by multilayered gratings // *J. Sound Vib.* 2025. V. 106. 119083.
14. Канев Н.Г. Оптимизация затухания звука в прямоугольном канале с импедансными стенками // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 4. С. 449–453.
15. Исраилов М.Ш. Решение задач дифракции акустических волн на полуплоскости при импедансных граничных условиях на одной из ее сторон и приложения к звуковым барьерам // *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* 2020. № 1. С. 42–48.
16. Шанин А.В., Корольков А.И. Отражение волны от дифракционной решетки, составленной из поглощающих экранов. Описание в рамках метода Винера–Хопфа–Фока // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 6. С. 587–595.
17. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа. М. Физматгиз, 1962. 708 с.
18. Tester B.J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // *J. Sound Vib.* 1973. V. 27. P. 477–513.
19. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
20. Исакович М.А. Теория волноводной изоляции волн в длинных линиях // *Труды Всесоюзной конференции «Распространение и дифракция волн».* Ереван, 1973. Т. 60. № 2. С. 145–151.
21. Залуцкая Р.Р., Миронов М.А. Волноводный изолятор – теория и эксперимент // *Труды конференции «Акустика среды обитания».* М., 2017. С. 93–98.

REFLECTION OF A SOUND WAVE BY AN ARRAY OF SEMI-INFINITE IMPEDANCE SCREENS

N. G. Kanev^{a,b,*}, A. R. Dolger^b

^aAcoustic Institute named after. acad. N.N. Andreev, st. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia

^bNational Research Moscow State Civil University (NRU MGSU), Moscow, Russia

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

The problem of scattering a plane sound wave on a diffraction grating composed of semi-infinite thin screens located at the same distance from each other is considered. It is shown that at certain values of the impedance of the screen surface, the grating completely reflects the wave incident at any angle. The result obtained is useful for the development of soundproof blown structures.

Keywords: Diffraction, diffraction grating, impedance, semi-infinite screen