

УДК 534.2

## СОЛИТОННЫЙ РАСПАД АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ: 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

© 2025 г. С. П. Кшевецкий<sup>a,b,c,\*</sup>, Ю. А. Курдяева<sup>d,\*\*</sup>, Н. М. Гаврилов<sup>c,\*\*\*</sup>,  
С. Н. Куличков<sup>b,\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. А. Невского 14, Калининград, 236041 Россия

<sup>b</sup>Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, Москва, 119017, Россия

<sup>c</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9,  
Санкт-Петербург, 199034 Россия

<sup>d</sup>Калининградский филиал Института Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн  
им. Н.В. Пушкова РАН, ул. Пионерская 61, Калининград, 236035 Россия

\*e-mail: spkshev@gmail.com

\*\*e-mail: yakurdyeva@gmail.com

\*\*\*e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

\*\*\*\*e-mail: snik1953@gmail.com

Поступила в редакцию 24.02.2025 г.

После доработки 28.08.2025 г.

Принята к публикации 06.11.2025 г.

Исследуется процесс распространения и распада длинных слабо-нелинейных акустико-гравитационных волн в верхней атмосфере. Выполнено прямое численное решение гидродинамических уравнений для атмосферного газа с применением модели высокого разрешения. Сравнение результатов этих численных расчетов с результатами анализа системы гидродинамических уравнений на основе выведенного в первой части этой работы уравнения КдВ-Бюргерса для атмосферных слоев показало достаточно хорошее соответствие. Предпочтительные высоты, вблизи которых АГВ могут распадаться, примерно соответствуют высотам изменения знака горизонтальной скорости в волне. Параметры мелкомасштабных уединенных вторичных волн-солитонов, образующихся в расчетах по полным гидродинамическим уравнениям, хорошо согласуются с оценками, основанными на анализе уравнения КдВ-Бюргерса. Последнее уравнение не описывает распространение вторичных волн с течением времени в другие атмосферные слои, а также колебания, наклоны и деформацию слоистой структуры, создаваемые первичной волной, в силу приближений, использованных при выводе уравнения КдВ-Бюргерса.

**Ключевые слова:** уравнения гидродинамики, солитоны, акустико-гравитационные волны, верхняя атмосфера

**DOI:** 10.7868/S3034500625060095

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части работы [1] исследуется процесс распространения и распада длинных низкочастотных нелинейных акустико-гравитационных волн (АГВ) [2] в верхней атмосфере. В работе сделан обзор аналитической теории уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ) и обсуждаются особенности ее применения к волнам в атмосфере. Была рассмотрена одна спектральная волновая мода, для которой, с помощью сформулированного варианта вариационного принципа для слоя жидкости, выведено приближенное нелинейное уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса (КдВ-Бюргерса). Коэффициенты выведенного уравнения зависят от высоты. В работе исследован вопрос о распаде волны на уединенные волны мень-

шего масштаба. Выписаны условия распада волн и выписаны формулы для оценки масштабов вторичных волн-солитонов, образующихся при распаде первичной волны. Показано, что распад волн может происходить только в определенных слоях, определяемых вертикальной структурой волны.

Если вертикальная структура рассматриваемой волны сложнее, и описывается системой нескольких волновых мод, то к сценарию, рассмотренному в работе [1], добавляется нелинейное взаимодействие образовавшихся вторичных волн, соответствующих различным волновым модам, но в целом описанный сценарий распространения и распада волн сохраняется.

Как показано ранее, АГВ могут распадаться, образуя вторичные волны более мелких масшта-

бов, вплоть до образования волновой турбулентности. Экспериментально проследить процесс распада волн в деталях затруднительно, поскольку с нужным разрешением обычно регистрируются только некоторые параметры среды, а также низкочастотные АГВ могут распространяться на большие расстояния. Масштабы образующихся вторичных волн могут отличаться от масштаба первичной волны на порядки. Для верификации и интерпретации численных исследований распространения и распада АГВ полезно иметь аналитические оценки для условий распада, времени распада, масштабов образующихся вторичных волн. Сочетание аналитического и численного подходов позволяет лучше изучить процесс распространения и распада АГВ в деталях. При выводе слабо-нелинейных волновых уравнений иногда учитываются эффекты вязкости и теплопроводности, и в результате получается так называемое уравнение КдВ-Бюргерса [3–5], которое содержит дополнительное слагаемое, описывающее диссипативное затухание.

В первой части настоящего исследования [1] для слабо-нелинейной модели распространения и распада волн, из гидродинамических уравнений для атмосферного газа с учетом диссипации выведено уравнение КдВ-Бюргерса. Вследствие геометрических особенностей, выведенное уравнение КдВ-Бюргерса для атмосферных волн применяется несколько иначе, чем в случае волноводного распространения волн. В работе [1] были вычислены коэффициенты уравнения КдВ-Бюргерса для атмосферных слоев, находящихся на различных высотах, а также были получены условия распада волн и формулы для оценки масштабов вторичных волн, образующихся при распаде первичной волны.

В данной работе выполнено численное моделирование процессов распространения и распада атмосферных АГВ с использованием модели высокого разрешения AtmoSym [6]. В работе [1] показано, что существуют предпочтительные высоты, зависящие от вертикальной структуры волны, вблизи которых она может распадаться. Сравнение результатов численного решения гидродинамических уравнений с результатами анализа на основе приближенного уравнения КдВ-Бюргерса показало, что предпочтительные высоты, вблизи которых волны могут распадаться, примерно соответствуют высотам, на которых горизонтальная волновая скорость изменяет знак.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ

В этом разделе рассмотрены численные алгоритмы и модели, которые использованы для численного моделирования распространения и распада атмосферных АГВ. В ч. 2.1 рассмотрена

слабо-нелинейная волновая модель, основанная на решении уравнения КдВ-Бюргерса для атмосферных слоев в первой части данного исследования [1]. Раздел 2.2 посвящен краткому описанию численной модели атмосферных АГВ с высоким разрешением AtmoSym.

### 2.1. Решение уравнения КдВ-Бюргерса

В [1] получено уравнение КдВ-Бюргерса для описания слабо-нелинейных атмосферных волн, когда волновые возмущения гидродинамических величин от их фоновых значений достаточно малы и в гидродинамических уравнениях можно сохранить только слагаемые квадратичные по волновым возмущениям. Для вывода уравнения также использованы предположения об относительно слабой диссипации, отсутствии среднего ветра в атмосфере и длинных АГВ с низкими частотами, значительно меньшими частоты Вайсяля–Брендта. При этих предположениях из системы гидродинамических уравнений получается следующее уравнение (см. [1]):

$$\theta_t + c\theta_x + a(\xi)\theta\theta_x + b(\xi)\theta_{xxx} + d(\xi)\theta + e(\xi)\theta_{xx} = 0, \quad (1)$$

где  $t, x$  — время и горизонтальная координата;  $\xi$  — средняя высота атмосферного слоя, в котором изучаются АГВ,  $\theta(x, t)$  — распределение амплитуды волны по горизонтали и во времени; индексы  $x$  обозначают дифференцирование по  $x$ . Коэффициенты в уравнении (1) и их зависимость от высоты изучены в [1].

Уравнение (1) является обобщением уравнения КдВ-Бюргерса, полученного ранее для волноводного распространения волновых мод на случай атмосферных слоев. В предыдущих исследованиях в уравнении КдВ коэффициент  $a$  в нелинейном слагаемом брался средним по высоте волновода. Поэтому, внутри волновода отсутствовала зависимость амплитуды волны от высоты. В полученном в [1] уравнении (1) все коэффициенты усредняются по высотному слою толщиной порядка вертикальной длины волны с центром на высоте  $\xi$ . Поскольку коэффициенты уравнения (1) зависят от  $\xi$ , то у  $\theta$  с течением времени также появляется медленная зависимость от  $\xi$ . Соответственно, со временем должна возникать эволюция вертикальной структуры волны и волновые процессы в различных высотных слоях могут начать влиять друг на друга.

В данном исследовании расчеты для уравнения КдВ-Бюргерса (1) выполнялись для начального горизонтального распределения амплитуды первичной волны

$$\theta(x, 0) = \frac{B}{\text{ch}^2\left(\frac{x-x_0}{L}\right)}, \quad (2)$$

где использованы значения  $x_0 = 0$  км,  $L = 3000$  км и  $B = 100$ . Безразмерная функция  $f(z)$ , определяющая вертикальный профиль начальной амплитуды (2), изображена на рис. 2 статьи [1] и соответствует постоянному значению  $f(0) = 1$  амплитуды ниже высот 100–150 км и уменьшению  $f(z)$  на больших высотах из-за сильной молекулярной вязкости и теплопроводности.

Для численного интегрирования уравнения (1) использована численная схема второго порядка точности

$$\begin{aligned} \theta_i^{j+\frac{1}{2}} = & \theta_i^j - \left[ c \frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{2h} + \right. \\ & + \frac{a}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(\theta_{i+1}^j)^2 - (\theta_{i-1}^j)^2}{2h} + \theta_i^j \frac{\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{2h} \right) + \\ & + b \left( \frac{\theta_{i+2}^j - 2\theta_{i+1}^j + 2\theta_{i-1}^j - 2\theta_{i-2}^j}{2h^3} \right) + d \theta_i^{j+\frac{1}{2}} + \\ & \left. + e \left( \frac{\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^{j+\frac{1}{2}} + \theta_{i-1}^j}{h^2} \right) \right] \frac{\tau}{2}, \\ \theta_i^j = & 2\theta_i^{j+\frac{1}{2}} - \theta_i^j. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3)  $i$  – номер точки сетки на оси  $x$  и  $x_{i+1} = x_i + h$ ;  $j$  – номер момента времени  $t^j$  и  $t^{j+1} = t^j + \tau$ ,  $t^{j+\frac{1}{2}} = \frac{t^j + t^{j+1}}{2}$ ,  $h$  – шаг сетки по горизонтали,  $\tau$  – шаг по времени.

## 2.2. Численная модель нейтральной атмосферы высокого разрешения

Для изучения распространения и распада атмосферных АГВ была использована двумерная версия численной модели нейтральной атмосферы высокого разрешения AtmoSym, разработанная Н.М. Гавриловым и С.П. Кшевецким [6]. Модель основана на плоской геометрии и полных трехмерных уравнениях гидродинамики [1, 13]. Модель AtmoSym учитывает диссипативные и нелинейные процессы, влияющие на распространение АГВ, и может описывать такие сложные процессы, как неустойчивость волн, их разрушение и генерация турбулентности. При создании AtmoSym выполнены необходимые математические исследования: доказана неотрицательность температуры и плотности, консервативность численных методов, учтено сильное изменение коэффициентов уравнений с высотой, выполнено соответствующее тестирование программ.

## 3. УРАВНЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ AtmoSym

Для моделирования распространения волн в атмосфере от начального возбуждения использован двумерный вариант компьютерной модели AtmoSym, разработанный С.П. Кшевецким и Н.М. Гавриловым [7–10]. Эта модель позволяет решать задачи распространения волн от различных начальных возмущений и источников волн в диапазоне высот 0–500 км над территорией с горизонтальным масштабом до нескольких тысяч километров.

Численная модель AtmoSym основана на решении системы нелинейных гидродинамических уравнений (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) &= 0, \\ \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + F_u, \quad p &= \frac{\rho}{\mu} RT, \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \nu \Delta w, \\ \rho \frac{d}{dt} \frac{c_v}{\mu} T = -p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \kappa \Delta T + Q_{\text{visc}} + Q_0(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $t$  – время;  $x, z$  и  $u, w$  – координаты и компоненты скорости соответственно;  $p, \rho, T$  – давление, плотность и температура;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\mu$  – молекулярный вес;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\gamma$  – постоянная адиабаты;  $\nu$  и  $\kappa$  – коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $T_0(z)$  – фоновый профиль температуры.  $Q_0(z) = -\frac{d^2}{dz^2} T_0(z)$  – источник тепла, компенсирующий действие диссипации на фоновый температурный профиль и

$$Q_{\text{visc}} = \nu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Профили фоновой температуры  $T_0(z)$  для моделирования были взяты из полуэмпирической атмосферной модели NRLMSISE-00 [11]. Фоновые динамические коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности рассчитываются по формуле Сазерленда [12]. Нижняя граница модели расположена на поверхности Земли. Модель AtmoSym также учитывает фоновую турбулентную вязкость и теплопроводность, которые достигают максимумов  $\sim 10$  м<sup>2</sup>/с в пограничном слое и нижней термосфере и минимума 0.1 м<sup>2</sup>/с в стратосфере [6]. Расчетная сетка по вертикали неравномерная и строится программой исходя из реальной стратификации среды.

На верхней границе установлены нулевые значения вертикальных градиентов температуры и

горизонтальной скорости, а также нулевая вертикальная скорость [13]. При таких условиях на верхней границе могут отражаться АГВ, приходящие из нижележащих слоев атмосферы. Верхняя граница в настоящем исследовании установлена на высоте 600 км, где молекулярная вязкость и теплопроводность очень высоки, а отраженные волны подвержены сильному затуханию. Численные тесты показывают, что влияние верхних граничных условий незначительно на расстояниях от верхней границы, которые в два раза превышают высоту однородной атмосферы. Таким образом, на анализируемых высотах до 200 км влияние верхних граничных условий незначительно.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численные модели, описанные в п. 3, были применены для исследования распространения и распада атмосферных АГВ. В п. 3.1 описаны результаты численного решения уравнения КдВ-Бюргера (1). В п. 3.2 рассмотрены результаты численного моделирования АГВ с высоким разрешением.

##### 4.1. Распад волн согласно уравнению КдВ-Бюргера

Амплитуды волновых гармоник в атмосфере со слабой диссипацией квази-экспоненциально растут с высотой, и распад волн возникает, прежде всего, на больших высотах. В верхней атмосфере из-за экспоненциального роста молекулярной вязкости и теплопроводности также увеличиваются диссипативные слагаемые гидродинамических уравнений, которые растут и доминируют с определенных высот. Следовательно, существует предельная высота, выше которой приближение малой диссипации и уравнение (1) становятся неприменимыми. В работе [1] показано, что качестве указанной предельной высоты можно взять  $z = 200$  км.

Описанный в [1] общий сценарий распространения и разрушения нелинейных АГВ, основанный на аналитическом анализе уравнения КдВ-Бюргера (1), ниже дополнен результатами численного решения этого уравнения. Результаты расчетов позволяют определить время начала и окончания распада первичной волны, а также изучить влияние диссипации на вторичные волны-солитоны, называемые при учете слабой диссипации квази-солитонами.

На рис. 1 показана функция  $\theta(x, t)$  вблизи предельной высоты  $z$  для различных моментов времени и при двух значениях начальной амплитуды волны  $D = Bf(z)$  в (2):  $D = 240$  и  $D = 120$ . В работе [1] введен параметр нелинейности

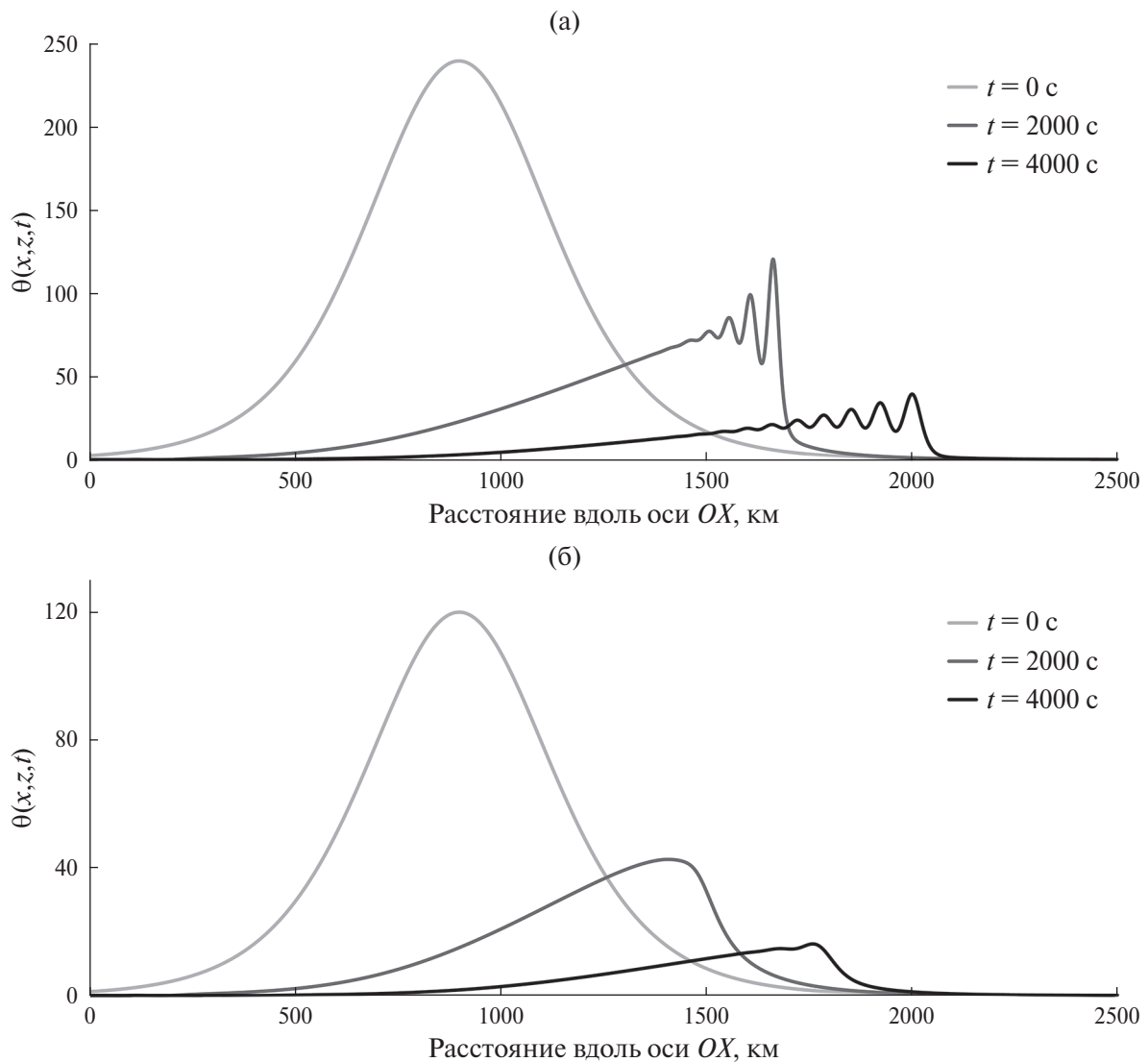
$$\epsilon = \frac{aD}{c}, \quad (5)$$

который определяет область применимости слабо-нелинейного приближения при  $\epsilon(z, t) \ll 1$ . На анализируемой высоте  $z = 202$  км в начальный момент  $t = 0$  параметр нелинейности  $\epsilon \approx 3.6$  и  $\epsilon \approx 1.8$ , соответственно, для указанных выше значений  $D$ . Значения  $\epsilon > 1$  соответствуют сильной нелинейности. Выполнять расчеты при слабой нелинейности на этих высотах не имеет смысла, поскольку АГВ на этих высотах быстро диссипирует, их амплитуды уменьшаются и при слабой нелинейности распад волн не происходит. Тем не менее, рис. 1а при  $D = 240$  демонстрирует распад волн при  $t = 2 \times 10^3$  с и  $t = 4 \times 10^3$  с, происходящий несмотря на сильное влияние диссипации. Распад волны на рис. 1а проявляется в появлении мелкомасштабных волновых колебаний с горизонтальными длинами 40–80 км на фоне первичной волны с горизонтальным масштабом около 1000 км.

На рис. 2 показана функция  $\theta(x, t)$  на высоте  $z = 146$  км для различных моментов времени и при двух различных значениях начальной амплитуды волны  $D = 190$  и  $D = 35$ . Соответственно, параметр нелинейности (5) в начальный момент времени на высоте 146 км имеет значения  $\epsilon = 0.74$  и  $\epsilon = 0.14$ . При  $D = 190$  имеем случай значительной нелинейности, а при  $D = 35$  – слабой нелинейности. Влияние диссипации слабое. Рис. 2 показывает, что из первичной волны со временем формируются мелкомасштабные вторичные волны (квази-солитоны) с масштабами (полушириной пиков) около 50 км в обоих случаях, но в различные моменты времени. В уравнении КдВ-Бюргера (1) имеется диссипативное слагаемое  $e(\xi)\theta_{,xx}$ , которое обеспечивает более сильную диссипацию более коротких волн. Поэтому масштабы образующихся вторичных волн (квази-солитонов) слабо зависят от амплитуды первичной волны, распад которой происходит при  $t > 0.83$  ч на рис. 2а и при  $t > 1.3$  ч на рис. 2б.

На рис. 2 на высоте  $z = 146$  км видно существенное увеличение скорости горизонтального распространения волнового пакета вследствие совместного действия нелинейных, диссипативных и дисперсионных эффектов в уравнении (1). Так, согласно линейной теории, при  $t = 5$  ч максимум амплитуды волны с амплитудой  $D = 190$  должен находиться при  $x = 3160$  км, тогда как на рис. 2а максимум амплитуды находится при  $x = 3900$  км. При  $t = 6.7$  ч максимум амплитуды этой же волны должен находиться при  $x = 3880$  км, тогда как на рис. 2а максимум амплитуды волны находится при  $x = 4800$  км. Эффект ускорения способствует образованию горизонтальной слоистой структуры вторичных квази-солитонов из первичной волны.

На рис. 3 показана функция  $\theta(x, t)$  на высоте  $z = 98$  км для различных моментов времени и при



**Рис. 1.** Зависимости амплитудной функции  $\theta(x, t)$  от горизонтальной координаты  $x$  при начальной амплитуде (а) –  $D = 240$  и (б) –  $D = 120$  на высоте  $z = 202$  км в моменты времени  $t = 0$  с,  $t = 2000$  с,  $t = 4000$  с.

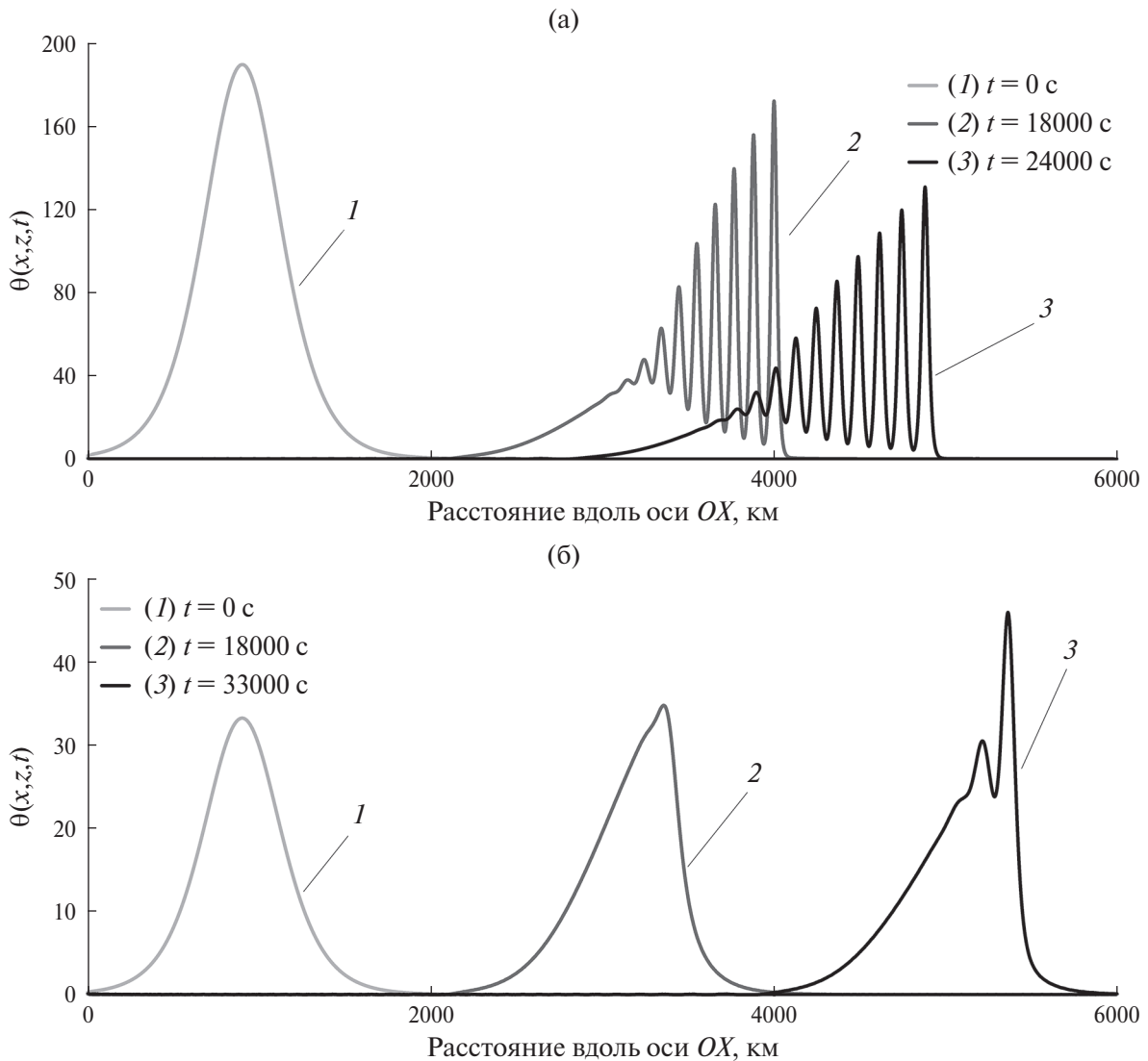
двух различных значениях начальной амплитуды  $D$  волны:  $D = 400$  (3а), и  $D = 200$  (3б). При этом значения параметра нелинейности составляют  $\epsilon = 0.2$  и  $\epsilon = 0$  и соответствуют случаю слабой нелинейности. Диссипация волн в (1) пренебрежимо мала. Можно видеть, что на рис. 3 на огибающей первичного волнового пакета при  $t = 6$  ч появляются мелкомасштабные вторичные волны (квазисолитоны). Оценки по формуле, определяющей связь амплитуды солитона и его ширины, представленной в статье [1] дают полуширину этих появляющихся квази-солитонов равную 34 км. На рис. 3б солитоны появляются при  $t \approx 13$  ч, и полуширина этих осцилляций должна быть примерно 48 км.

Согласно выводу уравнения (1) в первой части работы [1], для получения волновых полей амплитудная функция  $\theta$  домножается на функции,

зависящие от высоты, которые различны для разных гидродинамических переменных. Эти волновые функции изменяют знак при изменении высоты  $z$ , поэтому распадающаяся волна сохраняет слоистую структуру, аналогичную первичной волне. Распад волн проявляется в том, что в слоях, создаваемых первичной волной, появляются множественные мелкомасштабные волны. Общая слоистая структура первичной волны при этом сохраняется, несмотря на процессы распада.

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Слабо-нелинейная волновая модель и уравнение КдВ-Бюргерса может объяснить почему в одних случаях распад АГВ происходит, а в иных нет. Численная гидродинамическая модель позволя-



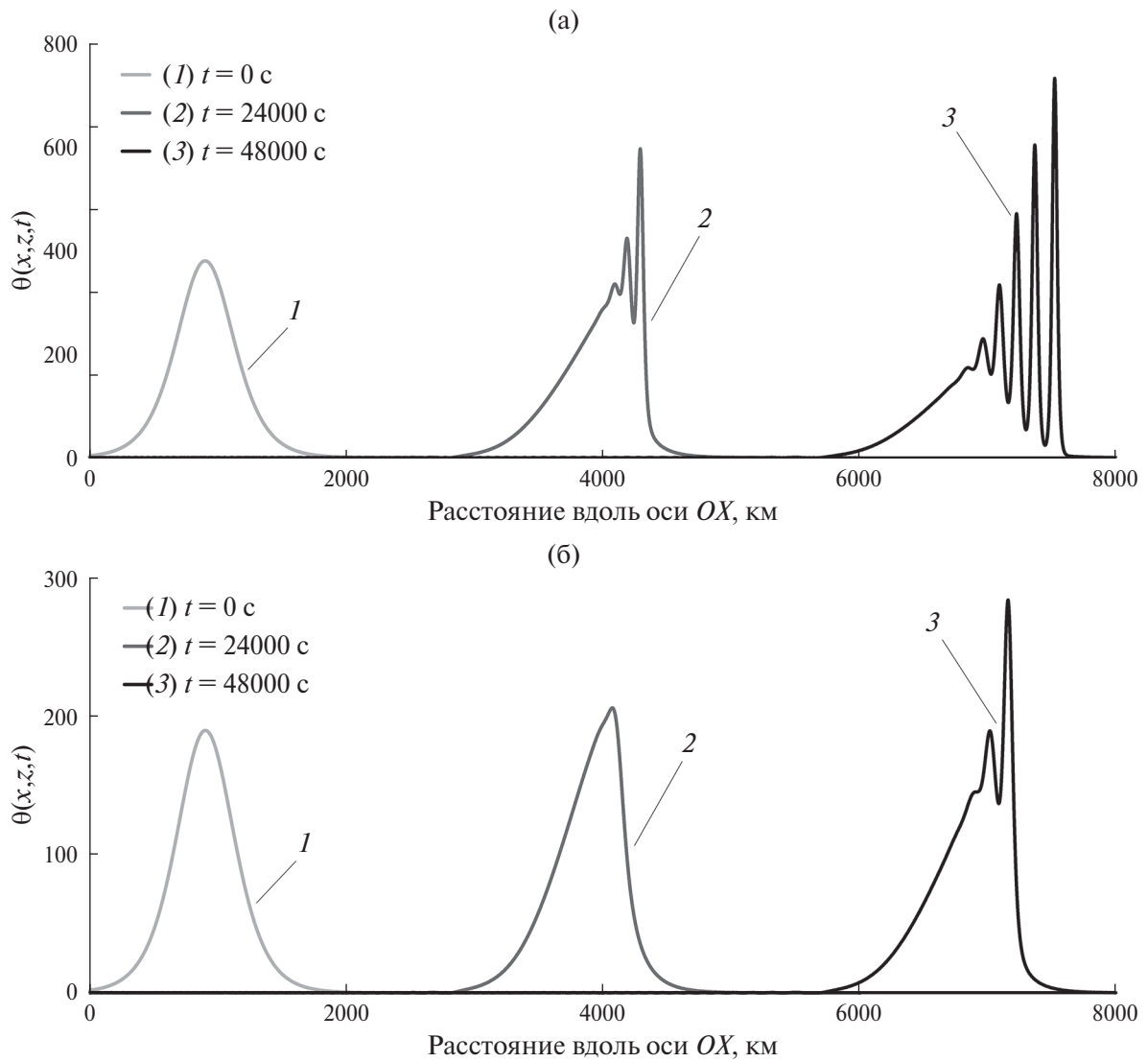
**Рис. 2.** Зависимости функции  $\theta(x, t)$  от горизонтальной координаты  $x$  при начальной амплитуде (а) —  $D = 190$  в моменты времени  $t = 0$  с,  $t = 18000$  с,  $t = 24000$  с и (б) —  $D = 35$  в моменты времени  $t = 0$  с,  $t = 18000$  с,  $t = 33000$  с на высоте  $z = 146$  км.

ет вычислять волновые поля, но не дает объяснения получаемых результатов. Также аналитическая модель дает примерные оценки масштабов образующихся волн, полезные для настройки численных моделей, основанных на прямом численном интегрировании гидродинамических уравнений, и для контроля расчетов по численным моделям и для тестовых проверок численных моделей.

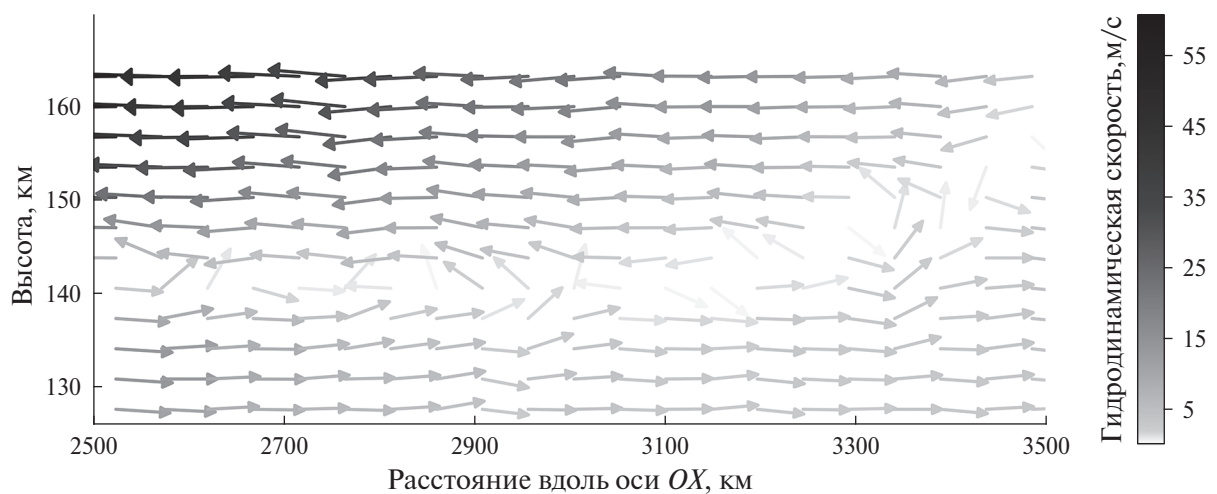
Ниже показаны результаты численного решения, полученного с помощью модели AtmoSym для начального условия (5), в котором  $L = 300$  км,  $x_0 = 900$  км,  $B = 200$ . Рассматриваемая АГВ имеет значительную амплитуду на больших высотах, но является слабо-нелинейной несколько ниже, и волной малой амплитуды на небольших высотах. Один из исследуемых вопросов — сопоставление результатов численного моделиро-

вания высокого разрешения со сценарием распада первичных волн, рассмотренным в п. 3.1 с использованием слабо-нелинейного приближения и уравнения КдВ-Бюргера (1).

На рис. 4 показан фрагмент векторного поля волновой скорости. Из рис. 4 видно, что выделенная в табл. 1 при анализе уравнения КдВ-Бюргера в статье [1] критическая высота 146 км, в окрестности которой первичная волна может распадаться, примерно соответствует высоте, на которой горизонтальная скорость в волне изменяет направление на противоположное. В окрестности этой высоты формируются вихри меньшего масштаба, с масштабами 100–150 км. Масштабы получающихся вихрей хорошо согласуются с масштабами квазисолитонов, наблюдаемых при численном интегрировании уравнения КдВ-Бюргера и изобра-



**Рис. 3.** Зависимости функции  $\theta(x, t)$  от горизонтальной координаты  $x$  при начальной амплитуде  $D = 400$  – (а) при начальной амплитуде  $D = 200$  – (б) в моменты времени  $t = 0$  с,  $t = 24000$  с,  $t = 48000$  с на высоте  $z = 96$  км



**Рис. 4.** Фрагмент векторного поля гидродинамической скорости при  $t = 18000$  с.

женных на рис. 2б. Поскольку критическая высота 146 км хорошо совпадает с высотой, где горизонтальная скорость изменяет знак на противоположный, и поскольку мы видим, что разрушение/распад волны начинается на этой высоте, и затем развивается, то распад волны, вероятно, можно также интерпретировать как неустойчивость волны на сдвиговом течении, создаваемом самой первичной волной.

На рис. 5 показаны фрагменты поля волновых температурных возмущений в различных интервалах высот в момент времени  $t = 5$  ч. Мы видим на рис. 5, что первичная волна имеет по вертикали слоистую структуру и знак температурных возмущений изменяется с высотой. В теплых и холодных слоях этой слоистой волновой структуры появляются мелкомасштабные уединенные волны, с горизонтальными масштабами 50–80

км, которые значительно меньше масштабов первичной волны. Эти мелкомасштабные волновые возмущения в различных слоях первичной волны согласованы, т.е. каждая вторичная волна по вертикали располагается в нескольких слоях первичной волны. Однако амплитуда вторичных волн падает с уменьшением высоты. Появление мелкомасштабных уединенных вторичных волн, с масштабами значительно меньшими масштаба основной волны, в слоях первичной волны, соответствует результатам аналитического рассмотрения слабо-нелинейного уравнения КдВ-Бюргера в п. 4 работы [1].

Сравнение результатов расчетов, полученных с помощью гидродинамической компьютерной модели AtmoSym, с анализом разрушения волн, основанном на выведенном приближенном уравнении КдВ-Бюргера, выполненном в [1] и здесь,

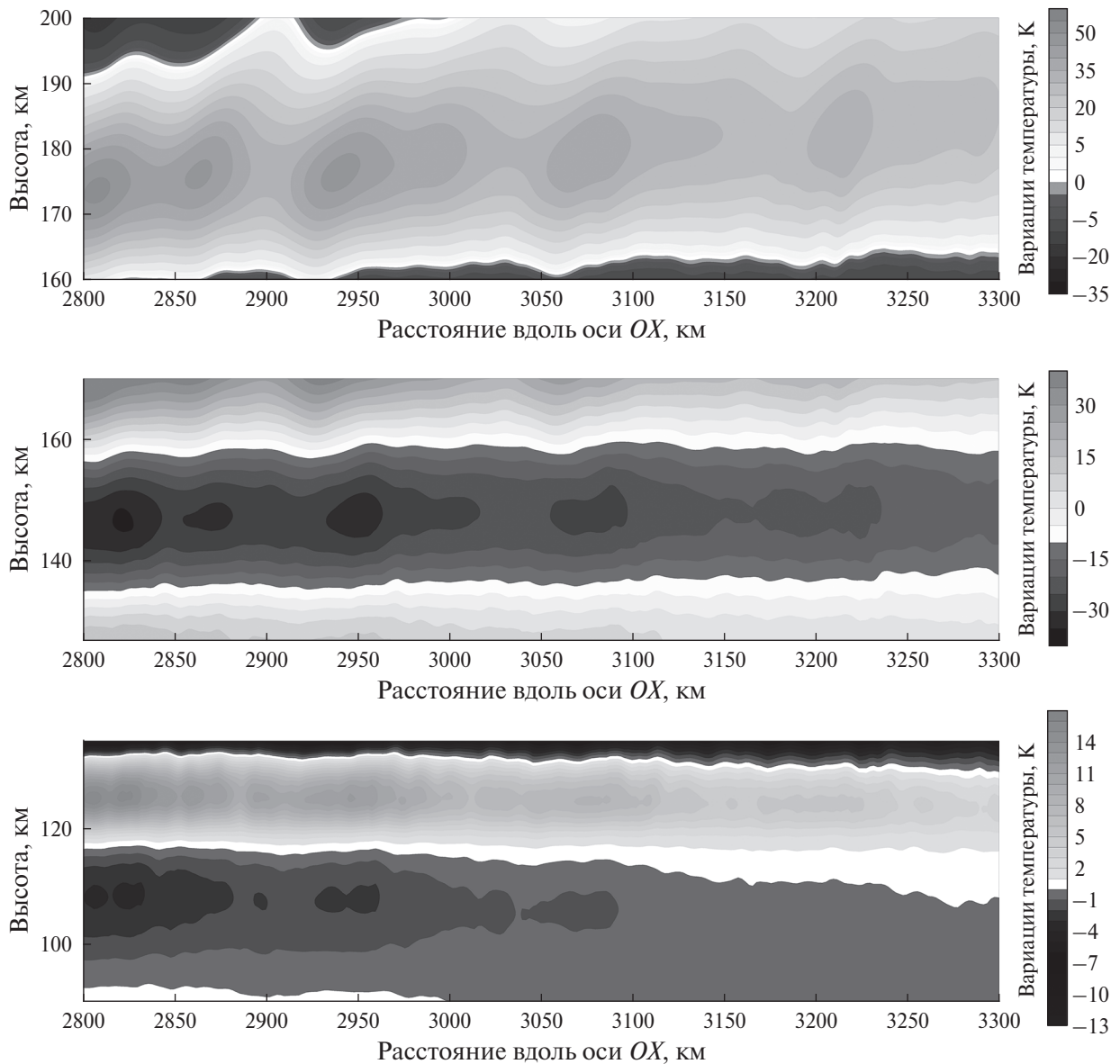


Рис. 5. Фрагменты поля возмущений температуры в  $^{\circ}\text{K}$  на различных интервалах высот при  $t = 18000$  с.

показывает, что нелинейная добавка к скорости распространения волн в результатах расчета модели AtmoSym несколько меньше и фронт волны не такой резкий, как в модели КдВ-Бюргерса, но более плавный, размыт. Это, вероятно, объясняется тем, что на высоте 146 км влияние диссипации уже осязаемое, а несколько выше, в районе высоты 200 км, диссипация вообще уже доминирует, и поэтому в начальных условиях вертикальный профиль волновой моды наверху гладко срезан, чтобы адаптировать поведение волновой моды к условиям большой диссипации на высотах 200 км и выше. В результате, наряду с волновой модой с заданной скоростью распространения, возникает также широкий спектр других волновых мод, меньшей амплитуды, а амплитуда основной моды несколько падает и фронт волны становится несколько размытым. Соответственно уменьшению амплитуды первичной волны, горизонтальные масштабы образующихся вторичных волн несколько увеличиваются. Тем не менее, нелинейный механизм разрушения горизонтального профиля волновой моды, описанный в [1], работает. Оценки масштабов образующихся квази-солитонов, на основе уравнения КдВ-Бюргерса, работают.

Оценить горизонтальные масштабы образующихся вторичных волн удобно на рис. 6 для волнового поля вертикальной скорости. Видно, что длины вторичных волн по горизонтали варьируются от примерно 38 км на высоте 130 км до примерно 80 км на высоте 160 км. Длины мелкомасштабных волн на больших высотах больше, чем на меньших высотах. Вероятно, это объясняется влиянием растущих с высотой диссипативных эффектов. Таким образом, в исследуемом волновом процессе волна представляет собою распространяющуюся слоистую структуру, внутри которой образуются и развиваются мелкомасштабные вихревые колебания, создающие соответствующие мелкомасштабные возмущения температуры и плотности.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что акустико-гравитационные волны могут разрушаться, образуя вторичные волны более мелких масштабов, вплоть до образования волновой турбулентности [14], [10]. Экспериментально проследить процесс разрушения волн в деталях затруднительно, поскольку волны обычно распространяются на большие расстояния, и с нужным разрешением регистрируются только некоторые параметры среды. Масштабы образующихся вторичных волн могут отличаться от масштаба первичной волны на порядки. Для численных исследований распространения и разрушения волн полезно иметь аналитические оценки для условий разрушения, времени разрушения, масштабов образующихся вторичных волн [1]. Сочетание аналитического и численного подходов позволяет лучше изучить процесс распространения и разрушения волн.

В первой части данного исследования [1] было получено уравнение типа КдВ-Бюргерса для атмосферных слоев в приближении слабой нелинейности. Это уравнение для горизонтального профиля волновой моды выведено нестандартным способом: с помощью сформулированного варианта вариационного принципа для слоя жидкости. Вследствие особенностей вывода, выведенное приближенное уравнение для атмосферных волн применяется несколько иначе, чем в случае волноводного распространения волн. Расположение рассматриваемого слоя по высоте варьируется, коэффициенты выведенного уравнения зависят от высоты. Выписаны условия разрушения волн и формулы для оценки масштабов вторичных волн, образующихся при разрушении первичной волны. Коэффициент в нелинейном слагаемом выведенного уравнения КдВ-Бюргерса изменяет знак с высотой. Условия для разрушения волн существуют только вблизи высот, где нелинейный коэффициент имеет экстре-

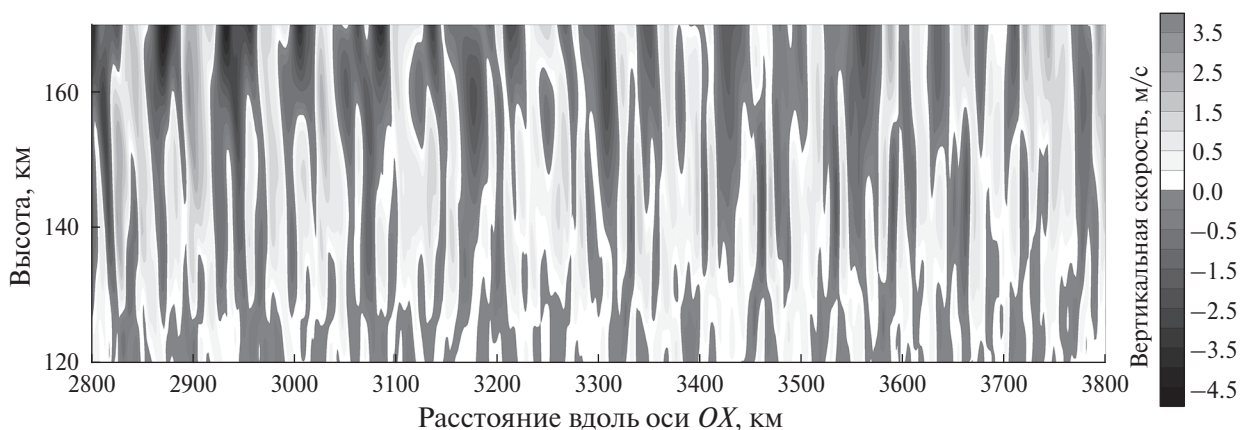


Рис. 6. Фрагмент поля вертикальной скорости в м/с при  $t = 18000$  с.

мумы. Таким образом, выявлено, что существуют преимущественные высоты, зависящие от вертикальной структуры первичной волны, вблизи которых волна может разрушаться, если амплитуда достаточна для разрушения. Это означает, что образующаяся волновая турбулентность возникает слоями.

Длинная внутренняя гравитационная волна имеет слоистую структуру: возмущения температуры, плотности, а также горизонтальная скорость чередуют знаки с высотой. Показано, что разрушение волн проявляет себя внутри слоев первичной волны. В слоях появляются мелкомасштабные уединенные вторичные волны. При этом каждая из образующихся вторичных волн проявляет себя в нескольких слоях. Слоистая структура длинной волны долго сохраняется, несмотря на образование вторичных волн, но слои могут волнообразно колебаться, изменять толщину и наклоняться. Долгоживущие тонкослоистые структуры часто наблюдаются методами регистрации инфразвука, отражаемого и рассеиваемого в средней атмосфере [15]. Выполнены расчеты разрушения волн, основанные на численном решении полных двумерных гидродинамических уравнений для атмосферного газа. Сравнение результатов этих численных расчетов с результатами анализа системы гидродинамических уравнений на основе выведенного для слоев уравнения КдВ-Бюргерса показало, что модельное уравнение в целом правильно описывает динамику волн. Параметры мелкомасштабных уединенных вторичных волн, образующихся в расчетах с полными гидродинамическими уравнениями, хорошо согласуются с оценками, основанными на анализе уравнения КдВ-Бюргерса.

В данной работе не учитываются течения. Можно показать, что уравнение КдВ-Бюргерса можно вывести и при учете течения; учет течения влияет на коэффициенты этого уравнения. Следовательно, механизм разрушения волн в среде с течением примерно тот же, что описан в работе. Но условия разрушения волн и параметры образующихся вторичных волн зависят и от течения.

Результаты исследования могут быть полезны для анализа и интерпретации экспериментальных данных, при построении параметризаций акустико-гравитационных волн. Результаты также полезны при численном моделировании атмосферных волновых процессов и для тестирования и верификации численных моделей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 25-17-00060.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М., Куличков С.Н. Солитонное разрушение акустико-гравитационных волн в атмосфере: 1. Уравнение КдВ-Бюргерса // Акуст. журн. 2025. Т. 71. № 5.
2. Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М. Волны в тяжелом стратифицированном газе: подзадачи для акустических и для внутренних гравитационных волн // Акуст. журн. 2024. Т. 70. С. 891–906.
3. Burgers J.M. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. In: *Advances in Applied Mechanics*, 1948.
4. Bona J.L., Schonbek M.E. Travelling wave solutions of the Korteweg-de Vries-Burgers equation // *Proc. Roy. Soc. Edinburg*. 1985. V. 101(A). P. 207–226.
5. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса // *Функц. анализ и его прил.* 1991. Т. 25. № 1. С. 21–32.
6. Гаврилов Н.М., Кшевецкий С.П. Численное моделирование распространения нелинейных акустико-гравитационных волн в средней и верхней атмосфере // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2014. Т. 50. № 1. С. 76–83.
7. Кшевецкий С.П. Численное моделирование нелинейных внутренних гравитационных волн // *Журн. выч. матем. и матем. физики*. 2001. Т. 41. № 12. С. 1844–1859.
8. Kshevetskii S.P. Analytical and numerical investigation of nonlinear internal gravity waves // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2001. No 8. P. 37–53.
9. Kshevetskii S.P. Internal gravity waves in nonexponentially density-stratified fluids // *Comp. Math. Math. Phys.* 2002. V. 42(10). P. 1510–1521.
10. Kshevetskii S.P., Gavrilov N.M. Vertical propagation, breacking, and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2005. V. 67. P. 1014–1030.
11. Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., Aikin A.C. NRLMSISE-00 Empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific Issues // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107(A12). P. 1468.
12. Кикоин И.К. Таблицы физических величин: Справочник. Издательство: Атомиздат, 1976, 480 с.
13. Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P., Koval A.V. Decay times of atmospheric acoustic-gravity waves after deactivation of wave forcing // *Atmos. Chem. Phys.* 2022. V.22. P. 13713–13724.
14. Chunchuzov I.P. On the high-wavenumber form of the Eulerian internal wave spectrum in the atmosphere // *J. Atmosph. Sci.* 2002. V. 59. P. 1753–1772.
15. Чунчужов И.П., Куличков С.Н., Попов О.Е., Перепелкин В.Г., Фирстов П.П. Восстановление тонкой слоистой структуры стратосферы и нижней термосферы с помощью инфразвукового зондирования // *Известия РАН. Серия физическая*. 2015. Т. 79. № 10. С. 1381–1385.

## SOLITONIC DISINTEGRATION OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVES IN THE ATMOSPHERE: 2. NUMERICAL MODELING

S. Kshevetskii<sup>a,b,c,\*</sup>, Y. Kurdyeva<sup>d,\*\*</sup>, N. Gavrilov<sup>c,\*\*\*</sup>, S. Kulichkov<sup>b\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, A. Nevsky st. 14, Kaliningrad, 236041 Russia

<sup>b</sup>Oboukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Pyzhevsky lane 3, Moscow, 119017 Russia

<sup>c</sup>Saint Petersburg State University, University Embankment 7/9, Saint Petersburg, 199034 Russia

<sup>d</sup>Kaliningrad Branch of the N.V. Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radio Wave Propagation of the Russian Academy of Sciences, Pionerskaya St. 61, Kaliningrad, 236035, Russia

\*e-mail: spkshev@gmail.com

\*\*e-mail: yakurdyeva@gmail.com

\*\*\*e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

\*\*\*\*e-mail: snik1953@gmail.com

The process of propagation and disintegration of long weakly nonlinear acoustic-gravity waves in the upper atmosphere is investigated. A direct numerical solution of the hydrodynamic equations for atmospheric gas is performed using a high-resolution model. Comparison of the results of these numerical simulations with the results of the analysis of the system of hydrodynamic equations based on the KdV-Burgers equation derived in the first part of this work for atmospheric layers showed fairly good agreement. The preferred heights near which AGWs can destroy approximately correspond to the heights of the change in the sign of the horizontal velocity in the wave. The parameters of small-scale solitary secondary waves formed in simulations using full hydrodynamic equations are in good agreement with the estimates based on the analysis of the KdV-Burgers equation. The latter equation does not describe the propagation of secondary waves over time into other atmospheric layers, as well as oscillations, tilts and deformation of the layered structure created by the primary wave, due to the approximations used in deriving the KdV-Burgers equation.

*Keywords:* hydrodynamic equations, solitons, acoustic-gravity waves, upper atmosphere.