

УДК 534.2, 517.956.27

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА, ПЛОТНОСТИ,  
КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ И ЕГО ЧАСТОТНОЙ  
ЗАВИСИМОСТИ В МНОГОЧАСТОТНОМ РЕЖИМЕ  
ТОМОГРАФИРОВАНИЯ© 2025 г. О. Д. Румянцева<sup>a,\*</sup>, А. С. Шуруп<sup>a,\*\*</sup>, Д. И. Зотов<sup>a</sup><sup>a</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, Ленинские горы, Москва, 119991, ГСП-1 Россия

\*e-mail: burov@phys.msu.ru

\*\*e-mail: shurup@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 02.10.2025 г.

После доработки 16.10.2025 г.

Принята к публикации 06.11.2025 г.

Рассматривается стационарная среда, содержащая неоднородности скорости звука, плотности и частотно зависящего коэффициента поглощения. Эти неоднородные акустические характеристики, включая степень частотной зависимости коэффициента поглощения, неизвестны и подлежат восстановлению на основе данных рассеяния на многих частотах. Сначала решением обратной задачи восстанавливается комплексная функция рассеивателя, которая содержит вклады от неоднородностей разных типов; после этого предлагается методика выделения из функции рассеивателя индивидуальных пространственных распределений всех искомым акустических характеристик. Приводятся результаты численного моделирования, иллюстрирующие возможности и ограничения предлагаемой методики при различных уровнях шумов в исходных данных. Показано, что наименьшей помехоустойчивостью обладает результат восстановления показателя степени частотной зависимости коэффициента поглощения. В то же время, восстановление скорости звука, плотности и коэффициента поглощения осуществляется с приемлемой точностью и высокой разрешающей способностью.

*Ключевые слова:* акустическая томография, обратная задача, скорость звука, плотность, поглощение, частотная зависимость коэффициента поглощения

DOI: 10.7868/S3034500625060105

## ВВЕДЕНИЕ

Имеется фоновая среда – однородная непоглощающая среда с известными постоянными значениями скорости звука  $c_0$  и плотности  $\rho_0$ . Внутри такой среды располагается исследуемая неоднородная область  $\mathcal{X}$ , которая имеет конечные размеры и характеризуется скоростью звука  $c(\mathbf{r})$ , плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , а также амплитудным коэффициентом поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$ , который может зависеть от частоты  $\omega_j > 0$  (индекс  $j$  описывает конкретное текущее значение частоты). Ставится задача акустического томографирования области  $\mathcal{X}$  (называемой также областью рассеяния) с целью восстановления внутренней структуры данной области. Режим томографирования предполагается линейным, т.е. нелинейные эффекты, сопровождающиеся преобразованием рабочих частот, не рассматриваются.

Надо отметить, что если в области  $\mathcal{X}$  присутствуют течения (в медицинских приложениях течения соответствуют кровотоку), то они описываются вектором скорости течений  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Однако в ряде прикладных задач течения отсутствуют или же их влиянием можно пренебречь. Например, такая ситуация возникает при ультразвуковом томографировании мягких биотканей в целях ранней диагностики доброкачественных и злокачественных новообразований. Непосредственное влияние кровотока на данные рассеяния здесь пренебрежимо мало [1], если не привлекается специальный режим томографирования [2, 3 (разделы 7.4, 8.5)]. В то же время, в таких задачах частотная зависимость коэффициента поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  хорошо описывается степенным законом с неизвестным (в общем случае) показателем степени  $\zeta(\mathbf{r})$ :

$$\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) = \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\zeta(\mathbf{r})} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0). \quad (1)$$

В качестве  $\omega_0 > 0$  в (1) выбирается, например, центральная частота в рабочем частотном диапазоне. Надо обратить внимание, что показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения может служить самостоятельным диагностическим параметром при ультразвуковых исследованиях. Например, в [4] экспериментальные томографические данные обрабатываются для разных частотных полос, и тогда классификация различных типов биологических тканей может осуществляться именно по характеру частотной зависимости коэффициента поглощения на разных участках исследуемого объекта.

Ниже обсуждается алгоритм, который позволяет получать различные акустические томограммы исследуемой области  $\mathfrak{R}$  в виде восстановленных отдельных пространственных распределений функций  $c(\mathbf{r})$ ,  $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ , а также показателя степени  $\zeta(\mathbf{r})$  в отсутствие течений, т.е. при  $\mathbf{v} \equiv 0$ . Важно, что томограммы будут отражать не только структурные особенности исследуемой области, но и предоставлять количественные значения восстанавливаемых акустических характеристик. Подобные исследования были начаты в [5].

### ПРОЦЕДУРА РАЗДЕЛЕНИЯ РАССЕЙВАЮЩИХ КОМПОНЕНТ

По постановке рассматриваемых томографических задач, первичные источники, которые создают поле, зондирующее исследуемую область  $\mathfrak{R}$ , находятся в области  $X$  вне  $\mathfrak{R}$ , т.е.  $X \cap \mathfrak{R} = \emptyset$ . Это падающее (зондирующее) поле многократно рассеивается на неоднородностях, находящихся внутри  $\mathfrak{R}$ . В итоге комплексная спектральная амплитуда  $p(\mathbf{r}; \omega_j)$  поля акустического давления на частоте  $\omega_j$  в произвольной точке пространства  $\mathbf{r}$  вне области  $X$  подчиняется уравнению [6 (Т. 1, гл. 13, § 11), 7, 8 (§ 2.1)]

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{r}; \omega_j) + \frac{\omega_j^2}{c_0^2} p(\mathbf{r}; \omega_j) = \\ = \left\{ \omega_j^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) - 2i\omega_j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{c(\mathbf{r})} \right\} p(\mathbf{r}; \omega_j) + \\ + \frac{\nabla\rho(\mathbf{r})\nabla p(\mathbf{r}; \omega_j)}{\rho(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (2)$$

при временной зависимости полей  $\sim \exp(-i\omega_j t)$ . Здесь и далее параметр, характеризующий фиксированное падающее поле, в аргументе поля  $p(\mathbf{r}; \omega_j)$  для краткости не приводится. После подстановки Бергманна  $u(\mathbf{r}; \omega_j) \equiv p(\mathbf{r}; \omega_j) \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}}$  урав-

нение (2) принимает вид

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}; \omega_j) + \frac{\omega_j^2}{c_0^2} u(\mathbf{r}; \omega_j) = v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) u(\mathbf{r}; \omega_j),$$

где  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  – так называемая функция рассеивателя:

$$\begin{aligned} v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) + \\ + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right) - 2i\omega_j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{c(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нижние индексы в обозначении  $v_{c\rho\alpha}$  подчеркивают, что функция рассеивателя (3) приведена для рефракционной (первое слагаемое в правой части), плотностной (второе слагаемое) и поглощающей (третье слагаемое) рассеивающих компонент. Поскольку акустические неоднородности локализованы только внутри области  $\mathfrak{R}$ , то  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \equiv 0$  при  $\mathbf{r} \notin \mathfrak{R}$ . Подстановка выражения для коэффициента поглощения (1) в (3) дает:

$$\begin{aligned} v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) + \\ + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right) - 2i \left( \frac{\omega_j}{\omega_0} \right)^{\zeta(\mathbf{r})+1} \frac{\omega_0 \alpha(\mathbf{r}, \omega_0)}{c(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (4)$$

При каждом фиксированном падающем поле в области  $Y$  измеряются прошедшие через  $\mathfrak{R}$  поля  $p(\mathbf{y}; \omega_j)$ ,  $\mathbf{y} \in Y$ . Как и для области  $X$ , предполагается, что область  $Y$  находится вне  $\mathfrak{R}$ , т.е.  $Y \cap \mathfrak{R} = \emptyset$ . Данные рассеяния, доступные в эксперименте, – это совокупность полей  $p(\mathbf{y}; \omega_j)$ , измеренных для всех используемых падающих полей в многочастотном (т.е. полихроматическом) режиме, т.е. на всех частотах  $\omega_j$  в рабочей полосе. Естественно, что вместо многочастотного режима можно использовать импульсный режим с последующим применением к измеренным полям фурье-преобразования по времени. В настоящее время разработаны различные методы восстановления функции  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  на основе упомянутых данных рассеяния  $p(\mathbf{y}; \omega_j)$ . Например, к таким методам, которые позволяют учитывать процессы многократного рассеяния волн, происходящих в области  $\mathfrak{R}$ , относятся различные итерационные методы [3 (раздел 5.4), 7, 8 (§ 6, § 7)], двухшаговый алгоритм [3 (§ 5.4.1, глава 8), 9–11], а также функциональные методы [12–20]. Надо заметить, что функциональные алгоритмы, берущие начало в квантово-механических задачах, оказались весьма перспективными для решения акустических обратных задач томографического типа [17–21].

Более того, функциональные алгоритмы предоставляют возможность восстанавливать в единой схеме не только скалярные характеристики рассеивателя (скорость, плотность, коэффициент поглощения), но и его векторную характеристику – карту вектора скорости течений [1, 20].

Ниже предлагается алгоритм разделения различных рассеивающих компонент в функции рассеивателя (4). Он позволяет получить отдельные томограммы (пространственные распределения) для оценок функций  $c(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  и  $\zeta(\mathbf{r})$ . Исходными данными для алгоритма разделения являются оценки  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  функции рассеивателя  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , полученные для разных частот  $\omega_j$ . Метод восстановления этих оценок  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , т.е. метод решения обратной задачи рассеяния, не принципиален. Важно только, чтобы восстановленные оценки  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  обладали той точностью, которая необходима для дальнейшего адекватного разделения рассеивающих компонент. Тем самым, при описании алгоритма разделения предполагается, что изначально имелся *полный* набор данных рассеяния, позволяющий восстановить функцию  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  достаточно точно. Проблема разделения рассеивающих компонент в условиях неполных данных рассеяния рассматривалась в [3 (раздел 7.3), 22].

Поскольку течения отсутствуют ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ), то ситуация с минимальным количеством частот  $\omega_j$ , необходимым для разделения различных рассеивающих компонент, следующая. Если невозмущенное значение плотности в области томографирования постоянно ( $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$ ), т.е. функция рассеивателя  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  формируется только за счет функций  $c(\mathbf{r})$  и  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$ , то для воспроизведения  $c(\mathbf{r})$  и  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  нужна минимум одна частота при условии, что  $\zeta(\mathbf{r})$  отдельно восстанавливать не требуется. А именно,  $c(\mathbf{r})$  выделяется из  $\text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , а  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  – из  $\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ . Для дополнительного определения  $\zeta(\mathbf{r})$  нужно минимум две частоты, см. ниже соотношение (15). В присутствии же пространственных неоднородностей невозмущенного значения плотности среды  $\rho(\mathbf{r})$  для определения функций  $c(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$  и  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  нужно знание  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , как минимум, на двух частотах [22, 23]. Как минимум две частоты требуются вне зависимости от того, нужно или не нужно отдельно восстанавливать показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения  $\zeta(\mathbf{r})$ , а также в случае восстановления  $c(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$  в отсутствие поглощения ( $\alpha \equiv 0$ ) [24; 8 (§ 8.1)]. Недостаточность одной частоты связана с присутствием неоднородностей плотности  $\rho(\mathbf{r})$  [24, 23].

Алгоритм разделения строится, исходя из конкретного вида и характера частотной зависимости функций  $\text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  и  $\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , по отдельности. Согласно (4),  $\text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  можно записать в виде:

$$\frac{c_0^2}{\omega_0^2} \text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = \frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} g_c(\mathbf{r}) + g_\rho(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где

$$g_c(\mathbf{r}) = 1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})}, \quad (6)$$

$$g_\rho(\mathbf{r}) = \frac{c_0^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right). \quad (7)$$

Согласно (3) и (4), для

$$\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = -2\omega_j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{c(\mathbf{r})} \quad (8)$$

справедливо выражение

$$\frac{c_0^2}{\omega_0^2} \text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = \left( \frac{\omega_j}{\omega_0} \right)^{\zeta(\mathbf{r})+1} g_\alpha(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где

$$g_\alpha(\mathbf{r}) = -2 \frac{c_0^2}{\omega_0 c(\mathbf{r})} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0). \quad (10)$$

Введенные в (6), (7) и (10) функции  $g_c(\mathbf{r})$ ,  $g_\rho(\mathbf{r})$  и  $g_\alpha(\mathbf{r})$  являются безразмерными и независимыми от текущего значения частоты  $\omega_j$ . Надо заметить, что в работе [22] в качестве  $g_\rho(\mathbf{r})$  и  $g_\alpha(\mathbf{r})$  были выбраны функции, совпадающие с приведенными выше лишь с точностью до размерностного множителя. Соотношения (5) и (9) позволяют найти функции  $g_c(\mathbf{r})$ ,  $g_\rho(\mathbf{r})$  и  $g_\alpha(\mathbf{r})$ . При этом в качестве функций  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  при различных  $\omega_j$  используется их оценка  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , уже найденная при решении обратной задачи.

Значения скорости звука  $c(\mathbf{r})$  и плотности  $\rho(\mathbf{r})$  разделяются с помощью (5) благодаря различной частотной зависимости слагаемых  $\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} g_c(\mathbf{r})$  и  $g_\rho(\mathbf{r})$ . Соотношение (5) при каждом фиксированном  $\mathbf{r}$  записывается для различных частот  $\omega_j$  – не менее, чем для двух. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $g_c(\mathbf{r})$  и  $g_\rho(\mathbf{r})$ , которые не зависят от частоты:

$$\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} g_c(\mathbf{r}) + g_\rho(\mathbf{r}) = \frac{c_0^2}{\omega_0^2} \text{Re } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j). \quad (11)$$

МНК-решение системы (11) дает оценки  $\hat{g}_c(\mathbf{r})$  и  $\hat{g}_\rho(\mathbf{r})$ , после чего оценки скорости звука  $\hat{c}(\mathbf{r})$  и плотности  $\hat{\rho}(\mathbf{r})$  вычисляются из (6) и (7), соответственно. Так, соотношение (6) позволяет записать  $\hat{g}_c(\mathbf{r}) = 1 - \frac{c_0^2}{\hat{c}^2(\mathbf{r})}$ , откуда

$$\hat{c}(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \hat{g}_c(\mathbf{r})}}. \quad (12)$$

Нахождение  $\hat{\rho}(\mathbf{r})$  из оценки  $\hat{v}_\rho(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \hat{g}_\rho(\mathbf{r})$  функции

$$v_\rho(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0^2}{c_0^2} g_\rho(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right)$$

более трудоемко. Так, введенная функция  $v_\rho(\mathbf{r})$  позволяет переписать (7) в виде

$$\nabla^2 \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} - 1 \right) = v_\rho(\mathbf{r}) \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} - 1 \right) + v_\rho(\mathbf{r})$$

и рассматривать это уравнение при условии  $\rho \equiv \rho_0$  вне  $\mathfrak{X}$ . Как следствие, функция  $\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} - 1$ , обращающаяся в ноль вне  $\mathfrak{X}$ , находится решением следующего интегрального уравнения [3 (п. 7.3.1.2), 8, 22]:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} - 1 = \\ & = \int_{\mathfrak{X}} G_{\text{Lap}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_\rho(\mathbf{r}') \left( \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r}')} } - 1 \right) d\mathbf{r}' + \\ & + \int_{\mathfrak{X}} G_{\text{Lap}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$G_{\text{Lap}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) & \text{при } \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2, \\ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \text{при } \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

– функция Грина однородного изотропного безграничного пространства для оператора Лапласа. С математической точки зрения, уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} = 1 + \\ & + \int_{\mathfrak{X}} G_{\text{Lap}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_\rho(\mathbf{r}') \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r}')} } d\mathbf{r}', \quad \forall \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (14)$$

которое решается относительно функции  $\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}}$ , обращающейся в единицу вне  $\mathfrak{X}$ . Таким образом, использование в (13) или (14) в качестве функции  $v_\rho(\mathbf{r})$  ее оценки  $\hat{v}_\rho(\mathbf{r})$  позволяет найти  $\sqrt{\frac{\rho_0}{\hat{\rho}(\mathbf{r})}}$  и итоговую оценку  $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ . В то же время, в [25] предлагается обобщение интегрального уравнения (13) или (14) на случай, когда искомые неоднородности плотности не локализованы строго в области  $\mathfrak{X}$ , но могут находиться во всем пространстве, включая границу области томографируемой.

Оценка  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  амплитудного коэффициента поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  определяется с помощью (8) при каждом фиксированном  $\omega_j$  на основе известной оценки  $\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = -\frac{\hat{c}(\mathbf{r})}{2\omega_j} \text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j).$$

Если дополнительно требуется определить показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения  $\zeta(\mathbf{r})$ , то соотношение (9) рассматривается для различных частот. Тогда из (9) следует:

$$\left\{ \lg \left( \frac{\omega_j}{\omega_k} \right) \right\} \zeta(\mathbf{r}) = \lg \left( \frac{\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \omega_k}{\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_k) \omega_j} \right), \quad (15)$$

$\omega_j \neq \omega_k.$

Выражение (15) позволяет, в принципе, найти  $\zeta(\mathbf{r})$  при использовании всего двух частот. В то же время, выражение (15), записанное при фиксированном  $\mathbf{r}$  для различных пар частот  $\{\omega_j, \omega_k\}$ , приводит к избыточной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного  $\zeta(\mathbf{r})$ . МНК-решение этой системы дает оценку  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$ . Однако решение  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$  становится очень неустойчивым в тех точках  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$ , где  $\alpha(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_j) \approx 0$ . Согласно (8), это означает, что величина  $\left| \frac{\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_j)}{\omega_j} \right|$  сравнительно мала, и критерием таких точек  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  может служить условие

$$\left| \left\langle \frac{\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_j)}{\omega_j} \right\rangle_j \right| \leq 2 \frac{\alpha^{\text{thres}}}{\hat{c}(\mathbf{r})}; \quad (16)$$

символ  $\langle \bullet \rangle_j$  означает усреднение по рассматриваемым частотам  $\omega_j$ . Здесь  $\alpha^{\text{thres}}$  – некоторое “пороговое” значение коэффициента поглощения, задаваемое априори. Величина  $\alpha^{\text{thres}}$  должна быть намного меньше тех возможных значений  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$ , которые предполагается определить в томографируемой области  $\mathfrak{X}$ . Во многих задачах отличие  $c(\mathbf{r})$  от  $c_0$  не влияет принципиально на оценочную величину правой части (16), и тогда можно использовать условие

$$\left| \left\langle \frac{\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_j)}{\omega_j} \right\rangle_j \right| \leq 2 \frac{\alpha^{\text{thres}}}{c_0}. \quad (17)$$

Таким образом, в точках  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$ , удовлетворяющих условию (16) или (17), поглощение можно считать пренебрежимо малым (для конкретной томографической задачи). Как следствие, оценка  $\hat{\zeta}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  в этих точках теряет смысл. Тем самым, значения  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$  оцениваются на основе (15)

при  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}^{(\alpha)}$ . В случае же  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(\alpha)}$  полагается  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_j) \approx 0$ , и показатель  $\hat{\zeta}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  не определяется.

В свою очередь, уже найденная оценка  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$  позволяет получить оценку  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0)$  пространственного распределения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  на основе (9) и (10):

$$\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0) = -\frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\omega_0}{\omega_j} \right)^{\hat{\zeta}(\mathbf{r})+1} \operatorname{Im} \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \right\rangle_j \frac{\hat{c}(\mathbf{r})}{\omega_0}$$

при  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}^{(\alpha)}$ ;  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_0) \approx 0$ . (18)

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При численном моделировании алгоритма разделения (11)–(18) длины волн в фоновой среде  $\lambda_{0j} = c_0/\omega_j$  задавались в условных единицах дискретизации длины (сокращенно “е.д.д.”) и изменялись в диапазоне от 7 до 8 е.д.д. Длина волны  $\lambda_{01} = 8$  е.д.д. соответствовала низшей частоте  $\omega_1 = 2\pi c_0/\lambda_{01}$  из рассматриваемого диапазона. Двумерная область томографирования  $V_S$  ( $\mathcal{R} \subset V_S$ ) имела форму круга радиуса  $5\lambda_{01}$ . Эта область была окружена 160-ю преобразователями. Преобразователи располагались равномерно на окружности радиуса  $150\lambda_{01}$ , центр которой совпадал с центром области томографирования  $V_S$ . Относительный диапазон изменения длин волн и соответствующих частот составлял примерно  $1/7.5 \approx 0.133$  (7.5 е.д.д. — центральная длина волны, 1 е.д.д. — диапазон изменения длин волн). Это согласуется, по порядку величины, с относительной шириной рабочей полосы частот в ультразвуковом томографе, предназначенном, в первую очередь, для диагностики молочной железы [3 (глава 8), 11, 26]. Так, при центральной частоте томографа  $f_0 \approx 1.25$  МГц и характерной частотной полосе  $\Delta f \approx 250...400$  кГц имеем  $\Delta f/f_0 \approx 0.2...0.3$ .

Моделируемый рассеиватель формировался за счет неоднородностей всех трех акустических характеристик: скорости звука, плотности и коэффициента поглощения, включая его показатель степени (рис. 1). Заданные пространственные распределения восстанавливаемых функций  $c(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ ,  $\zeta(\mathbf{r})$  содержали как крупномасштабные неоднородности с характерными линейными размерами в несколько длин волн, так и тонкую структуру с линейными размерами менее длины волны. Характерные значения для крупномасштабных отклонений скорости звука  $c(\mathbf{r})$  от фонового значения  $c_0 = 1500$  м/с (рис. 1а) и для величины поглощения  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  (рис. 1в) выбирались близкими к возможным реальным значениям в мягкой биоткани. Действительно, при томографировании мягких биотканей с помощью частотного диапазона  $\cong 1...1.5$  МГц характерная длина волны составляет, по порядку величины,

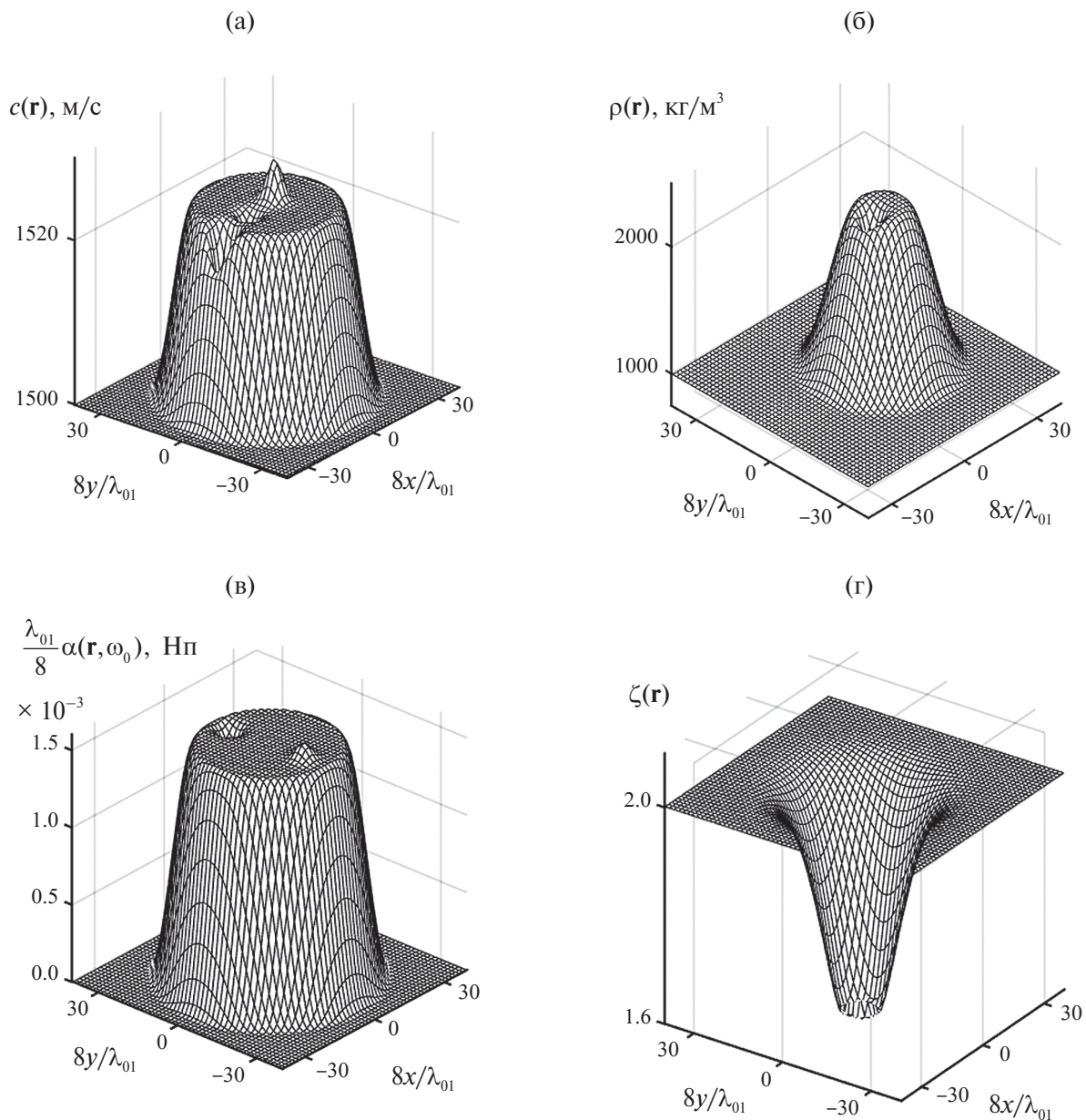
$\lambda \cong (1...1.5) \times 10^{-3}$  м, а амплитудный коэффициент поглощения составляет  $\alpha \cong 0.5...1$  дБ/см  $\cong 5.8...11.5$  Нп/м [27 (§ 4.3.4)]. Тогда  $\frac{\lambda}{8} \alpha \cong (0.7...2) \times 10^{-3}$  Нп. Такой же порядок имеет  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  на рис. 1в. Надо обратить внимание, что на рис. 1в, 3г, 4б приводятся именно функции  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha$ , а не  $\alpha$ . Это позволяет устранить влияние условных значений единиц дискретизации длины (выбранных при численном моделировании) на  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha$  и, тем самым, позволяет сравнивать значения  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha$  со значениями в настоящих биотканях. В качестве  $\omega_0$  при моделировании выбиралась частота, соответствующая длине волны  $\approx 7.49$  е.д.д., т.е. вблизи центральной частоты рабочего частотного диапазона.

Значения показателя степени  $\zeta$  коэффициента поглощения (рис. 1г) задавались из тех соображений, что для мягких биотканей  $\zeta$  лежит в диапазоне  $1...2$  [28 (§ 4.5)]. Вне области рассеяния полагалось  $\zeta = 2$ , как в воде.

Максимальные абсолютные значения функций  $g_c(\mathbf{r})$  и  $g_\rho(\mathbf{r})$ , которые описываются выражениями (6) и (7) и формируют действительную часть функции рассеивателя (5), задавались соизмеримыми друг с другом по порядку величины:  $\max_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} |g_c(\mathbf{r})| \approx 0.037$ ,  $\max_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} |g_\rho(\mathbf{r})| \approx 0.041$ . Это позволило более объективно оценить помехоустойчивость алгоритма разделения по отношению к выделению  $c(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$  из оценок функций  $v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ . Однако соизмеримость заданных значений  $\max_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} |g_c(\mathbf{r})|$  и  $\max_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} |g_\rho(\mathbf{r})|$  привела к тому, что амплитуда крупномасштабных отклонений плотности  $\rho(\mathbf{r})$  от фонового значения  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup> оказалась несколько завышенной, по сравнению с типичной реальной ситуацией (рис. 1б). Для целей описываемой работы данное обстоятельство не принципиально.

Тонкая структура моделировалась в виде мелкомасштабных возмущений гауссовской формы. Такие возмущения присутствовали на фоне крупномасштабных неоднородностей, располагались несимметрично относительно центра томографируемой области и имели амплитудные значения, разные по абсолютной величине и знаку (рис. 1, 3). Характерный пространственный масштаб тонкой структуры определялся по полной ширине возмущения на уровне 0.5 от амплитудного значения данного возмущения на фоне крупномасштабной неоднородности и составлял  $(0.5...0.6)\lambda_{01}$  (рис. 3).

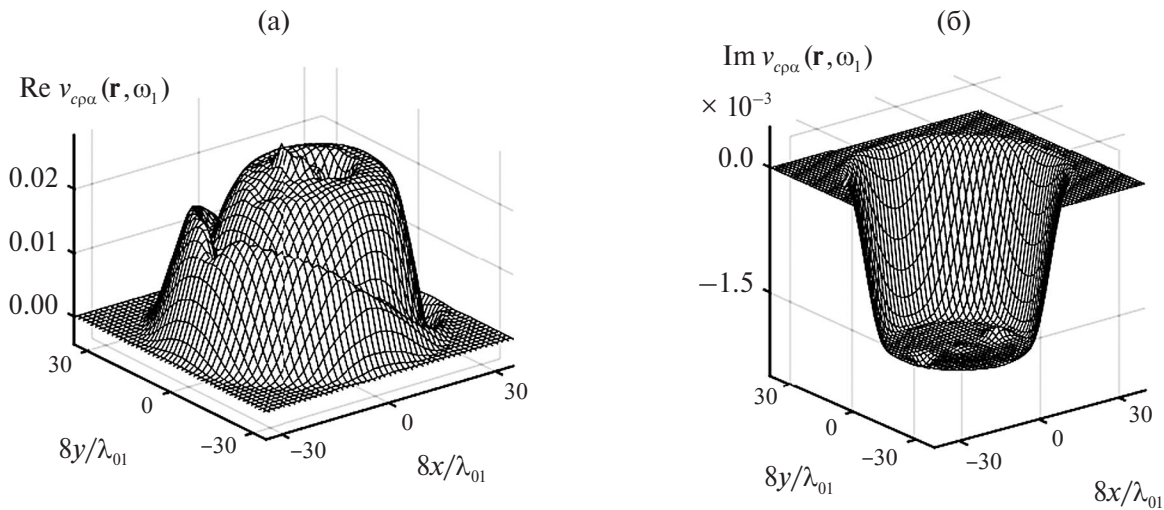
Более конкретно, крупномасштабные неоднородности скорости звука  $c(\mathbf{r})$  и коэффициента поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  имели форму цилиндра радиуса  $3.5\lambda_{01}$  со сглаженными границами; центр цилиндра совпадал с центром области томографирования. Тонкая структура для  $c(\mathbf{r})$  задавалась



**Рис. 1.** Модель рефракционно-поглощающего рассеивателя, который задается неоднородными пространственными распределениями скорости звука (а) –  $c(\mathbf{r})$ , плотности (б) –  $\rho(\mathbf{r})$ , (в) – амплитудного поглощения  $\frac{\lambda_{01}}{8}\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  на центральной частоте  $\omega_0$  и (г) – показателя степени частотной зависимости коэффициента поглощения  $\zeta(\mathbf{r})$ . Максимальный дополнительный набег фазы на неоднородностях скорости звука составляет  $\Delta\psi \approx 0.2\pi$ ; максимальное относительное амплитудное поглощение в рассеивателе –  $\approx 1.08$  раза. Длина волны  $\lambda_{01} = 8$  е.д.д. соответствует нижней рабочей частоте  $\omega_1$ .

в виде трех возмущений с разными амплитудными значениями, расположенными вдоль оси  $OX$  (рис. 1а, 3а). Тонкая структура для  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  была представлена двумя возмущениями, расположенными вдоль оси  $OY$  (рис. 1в, 3г). Определенный знак функции  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0) > 0$  соответствовал поглощению в среде. Пространственное распределение для показателя степени  $\zeta(\mathbf{r})$  задавалось в виде одиночной крупномасштабной неоднородности

гауссовской формы, смещенной вдоль оси  $OX$  относительно начала координат. В центре такой неоднородности располагалось мелкомасштабное возмущение с противоположным по знаку значением (рис. 1г, 4а). Крупномасштабная неоднородность плотности  $\rho(\mathbf{r})$  представляла собой сглаженный цилиндр радиуса  $\approx 2\lambda_{01}$  (рис. 1б), центр которого был смещен на  $\approx 0.8\lambda_{01}$  вдоль оси  $OX$  в положительном направлении.



**Рис. 2.** Пространственные распределения по области томографирования для (а) — действительной части  $\text{Re } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_1)$  и (б) — мнимой части  $\text{Im } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_1)$  истинной функции рассеивателя на нижней рабочей частоте  $\omega_1$ .

Тонкая структура для неоднородности плотности была смещена относительно центра этого цилиндра вдоль оси  $OX$  (рис. 1б, 3в).

Как следствие, тонкая структура будет присутствовать в функциях  $g_c(\mathbf{r})$ ,  $g_p(\mathbf{r})$  и  $g_\alpha(\mathbf{r})$ , которые формируют рассеивающие компоненты для действительной  $\text{Re } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  и мнимой  $\text{Im } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  частей функции рассеивателя, см. (5) и (9), соответственно. Так, функции  $g_c(\mathbf{r})$  и  $g_\alpha(\mathbf{r})$  визуально имеют практически ту же форму, как  $c(\mathbf{r})$  и  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ ; сечение функции  $g_p(\mathbf{r})$  изображено на рис. 3б.

Итак, выбранные модельные параметры рассеивающих неоднородностей позволяют проиллюстрировать работоспособность, помехоустойчивость и разрешающую способность алгоритма разделения (5)–(18) при амплитудных значениях неоднородностей, приближающихся к реальным условиям. При этом оказалось, что амплитуда для  $\text{Re } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  на порядок превышает амплитуду для  $\text{Im } v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , что видно из рис. 2. Этот рисунок приведен для нижней частоты  $\omega_1$ , соответствующей  $\lambda_{01} = 8$  е.д.д. То обстоятельство, что выбранный линейный размер полной области рассеяния  $\mathfrak{X}$  (области локализации неоднородностей) был существенно меньше линейного размера в реальных томографических задачах (составляющего, например, 100...200 длин волн при томографировании молочной железы), не является принципиальным для целей апробации алгоритма разделения. Это объясняется тем, что искомые акустические параметры  $\hat{c}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{g}_p(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0)$  и  $\hat{\xi}(\mathbf{r})$  оцениваются при разделении (5)–(18) в каждой фиксированной точке  $\mathbf{r}$  независимо от других точек. Для обеспечения общности получаемых результатов важно только, чтобы

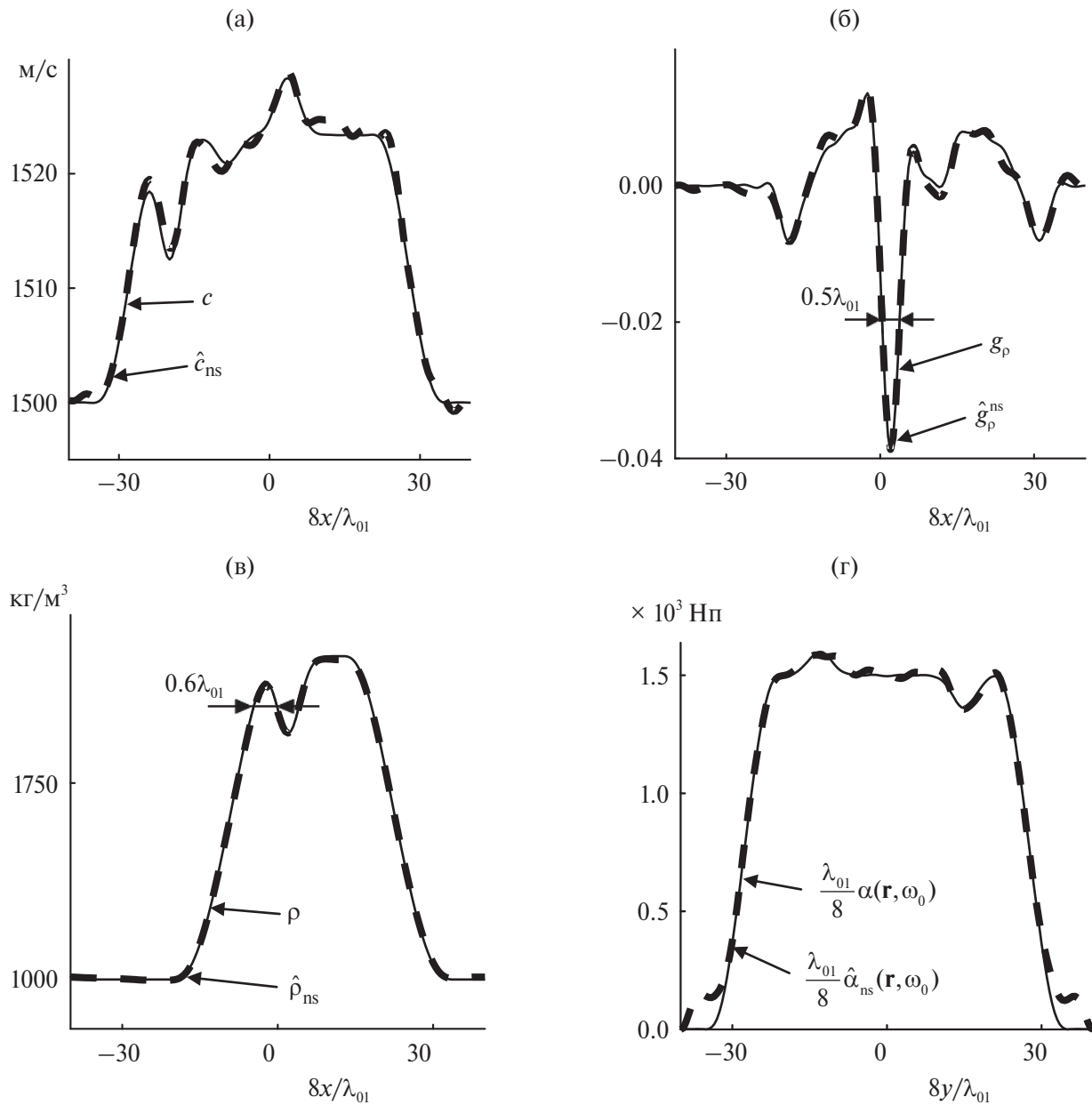
рассеиватель не был слабым, т.е. чтобы процессы многократного рассеяния волн внутри него были существенными.

Для оценки силы рассеивателя рассчитывался дополнительный набег фазы  $\Delta\psi$ , который приобретает волна, проходя через среду, неоднородную по скорости звука  $c(\mathbf{r})$ . Для волны, распространяющейся вдоль траектории  $l_{\mathfrak{X}}$  с фиксированным знаком контраста скорости  $\Delta c(\mathbf{r}) \equiv c(\mathbf{r}) - c_0$ , дополнительный набег фазы  $\Delta\psi$  оценивается как

$$\Delta\psi \equiv \int_{l_{\mathfrak{X}}} [k_{0j} - k_j(\mathbf{r})] dl_{\mathbf{r}} = k_{0j} \int_{l_{\mathfrak{X}}} \frac{\Delta c(\mathbf{r})/c_0}{1 + \Delta c(\mathbf{r})/c_0} dl_{\mathbf{r}}.$$

Здесь  $k_{0j} = \omega_j/c_0$ ,  $k_j(\mathbf{r}) = \omega_j/c(\mathbf{r})$ ;  $dl_{\mathbf{r}}$  — длина элемента траектории в окрестности точки  $\mathbf{r}$ . Так,  $\Delta\psi \approx 0.2\pi$  на нижней рассматриваемой частоте  $\omega_1$  при распространении волны через центральное сечение моделируемого рассеивателя как вдоль оси  $OX$ , так и вдоль оси  $OY$  (рис. 1а, 3а). Кроме того, присутствие неоднородностей плотности также создает эффективный дополнительный набег фазы волны [3 (§ 5.2.4), 29]. В то же время, суммарное поглощение волны на той же частоте  $\omega_1$  приводит к уменьшению амплитуды волны в  $\approx 1.08$  раза при прохождении как вдоль оси  $OX$ , так и вдоль оси  $OY$ . При увеличении частоты дополнительный набег фазы и поглощение увеличиваются.

Таким образом, все типы неоднородностей (скоростная, плотностная и поглощающая) приводят к рассеянию волн и, тем самым, влияют на силу рассеивателя. Приведенные значения дополнительного набег фазы и поглощения свидетельствуют, что описанный рассеиватель имеет среднюю силу [3 (§ 5.4.2), 8 (§ 2.3, § 6.3)], вы-



**Рис. 3.** Центральные сечения для истинных функций (сплошные линии) (а) –  $c(x, y = 0)$ , (б) –  $g_p(x, y = 0)$ , (в) –  $\rho(x, y = 0)$ , (г) –  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha(x = 0, y, \omega_0)$  и для их оценок (толстые штриховые линии) (а) –  $\hat{c}_{ns}(x, y = 0)$ , (б) –  $\hat{g}_p^{ns}(x, y = 0)$ , (в) –  $\hat{\rho}_{ns}(x, y = 0)$ , (г) –  $\frac{\lambda_{01}}{8} \hat{\alpha}_{ns}(x = 0, y, \omega_0)$ . Оценки являются результатом раздельного восстановления рассеивающих компонент по данным на 100 частотах (соответствующие длины волн  $\lambda_{0j} \in [7, 8]$  е.д.д.) в присутствии случайных шумовых помех со среднеквадратичным отклонением  $\sigma_{ns} = 0.03 \bar{G}_{sc}^{cl}$  на каждой из частот.

ходя за рамки слабого (борновского) рассеивателя. Это означает, что при решении обратной задачи с целью получения оценки функции рассеивателя  $\hat{v}_{cra}(\mathbf{r}, \omega_j)$  необходимо учитывать процессы многократного рассеяния волн. Как уже упоминалось выше, эти оценки  $\hat{v}_{cra}(\mathbf{r}, \omega_j)$  на каждой из используемых частот  $\omega_j$  являются исходными данными для алгоритма разделения рассеивающих компонент (11)–(18). При этом кон-

кретный алгоритм восстановления  $\hat{v}_{cra}(\mathbf{r}, \omega_j)$  не принципиален для дальнейшего разделения рассеивающих компонент, но он должен быть достаточно точным. В настоящей работе использовался функциональный алгоритм [16], который уже был ранее численно реализован и оказался очень удобным и перспективным для решения практических двумерных обратных задач томографического типа [19, 21]. Отличительной особен-

стью этого функционального алгоритма является практически строгий учет процессов многократного рассеяния, причем без применения итерационных процедур. Оценки  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  восстанавливались на основе рассеянных полей в области приема  $G_{sc}^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) \equiv G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) - G_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  [19, 21], где измеряемые поля  $p \equiv G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  при радиус-векторах квазиточечного излучателя  $\mathbf{x} \in X$  и квазиточечного приемника  $\mathbf{y} \in Y$  представлены классическими запаздывающими функциями Грина  $G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  в присутствии рассеивателя и  $G_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  в его отсутствие. Как упоминалось, области  $X$  и  $Y$  расположения квазиточечных излучателей и приемников при моделировании были одинаковыми и задавались окружностью.

Перед непосредственной реализацией алгоритма разделения рассеивающих компонент (11)–(18) оказалось целесообразным предварительно выполнить своего рода регуляризацию полученных оценок  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ . С этой целью, во-первых, выполнялась фильтрация (сглаживание) в координатном пространстве. Эта фильтрация заключалась в том, что искусственно задавалась плавное спадание до нуля функций  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  на границе области томографирования  $\mathcal{R}$  на основе той априорной информации, что вне  $\mathcal{R}$  находится только фоновая однородная среда. Во-вторых, проводилась фильтрация сглаженных оценок  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  в пространстве векторов пространственных частот  $\xi$ , т.е. фильтрация пространственных спектров

$$\widehat{v}_{c\alpha}(\xi, \omega_j) \equiv \int \widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

этих оценок. Фильтрация такого типа заключалась в обнулении пространственно-спектральных компонент  $\widehat{v}_{c\alpha}(\xi, \omega_j)$  при  $|\xi| > 2k_{01}$  (использовалось одно и то же наименьшее волновое число  $k_{01} = 2\pi/\lambda_{01}$  для каждой фиксированной  $\omega_j$ ). Физический смысл этой фильтрации заключается в том, что в пространственном спектре  $\widehat{v}_{c\alpha}(\xi, \omega_j)$  компоненты  $|\xi| > 2k_{0j} \equiv \frac{4\pi}{\lambda_{0j}}$  заведомо не могут быть адекватно восстановлены при решении обратной задачи, поскольку попытка их восстановления приводит к неустойчивости, вне зависимости от конкретного алгоритма решения [3 (глава 6), 18, 21 (глава 16)]. Как следствие, разрешающая способность восстановленной оценки  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  не может быть лучше, чем  $\frac{\lambda_{0j}}{4} \dots \frac{\lambda_{0j}}{3}$ . Тем не менее, эта разрешающая способность обеспечивается не только для слабых рассеивателей (т.е. когда справедливо приближение однократного рассеяния), но и для рассеивателей, создающих сильно выраженные эффекты многократного рассеяния волн [9, 21 (раздел 16.6)].

В-третьих, после выполнения двух упомянутых видов фильтраций накладывалось дополнительное требование на знак мнимой части функции рассеивателя. А именно, знак коэффициента поглощения априори известен ( $\alpha \geq 0$ ) и, следовательно, известен знак мнимой части функции рассеивателя:  $\text{Im } v_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \leq 0$ . Поэтому в тех точках  $\mathbf{r}$ , где знак оценки  $\text{Im } \widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  оказывался другим, т.е. оказывалось  $\text{Im } \widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) > 0$ , принудительно полагалось  $\text{Im } \widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) = 0$ . Это соответствовало отсутствию в области томографирования ложного усиления и служило своего рода дополнительной регуляризацией получаемой оценки. Априорная информация о том, что при томографировании реализуется именно процесс поглощения волн, а не усиления, используется, например, при итерационном восстановлении изображений в [30].

В итоге организовывалась вспомогательная итерационная процедура регуляризации, которая состояла из последовательного выполнения трех упомянутых операций на каждой итерации. При наличии полного объема исходных данных рассеяния и отсутствии помех в них, оценки  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  совпадают с истинными функциями  $v_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , и такая процедура практически не изменяет эти функции. В случае же присутствия случайной шумовой помехи происходит пространственное сглаживание оценок  $\widehat{v}_{c\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ .

Точность оценок  $\widehat{c}(\mathbf{r})$ ,  $\widehat{\rho}(\mathbf{r})$ ,  $\widehat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0)$  и  $\widehat{\zeta}(\mathbf{r})$ , которые получались в результате алгоритма разделения рассеивающих компонент (11)–(18), характеризовалась относительными среднеквадратичными погрешностями восстановления (т.е. невязками по решению)  $\delta_c$ ,  $\delta_\rho$ ,  $\delta_\alpha$  и  $\delta_\zeta$ , соответственно. Так, невязка для оценки скорости звука рассчитывалась по всей области томографирования  $V_S$  как

$$\delta_c \equiv \frac{\sqrt{\int_{V_S} |\widehat{c}(\mathbf{r}) - c(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}{\sqrt{\int_{V_S} |c(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}};$$

невязки  $\delta_\rho$  и  $\delta_\alpha$  рассчитывались аналогично. При вычислении невязки  $\delta_\zeta$  рассматривалась не вся область томографирования  $\mathbf{r} \in V_S$ , а только те точки  $\mathbf{r}$ , которые не совпадают с точками  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  из критерия (17) при заданном пороговом значении  $\alpha^{\text{thres}}$ . В точках  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$ , определяемых критерием (17), для оценки  $\widehat{\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_0)$  принудительно полагалось  $\widehat{\alpha}(\mathbf{r}^{(\alpha)}, \omega_0) \approx 0$ .

На практике пороговое значение  $\alpha^{\text{thres}}$ , стоящее в правой части (17), может определяться той точностью, с которой ожидается восстановить искомые значения коэффициента поглощения. При численном моделировании  $\alpha^{\text{thres}}$  задавалось

как  $\alpha^{\text{thres}} = \varepsilon^{\text{thres}} \max_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ , где коэффициент  $\varepsilon^{\text{thres}}$  позволяет варьировать уровень порога. Для всех результатов разделения, приводимых ниже, полагалось  $\varepsilon^{\text{thres}} = 0.03$ ; тогда в рассматриваемой модели рассеивателя при таком значении  $\varepsilon^{\text{thres}}$  имеем  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha^{\text{thres}} \approx 5 \times 10^{-5}$  Нп. Для сравнения, это значение оказывается на порядок больше, чем в воде, которая обычно является фоновой средой (иммерсионной жидкостью) в медицинских ультразвуковых томографах. Так, амплитудный коэффициент поглощения  $\alpha^{\text{wat}}$  в воде для мегагерцового диапазона линейных частот  $f$  составляет  $\frac{\alpha^{\text{wat}}}{f^2} = 23 \times 10^{-15} \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$  при температуре  $\approx 20^\circ\text{C}$  [31 (§ 7.3), 32]. Тогда при  $c_0 \approx 1500$  м/с,  $\rho_0 \approx 1000$  кг/м<sup>3</sup> и рассматриваемых частотах  $f \cong \cong 1...1.5$  МГц, т.е. при  $\lambda = \frac{c_0}{f} \cong (1...1.5) \times 10^{-3}$  м имеем:  $\alpha^{\text{wat}} \cong (2.3...5.2) \times 10^{-2}$  Нп/м;  $\frac{\lambda}{8} \alpha^{\text{wat}} \cong (4.3...6.5) \times 10^{-6}$  Нп. При температуре  $\approx 37^\circ\text{C}$  коэффициент поглощения  $\alpha^{\text{wat}}$  уменьшается:  $\frac{\alpha^{\text{wat}}}{f^2} = 15.7 \times 10^{-15} \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$  [28 (§ 4.5.1), 31 (§ 7.3)], и тогда  $\alpha^{\text{wat}} \cong (1.6...3.6) \times 10^{-2}$  Нп/м;  $\frac{\lambda}{8} \alpha^{\text{wat}} \cong (3.0...4.5) \times 10^{-6}$  Нп.

Минимальное количество частот, которое допускает разделение рассеивающих компонент, равно двум. При используемых двух длинах волн 7 и 8 е.д.д. отношение высшей частоты к низшей составляет  $8/7 \approx 1.14$ . Тогда итоговые оценки  $\hat{c}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\rho}(\mathbf{r})$  и  $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0)$ , полученные по данным рассеяния в отсутствие помех на соответствующих двух частотах, практически совпадают с истинными значениями. Это было проиллюстрировано в [5]; в настоящей работе графики с подобными результатами не приводятся, однако соответствующие значения невязок для рассматриваемой модели (рис. 1) составляют  $\delta_c \approx 3.7 \times 10^{-4}$ ,  $\delta_\rho \approx 0.01$ ,  $\delta_\alpha \approx 3.8 \times 10^{-4}$ . Отличие от нуля этих невязок обусловлено лишь погрешностями дискретизации при решении прямой задачи (моделирование данных рассеяния) и обратной задачи (восстановление функции рассеивателя  $\hat{v}_{\text{ср}\alpha}$ ). Здесь и далее невязки относятся к случаю решения прямой и обратной задач с шагом дискретизации  $\lambda_j/16$ ; при уменьшении шага дискретизации невязки в отсутствие помех становятся еще меньше. В то же время, показатель степени частотной зависимости поглощения  $\zeta(\mathbf{r})$  восстанавливается с более низкой точностью  $\delta_\zeta = 0.07$ . Это связано с тем, что уменьшение коэффициента поглощения приводит к ухудшению устойчивости МНК-решения системы (15) в соответствующих точках [5] — на границе области томографирования в используемой модели.

Алгоритм разделения (5)–(18) исследовался на помехоустойчивость. С этой целью в исходные данные, т.е. в рассеянные сигналы  $G_{\text{sc}}^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ ,

$\mathbf{y} \in Y$ , на основе которых восстанавливались оценки  $\hat{v}_{\text{ср}\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , привносилась случайная помеха [19, 21 (раздел 16.4, раздел 20.2)] с нулевым средним. Среднеквадратичное амплитудное отклонение помехи составляло  $\sigma_{\text{ns}}(\omega_j) = \varepsilon_{\text{ns}} \bar{G}_{\text{sc}}^{\text{cl}}(\omega_j)$  независимо для действительной и мнимой части помехи. Здесь  $\varepsilon_{\text{ns}}$  — относительный коэффициент зашумления;

$$\bar{G}_{\text{sc}}^{\text{cl}}(\omega_j) \equiv \sqrt{\frac{\int_Y d\mathbf{x} \int_Y d\mathbf{y} |G_{\text{sc}}^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)|^2}{\int_Y d\mathbf{x} \int_Y d\mathbf{y}}}$$

— среднеквадратичное значение данных рассеяния  $G_{\text{sc}}^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  на заданной частоте зондирующего сигнала.

Для повышения помехоустойчивости итоговых оценок алгоритма разделения в присутствии случайных помех в исходных данных рассеяния, целесообразно использование большого количества частот  $\omega_j$ . Например, в [33] спектр волновых полей, зарегистрированных в томографическом эксперименте по обследованию молочной железы, предварительно разделяется на узкие частотные полосы, и обработка сигналов выполняется отдельно в каждой такой частотной полосе. В ультразвуковом медицинском томографе [3 (глава 8), 11, 26] реализуется импульсный режим зондирования исследуемого объекта и последующего приема сигналов, прошедших через данный объект. Используемый двухшаговый алгоритм обработки [3 (§ 5.4.1, глава 8), 10, 11] предполагает восстановление пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения с низким разрешением (в несколько длин волн) на первом шаге и последующее восстановление тонкой структуры объекта (с разрешением около одной четверти характерной длины волны) на втором шаге. Алгоритм восстановления, привлекаемый на втором шаге, допускает обработку волновых полей при любой ширине частотной полосы, т.е. обработку как непосредственно полей в импульсном режиме, так и при более узкой частотной полосе, вплоть до квазимонохроматического режима. С другой стороны, функциональные методы [12–21] предполагают обработку экспериментальных томографических данных в виде монохроматических составляющих принятых полей. При этом на этапе восстановления оценок  $\hat{v}_{\text{ср}\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  имеется возможность учитывать взаимосвязь различных рассеивающих компонент этих оценок на различных частотах через соответствующие уравнения связи полей внутри области рассеяния [21 (глава 18), 34], что будет кратко обсуждено в заключение настоящей работы.

Количество независимых частот  $N_f$ , которые наиболее целесообразно использовать при вос-

становлении  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  в целях последующего разделения рассеивающих компонент, зависит от характеристик томографического эксперимента [5]. Так, рассеянное поле во временном представлении  $G_{sc}^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t)$ , которое регистрируется приемниками и имеет длительность  $\tau_{sc}$ , формируется  $N_f \cong \Delta f / \Delta f_{sample} = \tau_{sc} \Delta f$  частотами фиксированного знака. Здесь  $\Delta f$  – характерная ширина частотного спектра рассеянного поля  $G_{sc}^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t)$  и  $\Delta f_{sample} = 1/\tau_{sc}$  – максимально допустимый шаг дискретизации данного частотного спектра. В вышеупомянутом ультразвуковом томографе [3 (глава 8), 11, 26] используются зондирующие поля низкой интенсивности, так что эффекты нелинейного взаимодействия акустических полей, порождающие частоты гармоник и комбинационные частоты, пренебрежимо малы. Тем самым, значение  $\Delta f$  можно оценить как ширину амплитудного спектра зондирующего поля, т.е.  $\Delta f \cong 250$  кГц по уровню 0.5 и  $\Delta f \cong 400$  кГц по уровню 0.1 при несущей частоте  $f_0 \approx 1.25$  МГц для рассматриваемого томографа.

С другой стороны, длительность  $\tau_{sc}$  рассеянного поля зависит от линейного размера  $L$  области рассеяния  $\mathcal{R}$  и от процессов перерассеяния волн внутри  $\mathcal{R}$ . Так,  $\tau_{sc} \cong 2L/c_0$  в случае слабого (борновского) рассеивателя. Тогда количество независимых дискретных значений частот составляет  $N_f \cong 2L\Delta f/c_0$ . Томографирование слабоконтрастных мягких биотканей дает  $N_f \cong 30..60$  частот при  $L \cong 0.1..0.2$  м,  $c_0 \approx 1500$  м/с,  $\Delta f \cong 250$  кГц. В случае сильных рассеивателей, создающих сильно выраженные эффекты перерассеяния, длительность рассеянного поля увеличивается:  $\tau_{sc} > 2L/c_0$  или даже  $\tau_{sc} \gg 2L/c_0$ . Как следствие, увеличивается  $N_f$  при фиксированном  $L$ . Именно сильные рассеиватели являются преобладающими в практических условиях, в том числе, при ультразвуковом томографировании молочной железы. В томографе [3 (глава 8), 11, 26] в настоящее время регистрируемые рассеянные акустические поля формируются за счет 50...100 частот. При акустическом томографировании океана обычно также можно обеспечить экспериментальные данные на нескольких десятках частот.

Ниже рассматриваются результаты, полученные при использовании 100 частот, которые соответствуют длинам волн, заданным в диапазоне от 7 до 8 е.д.д. с равномерным шагом. При этом относительный диапазон изменения частот  $\approx 0.13$  не превосходил соответствующий относительный диапазон  $\cong 0.2..0.3$  в томографе [3 (глава 8), 11, 26].

Сечения оценок  $\hat{c}_{ns}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\rho}_{ns}(\mathbf{r})$  и  $\hat{a}_{ns}(\mathbf{r}, \omega_0)$ , полученные в присутствии случайных помех с  $\epsilon_{ns} = 0.03$  (рис. 3), свидетельствуют о приемлемой помехоустойчивости обсуждаемого алгоритма

разделения в случае оценки пространственных распределений скорости звука  $c(\mathbf{r})$  (рис. 3а), плотности  $\rho(\mathbf{r})$  (рис. 3б, в) и коэффициента поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  (рис. 3г). Соответствующие значения невязок составляют  $\delta_c \approx 0.037$ ,  $\delta_\rho \approx 0.027$ ,  $\delta_\alpha \approx 0.072$ . Итоговая оценка  $\hat{\rho}_{ns}(\mathbf{r})$  пространственного распределения плотности среды получается из оценки  $\hat{v}_\rho^{ns}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \hat{g}_\rho^{ns}(\mathbf{r})$  на основе интегральных уравнений (13) или (14), где  $\hat{g}_\rho^{ns}(\mathbf{r})$  – найденная оценка функции  $\hat{g}_\rho(\mathbf{r})$  (рис. 3б). Оказалось, что операция интегрирования в (13) или (14) в определенной мере способствует компенсации погрешностей, присутствующих в  $\hat{g}_\rho^{ns}(\mathbf{r})$ . Благодаря интегрированию, относительная погрешность восстановления для  $\hat{\rho}_{ns}(\mathbf{r})$  может оказаться меньше, чем для  $\hat{c}_{ns}(\mathbf{r})$ , даже в тех случаях, когда погрешность восстановления для оценки  $\hat{g}_\rho^{ns}(\mathbf{r})$  превосходит погрешность для  $\hat{g}_c^{ns}(\mathbf{r})$ .

Заметное превышение невязки  $\delta_\alpha$  над значениями  $\delta_c$  и  $\delta_\rho$  объясняется тем, что характерные значения мнимой части функции рассеивателя  $|\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)|$  по порядку величины меньше действительной части  $|\text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)|$  в рассматриваемой модели (рис. 2). В то же время, уровень случайного шума в исходных данных рассчитывался на основе среднеквадратичного значения рассеянных полей  $G_{sc}^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ , которые порождаются всеми рассеивающими компонентами неоднородностей одновременно. В итоге, влияние шума в рассеянных полях на оценку функции  $\text{Im } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , которая отвечает за восстановление  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ , оказалось сильнее, по сравнению с влиянием того же самого шума на оценку функции  $\text{Re } v_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  с большей амплитудой, которая отвечает за восстановление  $c(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$ .

Наименее помехоустойчивой оказывается оценка  $\hat{\zeta}_{ns}(\mathbf{r})$  показателя степени  $\zeta(\mathbf{r})$ . Причем помехоустойчивость оценки  $\hat{\zeta}_{ns}(\mathbf{r})$  тем хуже, чем меньше величина коэффициента поглощения в данной точке  $\mathbf{r}$ . Это объясняется видом правой части соотношения (15), в которое входят дроби  $\text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) / \text{Im } \hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_k)$ . В отсутствие предварительной итерационной процедуры для регуляризации оценок  $\hat{v}_{c\rho\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ , о которой говорилось выше, оценка  $\hat{\zeta}_{ns}(\mathbf{r})$  получается хуже, чем в присутствии регуляризации, при неизменном наборе частот. С другой стороны, естественно, что помехоустойчивость восстановления показателя степени  $\zeta(\mathbf{r})$  будет тем лучше, чем больше количество используемых частот и шире относительная рабочая частотная полоса.

Для используемого относительного коэффициента зашумления  $\epsilon_{ns} = 0.03$  качество восстановления оказывается неудовлетворительным при заданном наборе частот. Уменьшение относительного коэффициента зашумления до

$\varepsilon_{\text{ns}} = 0.005$  также не позволяет получить удовлетворительных результатов восстановления  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}(\mathbf{r})$  (рис. 4а, пунктирная линия). Однако оценка  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}(\mathbf{r})$  становится приемлемой, если разрешающую способность сделать более грубой. Для этого была выполнена фильтрация пространственного спектра  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}(\xi)$  полученной оценки  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}(\mathbf{r})$ . Данная фильтрация заключалась в обнулении пространственных компонент  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}(\xi)$  вне круга радиуса  $k_{01}$ , т.е. при  $|\xi| > k_{01}$  (предварительная пространственная фильтрация для  $\text{Im} \hat{v}_{\text{cp}\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  выполнялась в круге большего радиуса  $2k_{01}$ ). Это приводит к оценке  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}^{\text{filt}}(\mathbf{r})$ , изображенной на рис. 4а толстой штриховой линией. Видно, что благодаря такой фильтрации удается с приемлемой точностью оценить пространственное распределение неоднородности  $\zeta(\mathbf{r})$ , однако мелкомасштабная структура “отфильтровывается” и не воспроизводится.

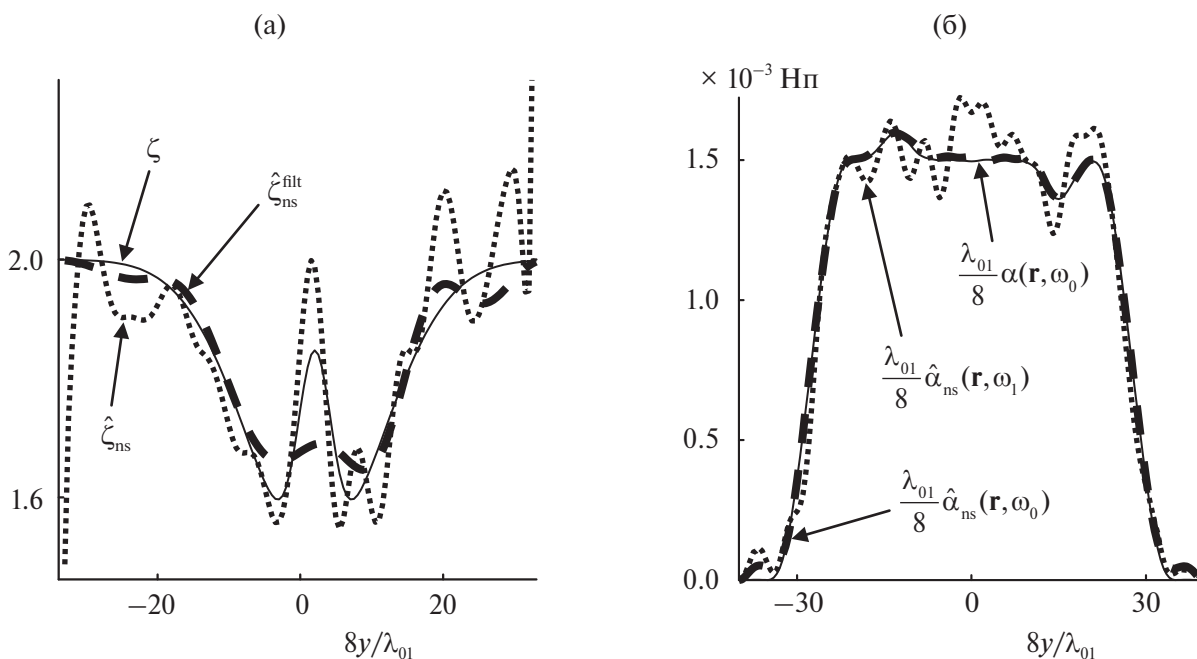
В то же время, коэффициент поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$  восстанавливается с высокой точностью, причем во всей области томографирования, т.е. даже в тех точках  $\mathbf{r}$ , где оценка показателя степени  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$  получается неудовлетворительной

(рис. 4б). В связи с этим, диапазон значений координаты вдоль выбранного сечения больше на рис. 4б, чем на рис. 4а.

Высокая помехоустойчивость для оценки (18) коэффициента поглощения может быть объяснена операцией усреднения по частотам при симметричном разбросе значений  $\omega_j/\omega_0$  вокруг значения 1. Симметричность разброса достигается за счет выбора значения  $\omega_0$  вблизи центральной частоты рабочего частотного диапазона и за счет относительно неширокой ширины этого диапазона:  $\omega_j \equiv \omega_0 + \Delta\omega_j, \frac{|\Delta\omega_j|}{\omega_0} < 1$ . А именно, соотношение типа (18) можно изначально рассмотреть в немного ином виде, также вытекающем из (9) и (10):

$$\left\langle \left( \frac{\omega_j}{\omega_0} \right)^{\hat{\zeta}(\mathbf{r}+1)} \right\rangle_j \hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0) = -\frac{1}{2} \left\langle \text{Im} \hat{v}_{\text{cp}\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j) \right\rangle_j \frac{\hat{\zeta}(\mathbf{r})}{\omega_0} \text{ при } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}^{(\omega)}$$

Искомая оценка  $\hat{\zeta}(\mathbf{r})$  представляется в виде  $\hat{\zeta}(\mathbf{r}) = \zeta_0 + \Delta\hat{\zeta}(\mathbf{r})$ , где  $\zeta_0 \equiv \text{const}$  – априори известное



**Рис. 4.** Центральные сечения  $x = 0$  результатов восстановления для (а) – показателя степени частотной зависимости коэффициента поглощения и (б) – для самого коэффициента поглощения: (а) – истинная функция  $\zeta$  (сплошная линия) и ее оценка  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}$  (пунктирная линия), полученная по зашумленным данным на 100 частотах при  $\lambda_{0j} \in [7, 8]$  е.д.д. и  $\sigma_{\text{ns}} = 0.005\bar{G}_{\text{sc}}^{\text{cl}}$ , а также оценка  $\hat{\zeta}_{\text{ns}}^{\text{filt}}$  (толстая штриховая линия), пространственный спектр которой профильтрован в круге радиуса  $k_{01} = 2\pi/\lambda_{01}$ ; (б) – истинная функция  $\frac{\lambda_{01}}{8} \alpha(x = 0, y, \omega_0)$  (сплошная линия) и ее оценка  $\frac{\lambda_{01}}{8} \hat{\alpha}_{\text{ns}}(x = 0, y, \omega_0)$  (толстая штриховая линия), полученная по зашумленным данным на 100 частотах при  $\lambda_{0j} \in [7, 8]$  е.д.д. и  $\sigma_{\text{ns}} = 0.01\bar{G}_{\text{sc}}^{\text{cl}}$ , а также оценка  $\frac{\lambda_{01}}{8} \hat{\alpha}_{\text{ns}}(x = 0, y, \omega_1)$  (пунктирная линия), полученная по зашумленным данным на единственной нижней частоте  $\omega_1$ .

среднее значение для  $\zeta(\mathbf{r})$ . Поскольку, как упоминалось выше, для мягких биотканей  $\zeta$  лежит в диапазоне 1...2, то  $|\Delta\widehat{\zeta}(\mathbf{r})| < 1$ . Тогда, с учетом соотношения  $\omega_j/\omega_0 = 1 + \Delta\omega_j/\omega_0$ , имеет место следующая оценка для частотного множителя в левой части (19):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\widehat{\zeta}(\mathbf{r})+1} &= \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\zeta_0+1} \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\Delta\widehat{\zeta}(\mathbf{r})} \approx \\ &\approx \left(1 + \frac{\Delta\omega_j}{\omega_0}\right)^{\zeta_0+1} \left\{1 + \Delta\widehat{\zeta}(\mathbf{r}) \ln\left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)\right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\widehat{\zeta}(\mathbf{r})+1} \right\rangle_j &\approx \\ \approx \left\langle \left(1 + \frac{\Delta\omega_j}{\omega_0}\right)^{\zeta_0+1} \left\{1 + \Delta\widehat{\zeta}(\mathbf{r}) \ln\left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)\right\} \right\rangle_j. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку  $\omega_0$  выбирается вблизи центральной частоты рабочего диапазона, то знак для  $\Delta\omega_j$  будет различным при различных частотах  $\omega_j$ :  $\Delta\omega_j > 0$  при  $\omega_j > \omega_0$ ;  $\Delta\omega_j < 0$  при  $\omega_j < \omega_0$ . Как следствие, значения  $\frac{\Delta\omega_j}{\omega_0}$  и  $\ln\left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)$  в (20) будут знакопеременными при переборе различных  $\omega_j$ . В итоге, с высокой точностью

$$\left\langle \left(\frac{\omega_j}{\omega_0}\right)^{\widehat{\zeta}(\mathbf{r})+1} \right\rangle_j \approx 1$$

вне зависимости от результата восстановления  $\zeta(\mathbf{r})$ .

На рис. 46 приведены значения коэффициента поглощения в сечении. Восстановленные значения получены с помощью (18) при усреднении по всем рассматриваемым 100 частотам (толстая штриховая линия), а также при использовании данных только на низшей частоте  $\omega_1$  (пунктирная линия); относительный коэффициент зашумления здесь был  $\varepsilon_{ns} = 0.01$ . Дополнительной пространственной фильтрации значений  $\widehat{\zeta}(\mathbf{r})$  в круге радиуса  $k_{01}$  не проводилось при восстановлении коэффициента поглощения, и результаты восстановления  $\zeta(\mathbf{r})$  были неприемлемыми даже при использовании 100 частот. Тем не менее, как видно из рис. 46, использование многочастотного режима зондирования позволяет оценить пространственное распределение  $\widehat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_0)$  с хорошей точностью; значение невязки в этом случае  $\delta_\alpha \approx 0.023$ . Использование же данных только на одной низшей частоте  $\omega_1$ , вместо усреднения по всем частотам, приводит к заметному ухудшению

оценки  $\widehat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_1)$  и позволяет описать с приемлемой точностью только крупномасштабное возмущение коэффициента поглощения (рис. 46).

Надо обратить внимание, что рассмотренные при моделировании различные относительные уровни случайных помех  $\varepsilon_{ns}$  превосходят уровень  $\approx 0.2\%$  случайных шумов в томографе [3 (глава 8), 11, 26]. Однако на практике могут оказаться преобладающими, с точки зрения влияния на итоговые оценки, систематические погрешности, обусловленные, например, нестрогим характером того или иного алгоритма для оценки функции рассеивателя  $\widehat{v}_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$ . По-видимому, влияние погрешностей такого рода будет выявлено, в полной мере, на этапе работы с реальными экспериментальными данными.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Восстановление функции рассеивателя  $v_{ср\alpha}(\mathbf{r}, \omega_j)$  функциональным алгоритмом в многочастотном режиме [21 (глава 18), 34] основывается на том, что уже на этапе нахождения полей внутри области рассеяния (необходимый этап решения обратной задачи) используются дополнительные уравнения связи. Эти уравнения как раз отражают априорную информацию о частотной зависимости рефракционной, плотностной и поглощающей компонент рассеивателя. В итоге получается система линейных уравнений для одновременного нахождения внутренних полей и рассеивающих компонент в каждой фиксированной точке пространства. Тем самым, процедура разделения рассеивающих компонент органично вплетается в процесс решения полной обратной задачи. Однако при написании уравнений связи с привлечением поглощающей компоненты рассеивателя в [21 (глава 18), 34] предполагается, что показатель степени  $\zeta(\mathbf{r})$  частотной зависимости коэффициента поглощения известен. Поскольку, в общем случае, это не так, то нужно организовать итерационный процесс для постепенного уточнения внутренних полей и рассеивающих компонент, с одной стороны, и для значений  $\zeta(\mathbf{r})$ , с другой стороны. В начале итераций начальное приближение для  $\zeta(\mathbf{r})$  можно задать, например, в виде ожидаемого среднего значения. Тогда при нахождении внутренних полей и рассеивающих компонент весовой коэффициент, который вводится при уравнениях связи, надо задать относительно небольшим, чтобы уравнения связи входили в решаемую систему “мягким” образом. После этого рассеивающие компоненты и  $\zeta(\mathbf{r})$  уточняются в соответствии с алгоритмом разделения, который обсуждался выше. Такие уточненные значения  $\zeta(\mathbf{r})$  используются для начала новой итерации. По мере сходимости итераций весовой коэффициент может увеличиваться. Детальная

разработка подобной итерационной схемы является предметом отдельного исследования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-61-00027, <https://rscf.ru/project/25-61-00027/>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румянцева О.Д., Шуруп А.С. Уравнение для волновых процессов в неоднородных движущихся средах и функциональное решение задачи акустической томографии на его основе // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 94–103.
2. Burov V.A., Matveev O.V., Zotov D.I., Rummyantseva O.D. Reconstruction of the blood flow velocity vector as an addition mode of ultrasonic tomograph // Physics of Wave Phenomena. 2015. V. 23. N 2. P. 135–142.
3. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2: Обратные задачи акустического рассеяния. М.: URSS, 2020, 2021. 768 с.
4. Marmarelis V.Z., Jeong J., Shin D.C., Do S. High-resolution 3-D imaging and tissue differentiation with transmission tomography // Acoustical Imaging. Ed. André M.P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 195–206.
5. Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Шуруп А.С. Раздельное восстановление скорости звука, плотности среды и поглощения в задачах томографического типа // Изв. Рос. Акад. наук. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 41–46.
6. Скучик Е. Основы акустики. Под ред. Лямшева Л.М. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 1. 520 с.; Т. 2. 542 с.
7. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А. Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
8. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
9. Буров В.А., Гришина И.М., Лапшенкина О.И., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сухов Е.Г. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 738–750.
10. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в мягких биотканях по модельным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 443–456.
11. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 254–273.
12. Novikov R.G. The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // J. Functional Analysis. 1992. V. 103. N 2. P. 409–463.
13. Novikov R.G. Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 // Physics Letters A. 1998. V. 238. N 2–3. P. 73–78.
14. Novikov R.G. The  $\bar{\delta}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions // Int. Mathematics Research Papers. 2005. V. 2005. N 6. P. 287–349.
15. Novikov R.G. The  $\bar{\delta}$ -approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions // J. Geom. Anal. 2008. V. 18. N 2. P. 612–631.
16. Novikov R.G., Santacesaria M. Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multichannel inverse problems // Int. Mathematics Research Notices. 2013. V. 2013. N 6. P. 1205–1229.
17. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482.
18. Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 516–536.
19. Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразователей // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 391–407.
20. Шуруп А.С., Румянцева О.Д. Совместное восстановление скорости звука, поглощения и течений функциональным алгоритмом Новикова–Агальцова // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 700–718.
21. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 4: Функционально-аналитические методы решения многомерной акустической обратной задачи рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2024. 504 с.
22. Румянцева О.Д., Буров В.А., Конюшкин А.Л., Шарпанов Н.А. Повышение разрешения двумерного томографирования по поперечной координате и раздельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 606–622.
23. Rummyantseva O.D., Shurup A.S., Zotov D.I. Possibilities for separation of scalar and vector characteristics of acoustic scatterer in tomographic polychromatic regime // J. Inverse and Ill-posed Problems. 2021. V. 29. N 3. P. 407–420. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0141>
24. Devaney A.J. Variable density acoustic tomography // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78. N 1. P. 120–130.
25. Agaltsov A.D. On the reconstruction of parameters of a moving fluid from the Dirichlet-to-Neumann map // Eurasian J. Mathematical and Computer Applications. 2016. V. 4. N 1. P. 4–11. <http://arxiv.org/abs/1512.06367>
26. Зотов Д.И. Принципы функционирования линейного акустического томографа // Изв. Рос. Акад. наук. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 36–40.
27. Duck F.A. Physical Properties of Tissue. London: Academic Press, 1990. 346 p.
28. Ультразвук в медицине. Физические основы применения. Изд. 2-ое. Под ред. Хилла К., Бембера Дж., тер Хаар Г. Пер. с англ. М.: Физматлит, 2008. 544 с.
29. Буров В.А., Румянцева О.Д. Линеаризованная обратная задача рассеяния в монохроматическом и импульсном режимах // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 41–49.

30. *Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2012. V. 131. N 5. P. 3802–3813.
31. *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др.* Физические величины: справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
32. *Михайлов И.Г., Гуревич С.Б.* Поглощение ультразвуковых волн в жидкостях // *Успехи физ. наук.* 1948. Т. 35. № 1. С. 1–34.
33. *Pratt R. G., Huang L., Duric N., Littrup P.* Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data // *Proc. of SPIE. Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging.* Eds. Hsieh J., Flynn M. 2007. V. 6510. P. 65104S-1–65104S-12.
34. *Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцова О.Д.* Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 6. С. 784–798.

## RECONSTRUCTION OF SOUND SPEED, DENSITY, ABSORPTION COEFFICIENT AND ITS FREQUENCY DEPENDENCE IN MULTY-FREQUENCY TOMOGRAPHY MODE

O.D. Rumyantseva<sup>a,\*</sup>, A.S. Shurup<sup>a,\*\*</sup>, D.I. Zotov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Department of Acoustics, Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: burov@phys.msu.ru*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: shurup@physics.msu.ru*

A stationary medium containing inhomogeneities of sound speed, density, and frequency-dependent absorption coefficient is considered. These inhomogeneous acoustic characteristics, including a power index of frequency dependence of the absorption coefficient, are unknown and must be reconstructed based on scattering data at many frequencies. First, complex scatterer function, which contains contributions from various types of the inhomogeneities, is reconstructed by solving the inverse problem. Then, method for extracting the individual spatial distributions of all the sought-for acoustic characteristics from the scatterer function is proposed. Numerical simulation results are presented, which illustrate capabilities and restrictions of the proposed method for various noise levels in initial data. It is shown that result of reconstructing the power index of the frequency dependence of the absorption coefficient has the lowest noise resistance. At the same time, the sound speed, density, and absorption coefficient are reconstructed with acceptable accuracy and high resolution.

*Keywords:* acoustic tomography, inverse problem, sound speed, density, absorption, frequency dependence of absorption coefficient